Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département des sciences de la terre et de l'univers (STU)
Niveau: 1^{er} année liscence
Module: Mathématiques 2

---

[1]**Travaux dirigés N°4:**
(Nombres $\mathbb{C}$omplexes)

Exercice 1: Ecrire sous forme algébrique (cartésienne) les nombres complexes suivants:

$z_1 = \left(\dfrac{3+6i}{3-4i}\right)$ $\quad z_2 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$ $\quad z_3 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$

$z_4 = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ $\quad z_5 = \left(\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ $\quad z_6 = 2\exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$

$z_7 = \left(2\exp\left(\dfrac{i\pi}{4}\right)\exp\left(-\dfrac{3i\pi}{4}\right)\right)$ $\quad z_8 = \dfrac{2\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)}{3\exp\left(\frac{-5i\pi}{6}\right)}$ $\quad z_9$:le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2:

1)- Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants: $z_1 = 3+3i \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3} \quad z_3 = -\frac{4}{3}i \quad z_4 = -2$

2)- Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants: $z_1 = 3-3i \quad z_2 = \sqrt{3} - i \quad z_1 z_2 \quad z_4 = -8\exp(i\dfrac{\pi}{3})$

Exercice 3:

1). Déterminer les nombres complexes z vérifiant: $(1+i)z - 1 + i = 0$. Préciser le complexe:

$$z = \frac{1-i}{2+i} + \frac{1-2i}{1+i}$$

2). Déterminer les nombres complexes z tels que: $z^2 = 2 + 2\sqrt{2}i$. Puis, déterminer les nombres complexes z tels que:

$$z^2 + \sqrt{2}z - \frac{\sqrt{2}}{2}i = 0.$$

3). Déterminer les nombres complexes z tels que: $z^2 = 2 - 4i$. Puis, déterminer les nombres complexes z tels que:

$$z^2 + \sqrt{2}z + i = 0.$$

Exercice 4:

1)- w est un nombre complexe différent de 1 mais de module 1. Montrer que l'équation d'inconnue z tel que:

$$\frac{z+i}{z-i} = w$$

a une solution que l'on calculera, puis montrer que cette équation est un nombre réel.
2)-Déterminer un nombre complexe z tel que: $\quad |1-z| = |1+i-z| = |2i+z|$

[1]Chargée de Cours: $\mathbb{F}$. $\mathbb{OUAAR}$

Solution du Devoir: (02 points)

1. f est paire car c'est le produit de deux fonctions impaires. On peut donc se restreindre à étudier f sur $]0,+\infty[$.
2. On pose $y=1/x$. Alors

$$f(x)=\frac{\sinh(y)}{y}=\frac{\sinh(y)-\sinh(0)}{y-0}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, y tend vers 0, et cette quantité tend vers la dérivée de $\sinh$ en 0, c'est-à-dire $\cosh(0)=1$.
La limite en $-\infty$ s'obtient par parité. Enfin, en 0^+, on a toujours en posant $y=1/x$

$$f(x)=\frac{\sinh(y)}{y}=\frac{e^y}{2y}-\frac{e^{-y}}{2y}.$$

Par croissance comparée, $e^y/y\to+\infty$ lorsque $y\to+\infty$, alors que $e^{-y}/y\to 0$ (ce n'est pas une forme indéterminée). On en déduit que $\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car $x\mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $y\mapsto\sinh(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée, obtenue par la formule de dérivation d'une composée, vaut :

$$f'(x)=\sinh(1/x)+x\times\frac{-1}{x^2}\times\cosh(1/x)=\cosh(1/x)\big(\tanh(1/x)-1/x\big).$$

4. On commence par étudier la fonction auxiliaire $g(y)=\tanh(y)-y$. Elle dérivable sur $]0,+\infty[$, et sa dérivée vaut

$$g'(y)=\big(1-\tanh^2(y)\big)-1=-\tanh^2(y)\leq 0.$$

g est donc décroissante sur $[0,+\infty[$, et puisque $g(0)=0$, on en déduit que $g(y)\leq y$ pour tout $y\geq 0$. On en déduit que f' est négative sur $]0,+\infty[$, et donc que f est décroissante sur cet intervalle. On vous laisse tracer le tableau de variations et la courbe.