Chapitre 2

Transformées de Laplace

2.1 Définition

Considérant une fonction réelle d'une variable réelle $f(t)$ telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa transformée de Laplace $\mathscr{L}[f(t)]$ comme la fonction F de la variable complexe p telle que:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

La fonction $F(p)$ est une fonction complexe d'une variable complexe p (avec $p = \sigma + j\omega$). La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ n'existe pas dans tous les cas: il est nécessaire que l'intégrale ci–dessus converge. On démontre que cette convergence est vérifiée si la partie réelle σ de la variable p est supérieure à une valeur donnée γ appelée seuil de convergence. D'une manière plus générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulles pour $t < 0$) vers l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe. La fonction $f(t)$ s'appelle l'original de $F(p)$, ou encore sa transformée inverse.

2.1.1 Conditions d'existence

Une fonction $f(t)$ admets une transformée de Laplace $F(p)$ si l'intégral du second membre de l'équation 2.1 a un sens. Tel est le cas si la fonction $f(t)$ est intégrable et ne croît pas plus vite, lorsque t tend vers l'infini, qu'une exponentielle. En effet, si la partie réelle de la variable complexe p est choisie assez grande, le facteur e^{-pt} forcera $f(t)e^{-pt}$ à tendre vers zéro pour t infini et l'intégrale à converger. La partie réelle de p doit être supérieure à une valeur γ:

$$\mathrm{Re}\, p > \gamma \tag{2.2}$$

dite seuil de définition de la transformée de Laplace de $f(t)$.

Exemple 2.1. Transformée de Laplace de la fonction échelon unitaire $u(t)$ définie par:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[u(t)\right] &= \int_0^\infty e^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{p}\left[0-1\right] = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Exemple 2.2. Transformée de Laplace de la fonction exponentielle définie par:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[f(t)\right] &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{p}e^{-(p+\alpha)t}\right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{p+\alpha}\left[0-1\right] = \frac{1}{p+\alpha} \end{aligned}$$

2.2 Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformée de Laplace) les transformées de Laplace de certains signaux.

2.2.1 Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration. Il s'agit là, malgré des apparences de simplicité, d'une des propriétés les plus importantes. Soit $F(p)$ et $G(p)$ les transformées de Laplace des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ respectivement

$$\mathscr{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha F(p) + \beta G(p) \tag{2.3}$$

résultat des propriétés d'additivité de d'homogénéité

$$\mathscr{L}\left[f(t) + g(t)\right] = F(p) + G(p) \tag{2.4}$$

$$\mathscr{L}\left[\alpha f(t)\right] = \alpha F(p) \tag{2.5}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] &= \int_0^\infty \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \alpha \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t + \beta \int_0^\infty g(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \alpha F(p) + \beta G(p)
\end{aligned}$$

2.2.2 Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction du temps et $F(p)$ sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de $F(p)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\mathscr{L}} pF(p) - f(0)} \tag{2.6}$$

De même, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n est:

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} \xrightarrow{\mathscr{L}} p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0) \tag{2.7}$$

Par exemple:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} \xrightarrow{\mathscr{L}} p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \tag{2.8}$$

Démonstration

En utilisant l'intégration par partie:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f'(t)\right] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= 0 - f(0) + pF(p) \\
&= F(p) - f(0)
\end{aligned}$$

Une première constatation s'impose en observant ces expressions: la transformation de Laplace transforme l'opérateur dérivation en un opérateur arithmétique. Il faut noter que l'on retrouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est–à–dire les valeurs en $t = 0$ des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré.

Remarque: Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui est a priori très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\mathscr{L}} pF(p); \qquad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} \rightarrow p^n F(p) \tag{2.9}$$

2.2.3 Dérivée de la transformée

Soit $f(t)$ une fonction du temps et $F(p)$ sa transformée de Laplace. Alors

$$tf(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} -\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} \tag{2.10}$$

De même, la dérivée d'ordre n de la transformée de Laplace vérifie:

$$t^n f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(p)}{\mathrm{d}p^n} \tag{2.11}$$

Démonstration

$$\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^\infty tf(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p}$$

Alors

$$\mathscr{L}\left[tf(t)\right] = -\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p}$$

2.2.4 Transformée de Laplace d'une primitive

Soit $g(t)$ la primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(p)$ la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$\mathscr{L}\left[g(t) = \int f(t)\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p} \tag{2.12}$$

Là encore, l'opérateur intégration se trouve changé en un opérateur arithmétique dans l'espace des transformées de Laplace.

Démonstration

$$\begin{aligned} G(p) &= \int_0^\infty g(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{p}g(t)e^{-pt}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{g(0)}{p} + \frac{F(p)}{p} \end{aligned}$$

Remarque : Dans le cas où la condition initiale $g(0)$ est nulle, ce qui est a priori très souvent le cas, on peut retenir simplement la relation suivante:

$$\mathscr{L}\left[g(t) = \int f(t)\mathrm{d}t\right] \frac{F(p)}{p} \tag{2.13}$$

2.2.5 Propriétés de changement d'échelle

$$\mathscr{L}\left[f(\alpha t)\right] = \frac{1}{\alpha}F(\frac{1}{\alpha}p) \tag{2.14}$$

Démonstration

$$\mathscr{L}\left[f(\alpha t)\right] = \int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

On utilise le changement de variable $\tau = \alpha t$

$$\tau = \alpha t \Rightarrow \mathrm{d}\tau = \alpha \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\tau}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f(\alpha t)\right] &= \int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\alpha}t}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-p't}\mathrm{d}\tau \qquad p' = \frac{\alpha}{-}p \\
&= \frac{1}{\alpha}F(p')
\end{aligned}$$

On remplace p'

$$\mathscr{L}\left[f(\alpha t)\right] = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{1}{\alpha}p\right)$$

2.2.6 Théorème du retard

Soit la fonction $f(t)$ et sa transformée de Laplace $F(p)$ alors:

$$\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-p\tau}F(p) \tag{2.15}$$

Démonstration

$$\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

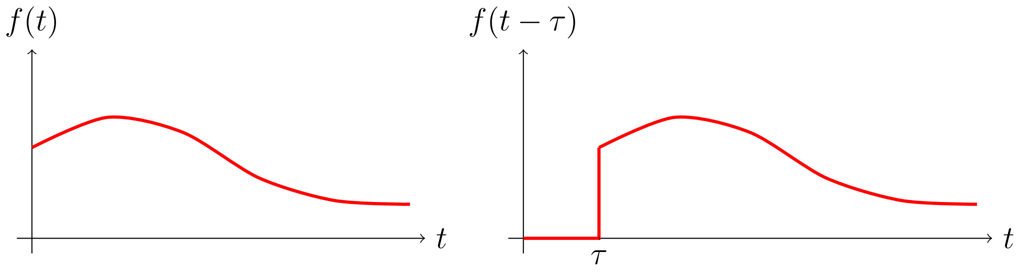


FIGURE 2.1 – Représentation temporelle d'un signal retardé

On pose $t' = t - \tau$ alors $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$, $t \to \infty \Rightarrow t' \to \infty$ et $t = 0 \Rightarrow t' = -\tau$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] &= \int_{-\tau}^{\infty} f(t')e^{-p(t'+\tau)}\mathrm{d}t' \\
&= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0} f(t')e^{-pt'}\mathrm{d}t' + e^{-p\tau}\int_{0}^{\infty} f(t')e^{-pt'}\mathrm{d}t' \\
&= e^{-p\tau}\int_{0}^{\infty} f(t')e^{-p'}\mathrm{d}t', \qquad \text{puisque } f(t') = 0 \text{ pour } t < 0 \\
&= e^{-p\tau}F(p)
\end{aligned}$$

2.2.7 Décalage fréquentiel

Soit la fonction $f(t)$ et sa transformée de Laplace $F(p)$ alors:

$$e^{-\alpha t}f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p+\alpha) \tag{2.16}$$

Démonstration

$$\mathscr{L}\left[e^{-\alpha t}f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p\alpha)t}\mathrm{d}t$$

En appliquant le changement de variable $p' = p + \alpha$:

$$\mathscr{L}\left[e^{-\alpha t}f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-p't}\mathrm{d}t = F(p')$$

On remplaçant p' par $p + \alpha$ alors

$$e^{-\alpha t}f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p+\alpha) \tag{2.17}$$

2.2.8 Théorème de la valeur initiale

Soit la fonction $f(t)$ et sa transformée de Laplace $F(p)$ alors, si les limites existent:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p) \tag{2.18}$$

Démonstration

La transformée de Laplace de la dérivée :

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right] = pF(p) - f(0), \qquad \mathscr{L}\left[f'(t)\right] = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

alors

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \lim_{p\to\infty}\left(pF(p) - f(0)\right)$$

or

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = 0$$

alors

$$\lim_{p\to\infty}\left(pF(p) - f(0)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} pF(p) - f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

2.2.9 Théorème de la valeur finale

Soit la fonction $f(t)$ et sa transformée de Laplace $F(p)$ alors:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p) \tag{2.19}$$

Démonstration

La transformée de Laplace de la dérivée f' d'une fonction f est donnée par:

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right] = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

et d'autre part on a:

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right] = pF(p) - f(0)$$

Alors

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = pF(p) - f(0)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\mathrm{d}t &= \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0)\\
\int_0^\infty f'(t)\mathrm{d}t &= \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0)\\
\left[f(t)\right]_0^\infty &= \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0)
\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$:Impulsion	1
$u(t)$: Echelon	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

Table 2.1 – Tableau des transformées de Laplace

2.2.10 Produit de convolution

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions intégrables $f(t)$ et $g(t)$ noté $f * g$ et défini par:

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{2.20}$$

est égale au produit des deux transformée de Laplace.

$$\mathscr{L}[f * g] = \mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau\right] = F(p)G(p) \tag{2.21}$$

2.3 Transformée de Laplace des signaux usuels

2.3.1 Échelon unitaire

L'échelon unitaire noté $u(t)$ et représenté par la figure 2.3 est défini par:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est:

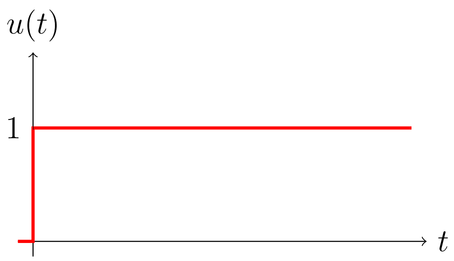


FIGURE 2.2 – Échelon unitaire

$$\boxed{\mathscr{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{p}} \tag{2.23}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, un échelon d'amplitude A a pour transformée de Laplace:

$$\mathscr{L}\left[Au(t)\right] = \frac{A}{p} \tag{2.24}$$

2.3.2 Rampe ou échelon de vitesse

La rampe ou l'échelon de vitesse, notée $r(t)$, est l'intégrale de la fonction échelon unitaire

$$r(t) = t \cdot u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

La transformée de Laplace de la rampe est alors

$$\boxed{\mathscr{L}\left[r(t)\right] = \frac{1}{p^2}} \tag{2.26}$$

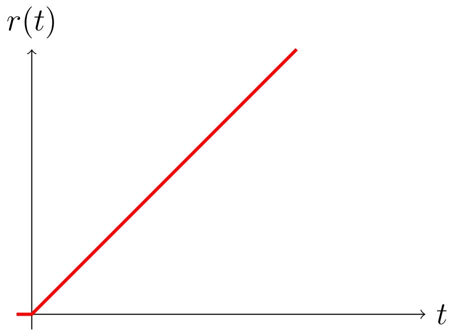


FIGURE 2.3 – Rampe

2.3.3 Impulsion unitaire

L'impulsion unitaire ou impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$, est obtenue par la dérivation de l'échelon unitaire et elle est nulle pour $t \neq 0$ et elle a une valeur infinie à $t = 0$. Elle est caractérisée par:

$$\int_0^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1, \qquad \Delta(p) = \mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = 1 \tag{2.27}$$

Pour calculer la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac, on l'approche par une

FIGURE 2.4 – Impulsion unitaire

impulsion rectangulaire, figure 2.5, de durée τ et d'amplitude $1/\tau$. L'impulsion de Dirac est obtenue lorsque τ tend vers zéro.

$$\Delta(p) = \mathscr{L}\left[\delta(t)\right] = \lim_{\tau \to 0} \mathscr{L}\left[\mathrm{rec}(t)\right] \tag{2.28}$$

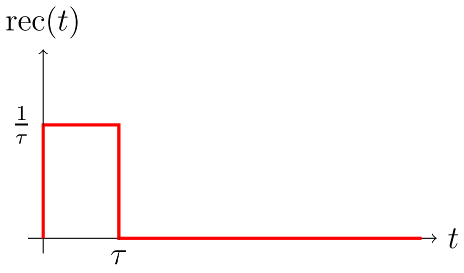


FIGURE 2.5 – Modèle de l'impulsion unitaire

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\mathrm{rec}(t)\right] &= \int_0^{\infty} \mathrm{rec}(t) e^{-pt} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-pt} \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{\tau p} e^{-pt}\right]_0^{\tau} \\
&= \frac{1}{\tau p}\left(1 - e^{-\tau p}\right)
\end{aligned}$$

$$\Delta(p) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau p}\left(1 - e^{-\tau p}\right) \tag{2.29}$$

On pose $x = -\tau p$ alors

$$\Delta(p) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{2.30}$$

2.3.4 Signal sinusoidal

Soit le signal sinusoidal $s(t)$ défini par:

$$s(t) \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

En utilisant l'intégration par parties:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[s(t)\right] &= \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-pt} \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \sin \omega t\right]_0^{\infty} + \frac{\omega}{p} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-pt} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{p} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-pt} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On utilise l'intégration par parties une deuxième fois:

$$\begin{aligned}
S(p) &= \frac{\omega}{p}\int_0^{\infty}\cos\omega t e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{\omega e^{-pt}}{p^2}\cos\omega t\right]_0^{\infty} - \frac{\omega^2}{p^2}\int_0^{\infty}\sin\omega t e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2}\int_0^{\infty}\sin\omega t e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2}S(p)
\end{aligned}$$

$$S(p) = \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2}S(p) \Rightarrow S(p)\left(p^2+\omega^2\right) = \omega \tag{2.32}$$

Alors

$$\boxed{\mathscr{L}\left[\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}} \tag{2.33}$$

On peut obtenir facilement ce résultat en utilisant la relation:

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \tag{2.34}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[\sin\omega t\right] &= \mathscr{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\mathscr{L}\left[e^{j\omega t}\right] - \frac{1}{2j}\mathscr{L}\left[e^{-j\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right) \\
&= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

2.4 Transformée de Laplace inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(p)$ de retrouver son original, autrement dit la fonction $f(t)$ dont elle est la transformée de Laplace. Il s'agit ici de calculer une intégrale dans le plan complexe:

$$\text{Si:} \qquad f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(p) \tag{2.35}$$

alors:

$$f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt}\mathrm{d}p \tag{2.36}$$

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante c supérieure au seuil de convergence γ de $F(p)$.

Remarque: Les cas où il faudra effectivement calculer une transformée de Laplace inverse à l'aide de cette expression sont extrêmement rares: nous verrons plus loin, qu'en général, il suffit de connaître une dizaine de transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales pour retrouver l'original d'une fonction $F(p)$.

2.4.1 Décomposition en fractions simples

Considérons la fonction

$$F(p) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} \tag{2.37}$$

avec $a_n = 1$ et $n \geq m$. L'équation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i = 0 \tag{2.38}$$

admet n racines. Certaines racines peuvent être multiples.

La fonction rationnelle $F(p)$ peut être écrite sous la forme:

$$F(p) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\prod\limits_{i=1}^{r} (p + p_i)^{n_i}} \tag{2.39}$$

L'expansion de la fonction rationnelle $F(p)$ en fractions simples

$$F(p) = b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(p + p_i)^k} \tag{2.40}$$

où $b_n = 0$ sauf dans le cas où $m = n$. Les coefficients c_{ik} sont donnés par:

$$c_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{\mathrm{d}^{n_i - k}}{\mathrm{d}p^{n_i - k}} \left[(p + p_i)^{n_i} F(p) \right] \Big|_{p=-p_i} \tag{2.41}$$

Les coefficients c_{ik}, $i = 1, 2, ..., r$, sont appelés les résidus de la fonction $F(p)$ aux points $-p_i$, $i = 1, 2, ..., r$.
Si les pôles sont simples alors:

$$F(p) = b_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i1}}{p + p_i} \tag{2.42}$$

$$c_{i1} = (p + p_i) F(p)\big|_{p=-p_i}, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.43}$$

Dans le cas des pôles complexes, puisque les coefficients du numérateur et du numérateur sont réels, le conjugué de chaque pôle complexe et aussi un pôle et leurs coefficients sont conjugués.

Exemple 2.3. Soit la fonction:

$$F(p) = \frac{2p+1}{p(p^2+3p+2)}$$

Alors

$$F(p) = \frac{2p+1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{c_{11}}{p} + \frac{c_{21}}{p+1} + \frac{c_{31}}{p+2}$$

avec:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= pF(p)|_{p=0} = \left.\frac{2p+1}{(p+1)(p+2)})\right|_{p=0} = \frac{1}{2} \\
c_{21} &= (p+1)F(p)|_{p=-1} = \left.\frac{2p+1}{p(p+2)})\right|_{p=-1} = 1 \\
c_{31} &= (p+2)F(p)|_{p=-2} = \left.\frac{2p+1}{p(p+1)})\right|_{p=-2} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

alors

$$F(p) = \frac{12}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{\frac{3}{2}}{p+2}$$

Exemple 2.4. Soit la fonction:

$$F(p) = \frac{p^2+2}{p(p+1)^3}$$

$$F(p) = \frac{c_{11}}{p} + \frac{c_{21}}{p+1} + \frac{c_{22}}{(p+1)^2} + \frac{c_{23}}{(p+1)^3}$$

avec:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= pF(p)|_{p=0} = \left.\frac{p^2+2}{(p+1)^3}\right|_{p=0} = 2 \\
c_{23} &= (p+1)^3F(p)|_{p=-1} = \left.\frac{p^2+2}{p}\right|_{p=-1} = -3 \\
c_{22} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[(p+1)^3F(p)\right]\Big|_{p=-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[p+\frac{2}{p}\right]\Bigg|_{p=-1} = 1 - \left.\frac{2}{p^2}\right|_{p=-1} = -1 \\
c_{21} &= \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[(p+1)^3F(p)\right]\Big|_{p=-1} = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[p+\frac{2}{p}\right]\Bigg|_{p=-1} = \left.\frac{2}{p^3}\right|_{p=-1} = -2
\end{aligned}$$

$$F(p) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{3}{(p+1)^3}$$

Exemple 2.5. Soit la fonction:

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p - 2}{p(p^2 + 2p + 2)}$$

$$p^2 + 2p + 2 = 0 \Rightarrow p = -1 \pm j$$

Alors

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p - 2}{p(p + 1 - j)(p + 1 + j)} = \frac{c_{11}}{p} + \frac{c_{21}}{p + 1 - j} + \frac{c_{31}}{p + 1 + j}$$

avec:

$$\begin{aligned} c_{11} &= pF(p)\big|_{p=0} = \left.\frac{p^2 + 2p - 2}{p^2 + 2p + 2}\right|_{p=0} = -1 \\ c_{21} &= (p + 1 - j)F(p)\big|_{p=-1+j} = \left.\frac{p^2 + 2p - 2}{p(p + 1 + j)}\right|_{p=-1+j} = 1 - j \\ c_{31} &= (p + 1 + j)F(p)\big|_{p=-1-j} = \left.\frac{p^2 + 2p - 2}{p(p + 1 - j)}\right|_{p=-1-j} = 1 + j \end{aligned}$$

alors

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1 - j}{p + 1 - j} + \frac{1 + j}{p + 1 + j}$$

Lorsque les pôles sont complexes, on préfère ne pas utiliser l'expansion en fractions simples, il est plus pratique de rassembler les pôles conjugués en un seul terme.

$$\begin{aligned} \frac{c_{i1}}{p + p_i} + \frac{\bar{c}_{i1}}{p + \bar{p}_i} &= \frac{c_{i1}(p + \bar{p}_i) + \bar{c}_{i1}(p + p_i)}{(p + p_i)(p + \bar{p}_i)} \\ &= \frac{(c_{i1} + \bar{c}_{i1})\,p + c_{i1}\bar{p}_i + \bar{c}_{i1}p_i}{(p + p_i)(p + \bar{p}_i)} \end{aligned}$$

On pose $p_i = \sigma + j\omega$ et $c_{i1} = \alpha + j\beta$ alors

$$\begin{aligned} \frac{c_{i1}}{p + p_i} + \frac{\bar{c}_{i1}}{p + \bar{p}_i} &= \frac{2\alpha p + (\alpha + j\beta)(\sigma - j\omega) + (\alpha - j\beta)(\sigma + j\omega)}{(p + \sigma + j\omega)(p + \sigma - j\omega)} \\ &= \frac{2\alpha p + 2(\alpha\sigma + \beta\omega)}{(p + \sigma)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{c_{i1}}{p + p_i} + \frac{\bar{c}_{i1}}{p + \bar{p}_i} = \frac{Ap + B}{(p + \sigma)^2 + \omega^2}$$

Les coefficients A et B sont déterminés à partir de c_{i1} et p_i, comme on peut les déterminer en formulant un système à deux équations et deux inconnues.

Exemple 2.6. Soit la fonction de l'exemple précédent:

$$F(p) = \frac{p^2+2p-2}{p(p^2+2p+2)}$$

Le terme p^2+2p+2 peut être écrit sous la forme $p^2+2p+1+1 = (p+1)^2+1$.

$$F(p) = \frac{c_{11}}{p} + \frac{Ap+B}{(p+1)^2+1}$$

avec:

$$c_{11} = pF(p)|_{p=0} = \left.\frac{p^2+2p-2}{p^2+2p+2}\right|_{p=0} = -1$$

Alors

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{Ap+B}{(p+1)^2+1}$$

$$F(p) = -\frac{(p+1)^2+1+Ap^2+Bp}{p\left[(p+1)^2+1\right]} = \frac{(A-1)p^2+(B-2)p-2}{p\left[(p+1)^2+1\right]}$$

On obtient un système à deux équations:

$$\begin{cases} A-1=1 \\ B-2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=4 \end{cases}$$

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{2p+4}{(p+1)^2+1}$$

2.4.2 La transformée de Laplace inverse en utilisant la décomposition en fractions simples

La transformée de Laplace inverse d'une fonction rationnelle $F(p)$ est

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[b_n + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(p+p_i)^k}\right] = b_n\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-p_it} \tag{2.44}$$

où $\delta(t)$ est l'impulsion unitaire et $b_n = 0$ sauf lorsque $m = n$. Lorsque les pôles sont simples et réels alors

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}\right] = b_n\delta(t) + \sum_{i=1}^{n} c_{i1}e^{-p_it} \tag{2.45}$$

Exemple 2.7. Soit la fonction $F(p)$:

$$F(p) = \frac{8}{p^3\,(p+2)}$$

En utilisant la décomposition en fractions simples:

$$F(p) = \frac{c_{11}}{p} + \frac{c_{12}}{p^2} + \frac{c_{13}}{p^3} + \frac{c_{21}}{p+2}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= p^3F(p)\big|_{p=0} = \left.\frac{8}{p+2}\right|_{p=0} = 4 \\
c_{12} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[p^3F(p)\right]\right|_{p=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{8}{p+2}\right]\right|_{p=0} = -\left.\frac{8}{(p+2)^2}\right|_{p=0} = -2 \\
c_{13} &= \left.\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[p^3F(p)\right]\right|_{p=0} = \left.\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[\frac{8}{p+2}\right]\right|_{p=0} = \left.\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{(p+2)^3}\right|_{p=0} = 1 \\
c_{21} &= (p+2)F(p)\big|_{p=-2} = \left.\frac{8}{p^3}\right|_{p=-2} = -1
\end{aligned}$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{4}{p^3} - \frac{1}{p+2}$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{p^3}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] \\
&= u(t) - 2t + 2t^2 - e^{-2t}
\end{aligned}$$

2.5 Résolution d'équations différentielles

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_m\frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} u}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u(t) \quad (2.46)$$

qu'on peut écrire sous la forme:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}t^k} \quad (2.47)$$

On pose:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0} = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \quad (2.48)$$

et

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=0} = u_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, ..., m-1 \quad (2.49)$$

où $y_0^{(k)}, k = 0, 1, ..., n-1$ et $u_0^{(k)}, k = 0, 1, ..., m-1$ sont des constantes.
En utilisant la transformée de Laplace de la dérivée:

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right] = p^n Y(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-i-1} y_0^{(i)} \tag{2.50}$$

L'application de la transformée de Laplace sur l'équation différentielle 2.47 donne

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(p^i Y(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-k-1} y_0^{(k)}\right)\right] = \sum_{i=0}^{m}\left[b_i\left(p^i U(p) - \sum_{k=0}^{i-1} p^{i-k-1} u_0^{(k)}\right)\right] \tag{2.51}$$

La transformée de Laplace de la sortie est donnée par:

$$Y(p) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} U(p) - \frac{\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{i-1} b_i p^{i-k-1} u_0^{(k)}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} + \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-k-1} y_0^{(k)}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} \tag{2.52}$$

Le dénominateur

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 \tag{2.53}$$

est le polynôme caractéristique de l'équation différentielle 2.46.
La solution $y(t)$ de l'équation différentielle 2.46 est égale à la transformée de Laplace inverse de $Y(p)$ donnée par l'équation 2.52

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} U(p) - \frac{\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{i-1} b_i p^{i-k-1} u_0^{(k)}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{i-1} a_i p^{i-k-1} y_0^{(k)}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i}\right] \tag{2.54}$$

Le premier terme du côté droit de l'équation 2.54 est la réponse forcée du système décrit par l'équation 2.46 et le second terme est la réponse libre due aux conditions initiales.

Exemple 2.8. Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2e^{-4t} \qquad \text{avec } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

En appliquant la transformée de Laplace

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left[y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)\right] = \mathscr{L}\left[2e^{-4t}\right] \\
&\mathscr{L}\left[y''(t)\right] + 3\mathscr{L}\left[y'(t)\right] + 2\mathscr{L}\left[y(t)\right] = \frac{2}{p+4} \\
&p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 3\left(pY(p) - y(0)\right) + 2Y(p) = \frac{2}{p+4} \\
&\left(p^2 + 3p + 2\right) Y(p) - py(0) - y'(0) - 3y(0) = \frac{2}{p+4} \\
&\left(p^2 + 3p + 2\right) Y(p) = \frac{2}{p+4} + py(0) + y'(0) + 3y(0)
\end{aligned}$$

Alors

$$Y(p) = \frac{2}{(p+4)\left(p^2+3p+2\right)} + \frac{py(0)+y'(0)+3y(0)}{p^2+3p+2}$$

$$Y(p) = \frac{2}{(p+4)(p+1)(p+2)} + \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} \qquad Y(p) = \frac{p^2+7p+14}{(p+4)(p+1)(p+2)}$$

La décomposition en fractions simples de $Y(p)$ donne:

$$Y(p) = \frac{c_{11}}{p+4} + \frac{c_{21}}{p+2} + \frac{c_{31}}{p+1}$$

avec

$$c_{11} = \left.\frac{p^2+7p+14}{(p+1)(p+2)}\right|_{p=-4} = \frac{1}{3}$$

$$c_{21} = \left.\frac{p^2+7p+14}{(p+4)(p+1)}\right|_{p=-2} = -2$$

$$c_{31} = \left.\frac{p^2+7p+14}{(p+4)(p+2)}\right|_{p=-1} = \frac{8}{3}$$

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{3}}{p+4} - \frac{2}{p+2} + \frac{\frac{8}{3}}{p+1}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{p+4}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{p+2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\frac{8}{3}}{p+1}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-4t} - 2e^{-2t} + \frac{8}{3}e^{-t}$$

Exemple 2.9. Considérons l'équation différentielle suivante:

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = u(t) \qquad \text{avec } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$u(t)$ est l'échelon unitaire.
En appliquant la transformée de Laplace

$$\mathscr{L}\left[y''(t) + 2y'(t) + 2y(t)\right] = \mathscr{L}\left[u(t)\right]$$

$$\mathscr{L}\left[y''(t)\right] + 2\mathscr{L}\left[y'(t)\right] + 2\mathscr{L}\left[y(t)\right] = \frac{1}{p}$$

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2\left(pY(p) - y(0)\right) + 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$\left(p^2+2p+2\right)Y(p) - py(0) - y'(0) - 2y(0) = \frac{1}{p}$$

$$\left(p^2+2p+2\right)Y(p) = \frac{1}{p} + py(0) + y'(0) + 2y(0)$$

Alors

$$\begin{aligned}
Y(p) &= \frac{1}{p\left(p^2+2p+2\right)} + \frac{py(0)+y'(0)+2y(0)}{p^2+2p+2} \\
Y(p) &= \frac{1}{p\left(p^2+2p+2\right)} + \frac{p+2}{p^2+2p+2} \\
Y(p) &= \frac{p^2+2p+1}{p\left(p^2+2p+2\right)} \\
Y(p) &= \frac{p^2+2p+1}{p\left((p+1)^2+1\right)}
\end{aligned}$$

La décomposition en fractions simples de $Y(p)$ donne:

$$Y(p) = \frac{c_{11}}{p} + \frac{Ap+B}{(p+1)^2+1}$$

avec

$$c_{11} = \left.\frac{p^2+2p+1}{(p+1)^2+1}\right|_{p=0} = \frac{1}{2}$$

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{2}}{p} + \frac{Ap+B}{(p+1)^2+1} = \frac{Ap^2+Bp+\frac{1}{2}p^2+p+1}{p\left((p+1)^2+1\right)} = \frac{\left(A+\frac{1}{2}\right)p^2+(B+1))\,p+1}{p\left((p+1)^2+1\right)}$$

alors

$$\begin{cases} A+\frac{1}{2}=1 \\ B+1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
Y(p) &= \frac{\frac{1}{2}}{p} + \frac{\frac{1}{2}p+1}{(p+1)^2+1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{p} + \frac{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(p+1)^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2+1}
\end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right] + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^2+1}\right] \\
y(t) &= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin t \\
y(t) &= \frac{1}{2}\left[u(t)+e^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)\right]
\end{aligned}$$

2.6 Exercices

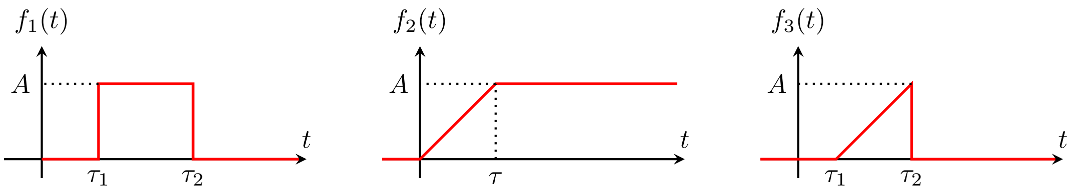
Exercice 2.1. Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes, nulles pour $t < 0$:

1. $f_1(t) = 4\left(1 - e^{-2t}\right)$, 2. $f_2(t) = 2t + 1$,
3. $f_3(t) = 2te^{-3t}$, 4. $f_4(t) = 5\sin\omega t$

Exercice 2.2. En appliquant les propriétés de la transformée de Laplace, déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes:

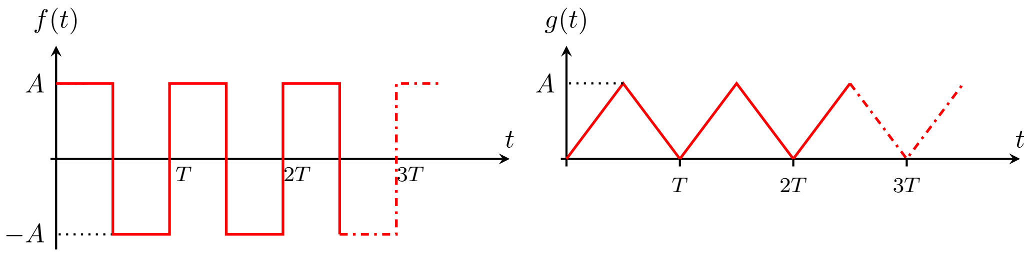
1. $f_1(t) = 2t\sin 3t$ 2. $f_2(t) = 4e^{-t}\sin 2t$
3. $f_3(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ 4. $f_4(t) = \cos\omega t \cosh\omega t$

Exercice 2.3. Déterminer la transformée de Laplace des fonctions données par les figures suivantes:



Exercice 2.4.

1. Déterminer la transformée de Laplace de la fonctions $f(t)$ donnée par la figure suivante:



2. En déduire la transformée de Laplace de la fonction $g(t)$.

Exercice 2.5. Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes:

1. $F_1(p) = \dfrac{2p+1}{p\,(p^2+3p+2)}$, 2. $F_2(p) = \dfrac{p^2+6p+10}{(p+2)^3}$,
3. $F_9(p) = \dfrac{2p-1}{p^2+2p+5}e^{-2t}$, 4. $F_{10}(p) = \dfrac{p^3}{p^4+4\omega^4}$

Exercice 2.6. En utilisant la transformée de Laplace déterminer la solution des équations différentielles suivantes:

1. $y'(t) + y(t) = e^{-2t}$, avec $y(0) = 1$.
2. $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2u(t)$, avec $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
3. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$, avec $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
4. $y''(t) + 4y(t) = 5u(t)$, avec $y(0) = 5,\ y'(0) = 1$
5. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4u(t)$, avec $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
6. $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2e^{3t}$, avec $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
7. $y''(t) - y(t) = 2e^{2t}$, avec $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Exercice 2.7. Déterminer la solutions des systèmes d'équations différentielles suivants:

1.
$$\begin{cases} y_1'(t) + 4y_1(t) = -2y_2(t) \\ y_2'(t) + y_2(t) = y_1(t) \end{cases}$$
avec $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$.

2.
$$\begin{cases} y_1'(t) + 3y_1(t) = 4y_2(t) \\ y_2'(t) - 2y_2(t) = -y_1(t) \end{cases}$$
avec $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$