Chapitre 4

Analyse dans le domaine temporel

4.1 Introduction

Lors de la conception d'un correcteur pour un système donné, une attention particulière doit être accordée à la qualité de la réponse en fonction du temps. Selon l'intérêt de l'application, l'importance doit être accordée soit au régime permanent soit au régime transitoire, soit aux deux. En général, on cherche à donner au système asservi le temps de réponse le plus court possible tout en respectant les contraintes imposées et un dépassement acceptable. Dans ce chapitre, nous présentons les techniques d'analyse des systèmes linéaires dans le domaine du temps. Ces techniques servent principalement à déterminer les performances du système asservi considéré. En général, de telles performances se classent en deux catégories :

- Les performances du régime transitoire parfois appelées performances dynamiques,
- Les performances du régime permanent.

Pour une structure donnée de système en boucle fermée, on cherche principalement à montrer comment elle affecte les performances. De même, on montre comment ces performances peuvent être mesurées. Le choix des correcteurs qui assurent des spécifications données est traité un peu plus loin dans ce cours.

4.2 Signaux d'entrée types

Ces signaux sont plus particulièrement utilisés de fait de la simplicité de leur représentation mathématique. Ce type de signal a la caractéristique de soumettre le système à des oscillations plus ou moins brusques et progressives. Ils permettent ainsi d'étudier les performances transitoires de la réponse des systèmes.

Impulsion de Dirac: L'impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$, est définie pat:

$$\delta(t) = \int_0^\infty \delta(t)\mathrm{d}t = 1, \qquad \delta(t) = 0, \text{ pour } t \neq 0 \tag{4.1}$$

Échelon unitaire: L'échelon unitaire, notée $u(t)$ appelé aussi fonction de Heavyside est donné par:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Échelon de vitesse (rampe unitaire): Le signal rampe unitaire, notée $r(t)$ est donné par:

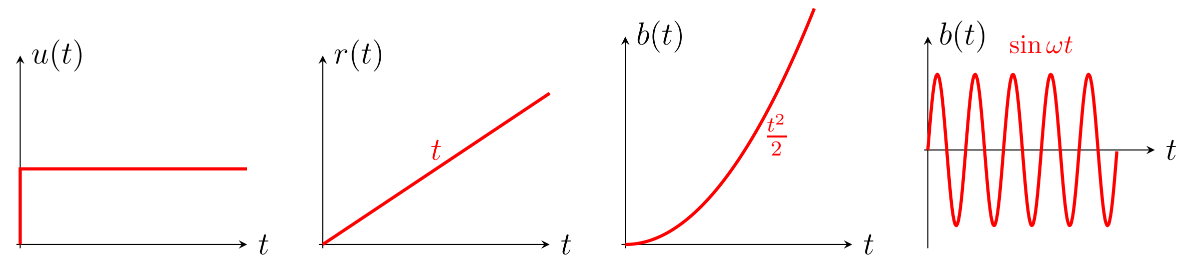
$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Échelon d'accélération (Parabole unitaire): Le signal échelon d'accélération, notée $b(t)$ est donné par:

$$b(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Signal sinusoidal:

$$b(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases} \tag{4.5}$$



a-Échelon unitaire b-Échelon de vitesse c-Échelon d'accélération d-Signal sinusoidal

Figure 4.1 – Signaux élémentaires

4.3 Réponse transitoire et Réponse permanente

Dans le problème d'analyse des systèmes, une entrée de référence est appliquée au système et les performances du systèmes sont évaluées en étudiant la réponse du système dans le domaine temporel. Par exemple, si l'objectif du système de commande est que la variable de sortie suit le signal d'entrée de référence, partant de certaines conditions initiales, il est nécessaire de faire une comparaison entre l'évolution temporelle de l'entrée et la sortie. Dans la plupart des problèmes de commande, l'évaluation finale des performances est basée en général sur les réponses temporelles.

La réponse temporelle d'un système est divisée en deux parties: la réponse transitoire et la réponse permanente. Soit $y(t)$ la réponse temporelle d'un système continu; alors, en général, cette réponse peut être écrite sous la forme:

$$y(t) = y_t(t) + y_p(t) \tag{4.6}$$

où $y_t(t)$ est la réponse transitoire et $y_p(t)$ la réponse permanente.

4.3.1 Réponse transitoire

En automatique, la réponse transitoire est définie comme la partie de la réponse qui tend vers zéro lorsque le temps devient très grand. Alors, $y_t(t)$ possède la propriété

$$\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0 \tag{4.7}$$

4.3.2 Réponse permanente

La réponse permanente est la partie de la réponse totale qui reste après l'annulation de la réponse transitoire. La réponse permanente peut rester variante avec une forme fixe comme onde sinusoïdale ou une fonction rampe qui croît avec le temps.

Tout les systèmes asservis stables présentent un phénomène transitoire avant d'atteindre l'état stationnaire. Puisque les inerties, les masses, les condensateurs et les inductances sont inévitables dans les systèmes physiques, alors la réponse d'un système réel ne peut pas suivre instantanément des changements brusques de l'entrée, et un régime transitoire est toujours présent. Alors, la commande du régime transitoire est primordiale, puisqu'il représente une partie significative du comportement dynamique du système, et la déviation entre la réponse et l'entrée où la réponse désirée, avant que l'état stationnaire ne soit atteint, doit être contrôlée.

La réponse permanente où l'état stationnaire d'un système asservi est aussi très importante, puisqu'elle décrit le comportement final de la sortie lorsque le temps devient très grand. En général, si l'état stationnaire de la réponse n'est pas exactement accordé avec la référence désirée, on dit que le système possède une erreur d'état stationnaire.

L'étude des systèmes asservis, dans le domaine temporel, requiert essentiellement l'évaluation des réponses transitoires et permanente du système. Dans les problèmes de synthèse, les spécifications sont souvent données en fonctions des performances du régime transitoire et du régime permanent, et les lois de commande sont déterminées de façon que toutes ces spécifications sont vérifiées.

4.4 Pôles et zéros

Les pôles et les zéros d'un modèle linéaire invariant sont essentiels pour sa caractérisation dynamique. Ils peuvent être définis à partir de la fonction de transfert du système.

Les zéros d'une fonction de transfert sont les valeur de la variable complexe p pour lesquelles la fonction de transfert est nulle.

Les pôles d'une fonction de transfert sont les valeurs de la variable complexe p pour lesquelles la fonction de transfert est infinie.

Les pôles et les zéros d'une fonction de transfert sont représentés par une carte de pôles et zéros. Les zéros sont représentés par des cercles ($\circ$) et les pôles par des croix ($\times$). Ce diagramme donne de l'information sur le type de système et le type de réponse du système, et peut être une façon rapide d'analyse du système.

La figure 4.2 représente le diagramme des pôles et zéros de la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{p+2}{p(p+3)(p^2+2p+2)}$$

4.5 Performances des systèmes asservis

La réponse d'un système donné à une grandeur d'entrée donnée est caractérisée par certaines performances. En général, la réponse d'un système comprend toujours un régime transitoire qui traduit le début de la réponse et un régime permanent qui indique que la réponse a atteint sa valeur finale. Ainsi, les performances se divisent en deux catégories. La première catégorie regroupe les performances propres au régime transitoire et la seconde rassemble les performances qui caractérisent le comportement du système en régime permanent.

L'objectif d'une loi de commande est généralement la réduction de la durée du régime transitoire tout en assurant un régime permanent avec une erreur acceptable.

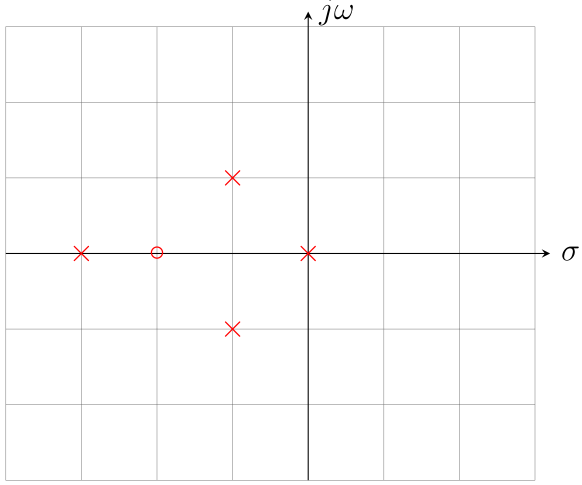


FIGURE 4.2 – Diagramme des pôles et zéros

Les performances d'un systèmes asservi sont généralement déterminées à partir de la réponse du système à une grandeur d'entrée en échelon unitaire. Les critères de performance typiques qui sont utilisés pour caractériser la réponse transitoire d'un système linéaire associé à une grandeur d'entrée en échelon unitaire se résumant au dépassement, au temps de réponse, au temps de montée et au retard.

4.5.1 Temps de montée

Le temps de montée d'un système est le temps mis par sa sortie pour passer de 10% de sa valeur finale à 90% de sa valeur finale.

$$t_r = t_{0.9} - t_{0.1} \tag{4.8}$$

4.5.2 Dépassement maximal

Ce paramètre est spécifique aux systèmes du second ordre dont le coefficient d'amortissement ζ est inférieur à 1. Il caractérise l'amplitude des oscillations de la réponse indicielle, il est défini comme étant la déviation maximale de la grandeur de sortie par rapport à la valeur prise par cette même grandeur de sortie en régime permanent. Il est défini par:

$$D = y_{max} - y(\infty) \tag{4.9}$$

Généralement, le dépassement maximal est calculé en pourcentage relativement à la valeur finale de la sortie:

$$D\% = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100 \tag{4.10}$$

À la déviation maximale correspond un temps appelé temps de pic. Ce temps est généralement désigné par t_p.

Le dépassement maximal est souvent utilisé pour mesurer la stabilité relative d'un système de commande. Un système avec un dépassement élevé est indésirable.

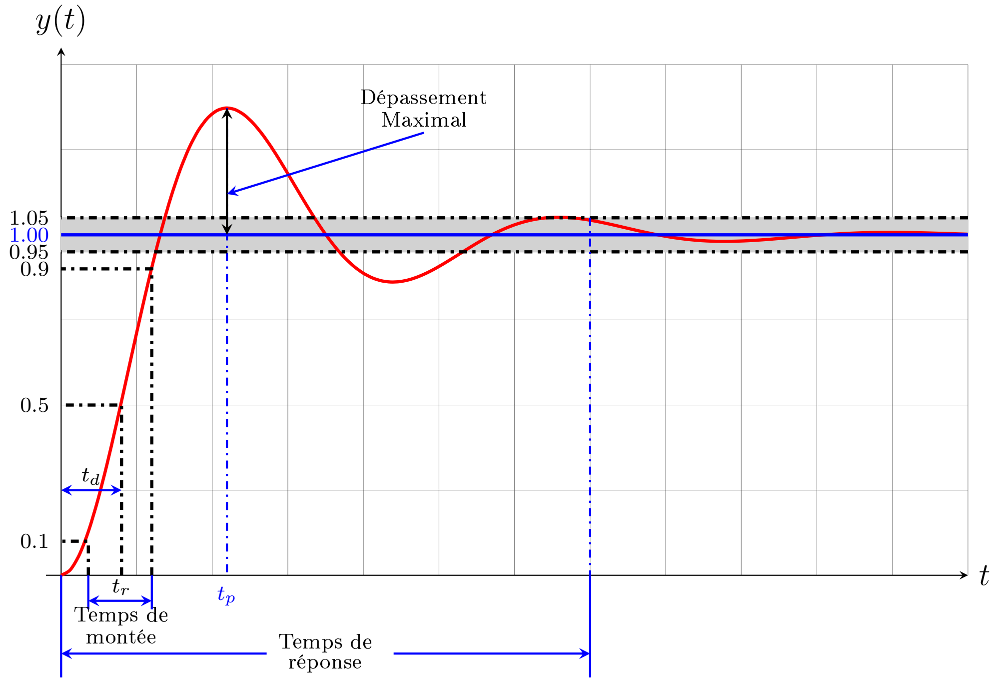


Figure 4.3 – Réponse indicielle typique illustrant les spécifications temporelles

4.5.3 Rapidité

La rapidité est caractérisé par le temps que met le système à réagir à une variation brusque du signal d'entrée. Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique(système stable), on retient alors comme critère principal d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse.

En pratique, on utilise le temps de réponse à 5% appelé aussi temps d'établissement c'est le temps mis par la sortie du système pour entrer dans la bande comprise entre $\pm 5\%$ de sa valeur finale. Un système asservi est d'autant plus rapide que le temps de réponse à 5% est court.

Le temps de réponse à 5% caractérise la durée de la phase transitoire. C'est une des caractéristiques importantes des systèmes asservis. On cherchera souvent à diminuer ce temps de réponse, sans que cela soit au détriment d'autres performances.

4.5.4 Stabilité

On dit qu'un système est stable si, écarté de sa position par une cause extérieure, il revient vers cette position lorsque la cause disparaît.

Un système est stable si pour une entrée bornée la réponse du système reste bornée. le bouclage d'un système peut rendre celui-ci instable.

La réponse d'un système linéaire invariant à une excitation comporte deux composantes:

- un terme stationnaire directement relié à l'entrée.
- un terme transitoire qui est soit exponentiel ou oscillatoire avec une enveloppe de forme exponentielle.

Si les termes exponentiels s'affaiblissent avec le temps alors le système est dit stable. Par contre si les termes exponentiels croient avec le temps alors le système est instable.

a-stable b-instable

Figure 4.4 – Point d'équilibre stable et instable

4.5.5 Précision

La précision qualifie l'aptitude d'un système à atteindre la valeur désirée. Elle est caractérisée par l'erreur $e(t)$ entre la consigne et la valeur de la sortie en régime permanent; on paarle alors de précision statique. Plus l'écart statique est petit plus le système est précis.

4.5.6 Retard

Le retard t_d est défini comme le temps requis pour la réponse indicielle atteint 50 % de sa valeur finale.

4.6 Système du premier ordre

4.6.1 Forme standard

Soit l'équation différentielle du premier ordre:

$$a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_0 x \tag{4.11}$$

En appliquant la transformation de Laplace avec des conditions initiales nulles:

$$a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = b_0 X(p)$$
$$(a_1 p + a_0)\, Y(p) = b_0 X(p)$$

La fonction de transfert du système est alors donnée par:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0}{a_1 p + a_0} \tag{4.12}$$

Pour obtenir la forme standard on divise par a_0

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_1}{a_0} p + 1} \tag{4.13}$$

qui peut être écrite sous la forme:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K}{Tp + 1} \tag{4.14}$$

L'équation 4.14 est la forme standard de la fonction de transfert d'un système du premier ordre. K est le gain statique et T est la constante du temps.

4.6.2 Réponse impulsionnelle du système du premier ordre

La réponse du système du premier ordre à une entrée impulsionnelle d'amplitude égale à A est donnée par:

$$Y(p) = \frac{AK}{1 + Tp} = \frac{AK/T}{p + 1/T} = \frac{AK}{T} \left(\frac{1}{p + 1/T} \right) \tag{4.15}$$

La réponse temporelle, représentée par la figure 4.5, est alors donnée par:

$$y(t) = \frac{AK}{T} e^{-\frac{t}{T}} \tag{4.16}$$

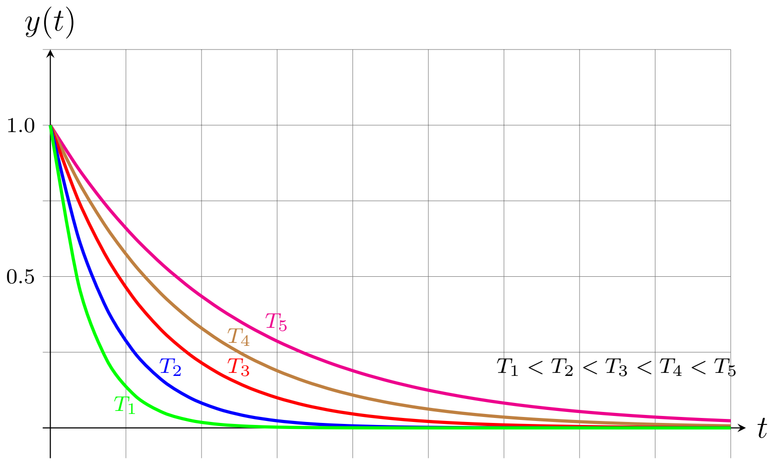


Figure 4.5 – Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre

4.6.3 Réponse indicielle du système du premier ordre

La réponse du système du premier ordre à un échelon unitaire est donnée par:

$$Y(p) = \frac{K}{p\,(1+Tp)} = K\left(\frac{1/T}{p\,(p+1/T)}\right) \tag{4.17}$$

La réponse temporelle, représentée par la figure 4.6, est alors donnée par:

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \tag{4.18}$$

Pour un gain unitaire $K = 1$, la réponse est donnée par:

$$y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \tag{4.19}$$

4.6.4 Réponse d'un système du premier ordre à une rampe

La réponse du système du premier ordre à un échelon unitaire est donnée par:

$$Y(p) = \frac{K}{p^2\,(1+Tp)} = K\left(\frac{1/T}{p^2\,(p+1/T)}\right) \tag{4.20}$$

$$Y(p) = -\frac{KT}{p} + \frac{K}{p^2} + \frac{KT}{p+1/T} \tag{4.21}$$

La réponse temporelle, représentée par la figure 4.7, est alors donnée par:

$$y(t) = K\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right] \tag{4.22}$$

Pour un gain unitaire $K = 1$, la réponse est donnée par:

$$y(t) = t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \tag{4.23}$$

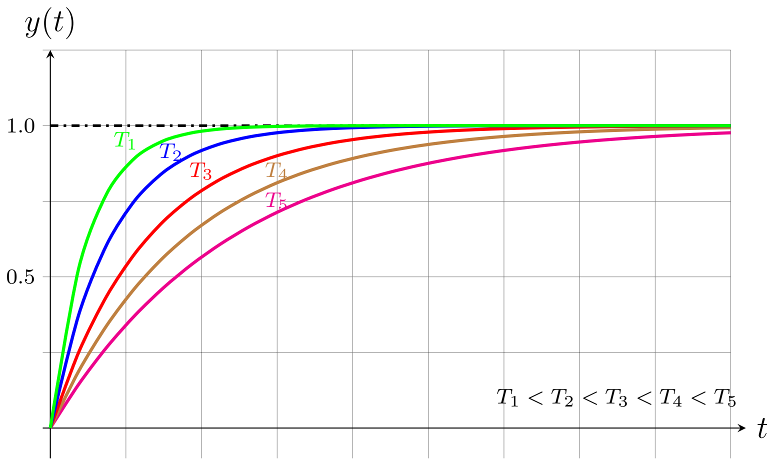


Figure 4.6 – Réponse indicielle d'un système du premier ordre

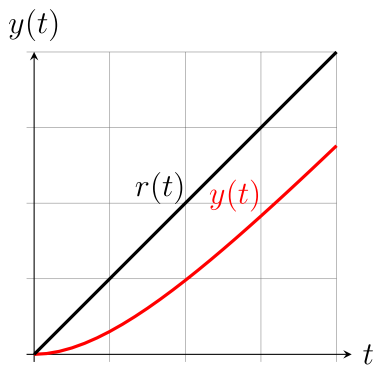


Figure 4.7 – Réponse d'un système du premier ordre à une rampe unitaire

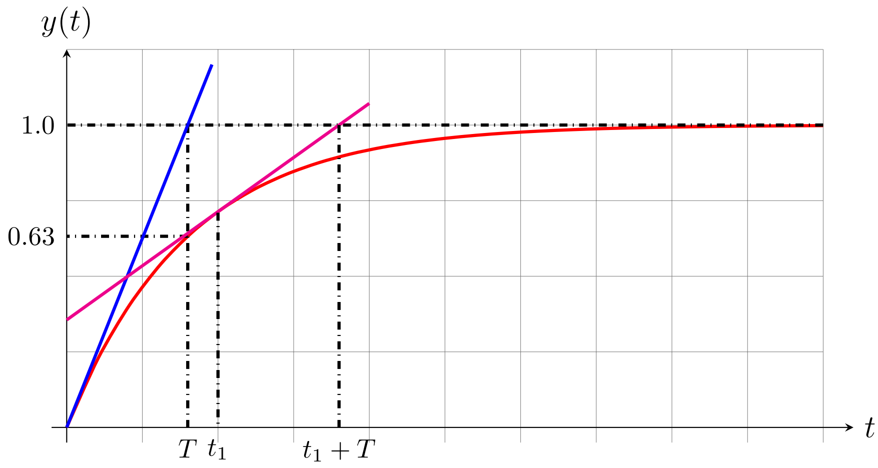


Figure 4.8 – Détermination de la constante de temps à partir de la réponse indicielle d'un système du premier ordre

4.6.5 Détermination expérimentale de la constante du temps à partir de la réponse indicielle

Première méthode: La constante du temps du temps est le temps nécessaire pour atteindre 63.2% de la valeur finale.

Deuxième méthode: La constante du temps correspond à l'instant d'intersection de la tangente à $t = 0$ avec la droite de la valeur finale.

Puisque

$$s(t) = 1 - e^{\frac{-t}{T}} \tag{4.24}$$

alors

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}} \tag{4.25}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{1}{T} \tag{4.26}$$

L'équation de la droite tangente au point zéro est donnée par:

$$y(t) = \frac{t}{T} \Rightarrow y(T) = 1 \tag{4.27}$$

De la même façon la tangente de la réponse à un point d'abscisse t_1 est donnée par:

$$\left.\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} = \frac{1}{T}e^{\frac{-t_1}{T}} \tag{4.28}$$

L'équation de la droite tangente au point d'abscisse t_1 est donnée par:

$$y(t) = \left(\frac{t - t_1}{T} - 1\right)e^{\frac{-t_1}{T}} + 1 \tag{4.29}$$

À l'instant $T + t_1$ on a $y(T + t_1) = 1$, la constante de temps peut être déterminée en traçant la tangente à un point de la réponse d'abscisse t_1. La constante de temps est alors est égale à la différence entre l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec la droite $y(t) = 1$ et t_1.

Formule de Bureau

Si la constante de temps est très grande(cas des systèmes thermiques et hydrauliques), il faut beaucoup de temps pour atteindre la valeur finale. Or, si la valeur finale est inconnue on ne peut pas identifier le système. La formule de Bureau permet de déterminer la valeur finale $y(\infty)$ en n'ayant enregistré qu'une partie de la réponse. Ce temps d'enregistrement est alors divisé en deux, ainsi on peut mesurer la valeur de la sortie à l'instant t_1 et on pose $y_1 = y(t_1)$ et pour $t = 2t_1$ et on pose $y_2 = y(t_2)$.
Alors on a:

$$y_1 = y(\infty)\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right), \qquad \text{et} \qquad y_2 = y(\infty)\left(1 - e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\right) \tag{4.30}$$

alors, d'une part on a

$$y_1^2 = y(\infty)^2\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)^2 = y(\infty)^2\left(1 - 2e^{-\frac{t_1}{\tau}} + e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\right) \tag{4.31}$$

et d'autre part, on a

$$2y_1 - y_2 = 2y(\infty)\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) - y(\infty)\left(1 - e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\right) = y(\infty)\left(1 - 2e^{-\frac{t_1}{\tau}} + e^{-2\frac{t_1}{\tau}}\right) \tag{4.32}$$

Alors $y(\infty)$ peut être déterminée par:

$$y(\infty) = \frac{y_1^2}{2y_1 - y_2} \tag{4.33}$$

D'une façon générale

$$y(\infty) = \frac{y^2(t_1)}{2y(t_1) - y(2t_1)} \tag{4.34}$$

4.7 Système du second ordre

4.7.1 Forme standard

Considérons l'équation différentielle du second ordre:

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{4.35}$$

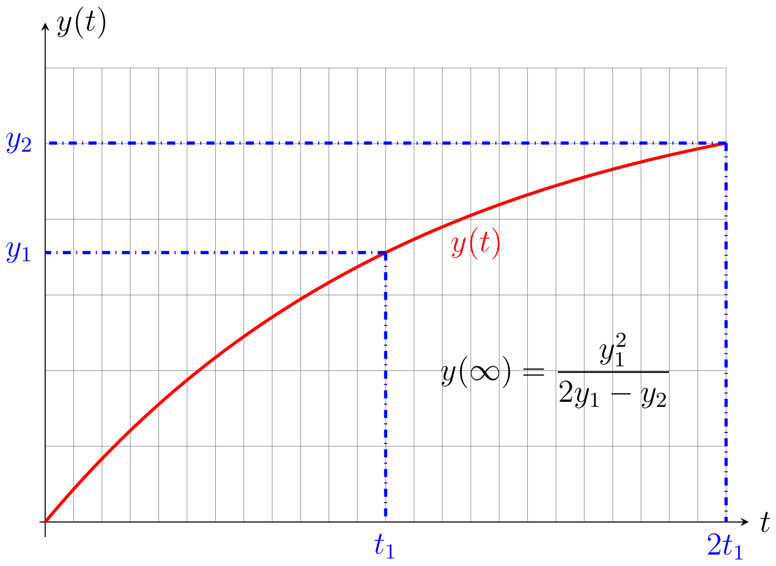


FIGURE 4.9 – Formule de Bureau

En appliquant la transformée de Laplace avec des conditions initiales nulles

$$a_2p^2Y(p) + a_1pY(p) + a_0Y(p) = b_0U(p) \tag{4.36}$$

Alors la fonction de transfert est

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0} \tag{4.37}$$

La forme standard est obtenue en divisant le numérateur et le dénominateur par a_0

$$G(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0}p^2 + \frac{a_1}{a_0}p + 1} \tag{4.38}$$

qui peut être écrite come

$$G(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}p + 1} \tag{4.39}$$

$$G(p) = \frac{K\omega_n}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \tag{4.40}$$

Les équations 4.39 et 4.40 sont la forme standard de la fonction de transfert d'un système du second ordre avec K le gain statique, w_n est la fréquence naturelle du système non amorti et ζ le coefficient d'amortissement.

4.7.2 Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre

La réponse impulsionnelle d'un système de second ordre est donnée par:

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \tag{4.41}$$

Cas $\zeta \geq 1$

Dans le cas $\zeta > 1$, le système possède deux pôles réels négatifs

$$p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\omega_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{4.42}$$

$$Y(p) = \frac{c_{11}}{p + \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)} + \frac{c_{21}}{p + \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)} \tag{4.43}$$

avec

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \left(p + \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)\right) Y(p)\Big|_{p=-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= \left.\frac{K\omega_n^2}{p + \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)}\right|_{p=-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= \frac{K\omega_n^2}{-\omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right) + \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= -\frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \\
c_{21} &= \left(p + \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)\right) Y(p)\Big|_{p=-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= \left.\frac{K\omega_n^2}{p + \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)}\right|_{p=-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= \frac{K\omega_n^2}{-\omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right) + \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}
\end{aligned}$$

Alors

$$Y(p) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[\frac{1}{p + \omega_n\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)} - \frac{1}{p + \omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)}\right] \tag{4.44}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle, représentée sur la figure 4.10, est:

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left[e^{-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} - e^{-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}\right] \tag{4.45}$$

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\zeta\omega_n t}\left[e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} - e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\right] \tag{4.46}$$

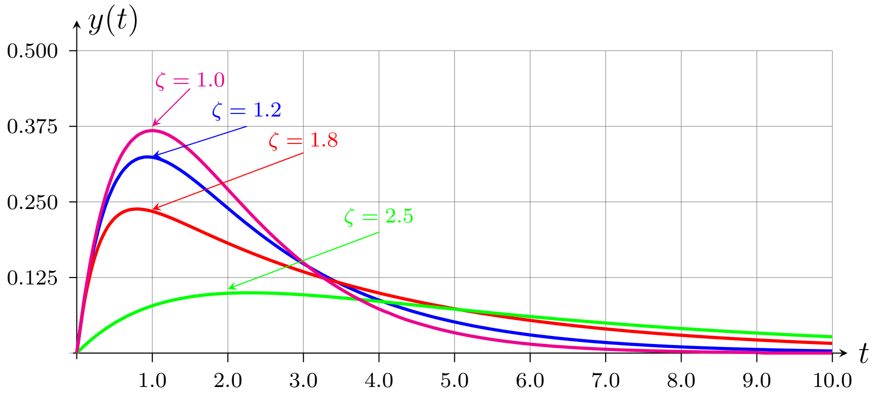


Figure 4.10 – Réponse impulsionnelle d'un système de second ordre pour $\zeta \geq 1$

Pour $\zeta = 1$, le système possède un pôle double $p_1 = p_2 = -\omega_n$.

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(p^2 + \omega_n)^2} \tag{4.47}$$

La réponse impulsionnelle, dans le cas $\zeta = 1$, représentée par la figure 4.10 en violet, est

$$y(t) = Kte^{-\omega_n t} \tag{4.48}$$

La réponse impulsionnelle est maximale à l'instant t_p tel que

$$y'(t_p) = 0 \tag{4.49}$$

Alors on a

$$y'(t) = -\frac{K\zeta\omega_n^2}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\zeta\omega_n t}\left[e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} - e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\right] + \frac{K\omega_n^2}{2}e^{-\zeta\omega_n t}\left[e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} + e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\right]$$

$$y'(t) = \frac{K\omega_n^2}{2}e^{-\zeta\omega_n t}\left[e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right) + e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\left(1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\right]$$

$$y'(t) = \frac{K\omega_n^2}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-\zeta\omega_n t}\left[e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\left(\sqrt{\zeta^2-1} + \zeta\right) + e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}\left(\sqrt{\zeta^2-1} - \zeta\right)\right]$$

$$y'(t_p) = 0 \Rightarrow e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t_p}\left(\sqrt{\zeta^2-1} + \zeta\right) + e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t_p}\left(\sqrt{\zeta^2-1} - \zeta\right) = 0$$

$$e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t_p}\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right) = e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t_p}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)$$

$$e^{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t_p} = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}}$$

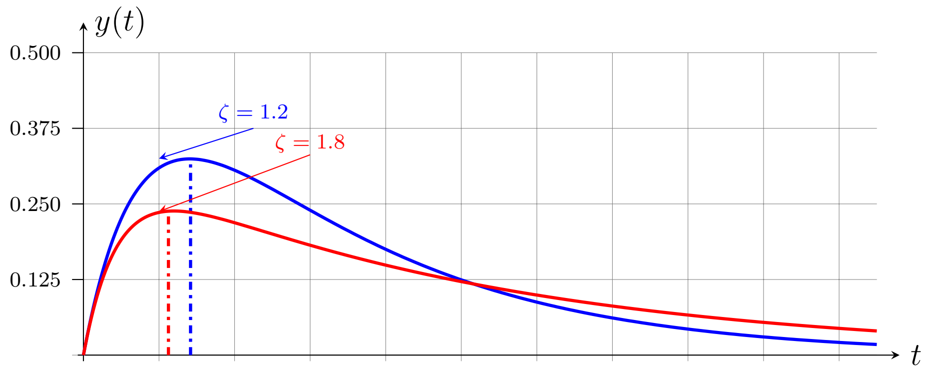


FIGURE 4.11 – Réponse impulsionnelle d'un système de second ordre pour $\zeta \geq 1$

$$2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t_p = \ln\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right) - \ln\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)$$

$$t_p = \frac{\ln\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right) - \ln\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

Cas $\zeta < 1$

La réponse impulsionnelle d'un système de second ordre est donnée par:

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2} \tag{4.50}$$

$Y(p)$ peut être écrite sous la forme

$$Y(p) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(p+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)} \tag{4.51}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse on obtient la réponse impulsionnelle $y(t)$ représentée sur la figure 4.12:

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \tag{4.52}$$

4.7.3 Réponse indicielle d'un système de second ordre

Considérons un système de second ordre de gain statique K. Pour un échelon unitaire la transformée de Laplace de la sortie est donnée par:

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{p\left(p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2\right)} \tag{4.53}$$

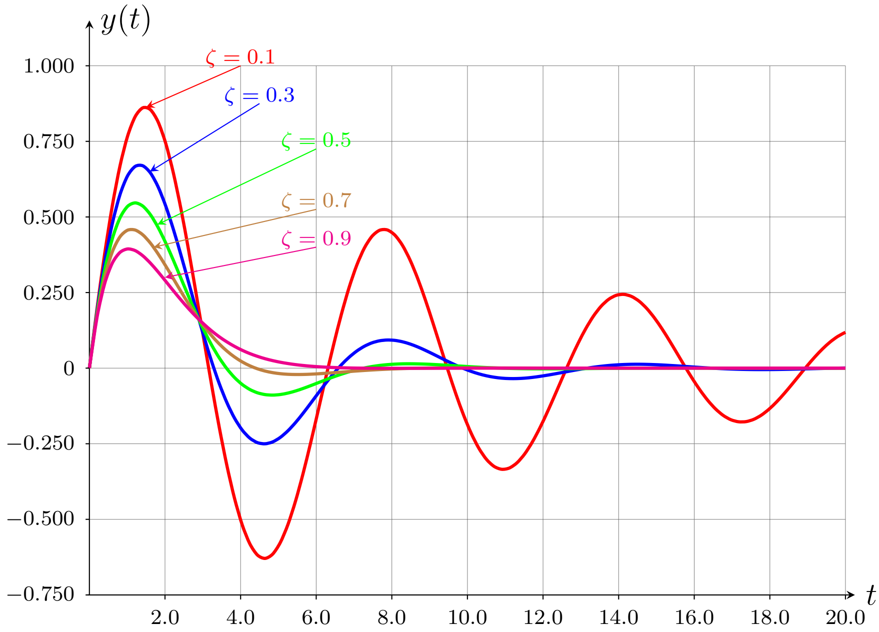


FIGURE 4.12 – Réponse impulsionnelle d'un système de second ordre pour $\zeta < 1$

Cas $\zeta \geq 1$

Dans le cas $\zeta > 1$, le système possède en plus du pôle nul $p_1 = 0$ deux pôles réels négatifs

$$p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow p_{2,3} = -\omega_n \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \tag{4.54}$$

$$Y(p) = \frac{c_{11}}{p} + \frac{c_{21}}{p + \omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} + \frac{c_{31}}{p + \omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} \tag{4.55}$$

avec

$$\begin{aligned}
c_{11} &= pY(p)\big|_{p=0} = K \\
c_{21} &= \left.\frac{K\omega_n^2}{p\left(p+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right)}\right|_{p=-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= \frac{K\omega_n^2}{\left(-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right)\left(-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right)} \\
&= \frac{K}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
c_{31} &= \left(p+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right)Y(p)\Big|_{p=-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= \left.\frac{K\omega_n^2}{p\left(p+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right)}\right|_{p=-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \\
&= \frac{K\omega_n^2}{\left(-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right)\left(-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right)} \\
&= -\frac{K}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}
\end{aligned}$$

Alors

$$Y(p) = \frac{K}{p} + \frac{\frac{K}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{p+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)} - \frac{\frac{K}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{p+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)} \tag{4.56}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse:

$$\begin{aligned}
y(t) = u(t) &+ \frac{K}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} \\
&- \frac{K}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}e^{-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Pour $\zeta = 1$, le système possède en plus du pôle nul $p_1 = 0$, un pôle double $p_2 = p_3 = -\omega_n$. La réponse indicielle, représentée par la figure 4.13, est

$$y(t) = K\left[u(t) - e^{-\omega_n t}\left(1+\omega_n t\right)\right] \tag{4.58}$$

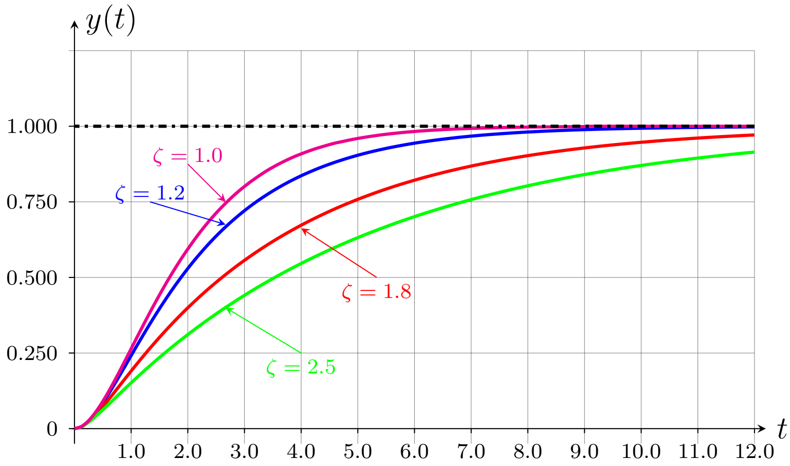


Figure 4.13 – Réponse indicielle d'un système du second ordre pour $\zeta \geq 1$

Cas $\zeta < 1$

En utilisant l'expansion en fractions simples:

$$Y(p) = \frac{c_{11}}{p} + \frac{Ap + B}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \tag{4.59}$$

$$c_{11} = pY(p)|_{p=0} = K$$

$$Y(p) = \frac{K}{p} + \frac{Ap + B}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{(K + A)\, p^2 + (2K\zeta\omega_n + B)\, p + K\omega_n^2}{p\,(p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2)} \tag{4.60}$$

Par identification:

$$\left\{ \begin{array}{l} K + A = 0 \\ 2K\zeta\omega_n + B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -K \\ B = -2K\zeta\omega_n \end{array} \right. \tag{4.61}$$

alors

$$\begin{aligned} Y(p) &= K\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\zeta\omega_n}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}\right] \\ &= K\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\zeta\omega_n}{(p + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2}\right] \\ &= K\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\zeta\omega_n}{(p + \zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$Y(p) = K\left[\frac{1}{p} - \frac{p + \zeta\omega_n}{(p + \zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\right)^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}{(p + \zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\right)^2}\right] \tag{4.63}$$

$$Y(p) = K\left[\frac{1}{p} - \frac{p+\zeta\omega_n}{(p+\zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(p+\zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}\right] \tag{4.64}$$

La transformée de Laplace inverse donne

$$y(t) = K\left[u(t) - e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right\}\right] \tag{4.65}$$

Lorsque $\zeta = 0$

$$y(t) = K\left(1 - \cos\omega_n t\right) \tag{4.66}$$

la sortie est un signal sinusoidal dont la pulsation est ω_n.

Pour $\zeta < 1$, on pose:

$$\varphi = \arccos\zeta \tag{4.67}$$

Alors on a

$$\cos\varphi = \zeta \text{ et } \sin\varphi = \sqrt{1-\zeta^2} \tag{4.68}$$

ce qui donne

$$y(t) = K\left[u(t) - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\sqrt{1-\zeta^2}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \zeta\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right\}\right] \tag{4.69}$$

$$y(t) = K\left[u(t) - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\sin\varphi\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + \cos\varphi\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right\}\right] \tag{4.70}$$

alors on a

$$y(t) = K\left[u(t) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \varphi\right)\right] \tag{4.71}$$

avec

$$\varphi = \arccos\zeta \tag{4.72}$$

La sortie est un signal sinusoidal amortie, figure 4.14, dont la fréquence des oscillation est:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{4.73}$$

ω_d est appelé la fréquence naturelle amortie. Alors

$$y(t) = K\left[u(t) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \varphi\right)\right] \tag{4.74}$$

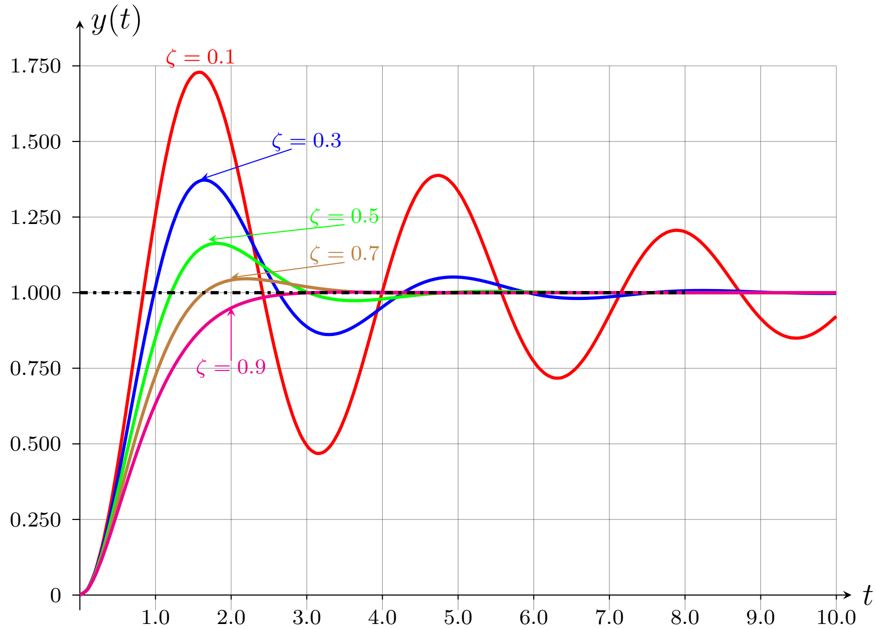


FIGURE 4.14 – Réponse indicielle d'un système du second ordre pour $\zeta < 1$

4.7.4 Détermination expérimentale des paramètres à partir de la réponse indicielle

Le gain statique du système K, le coefficient d'amortissement ζ, et la pulsation naturelle ω_n peuvent être déterminés à partir de deux points (t_1, y_1) et (t_2, y_2) et de la sortie au régime permanent $y(\infty)$.
Pour déterminer les relations entre les variables connues et les variables à estimer on va utiliser le fait que la dérivée de la réponse indicielle par rapport au temps s'annule aux points t_n (extremum locaux).
Puisque l'entrée est un échelon unitaire, le gain statique est égal à la sortie au régime permanent $K = y(\infty)$.
La réponse indicielle du système dans le cas $\zeta < 1$ présente un dépassement D et une oscillation de pseudo-période T_d comme le montre la figure 4.15:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi\right)\right], \quad \varphi = \arccos\zeta \tag{4.75}$$

Le gain statique est obtenu par:

$$K = y(\infty) \tag{4.76}$$

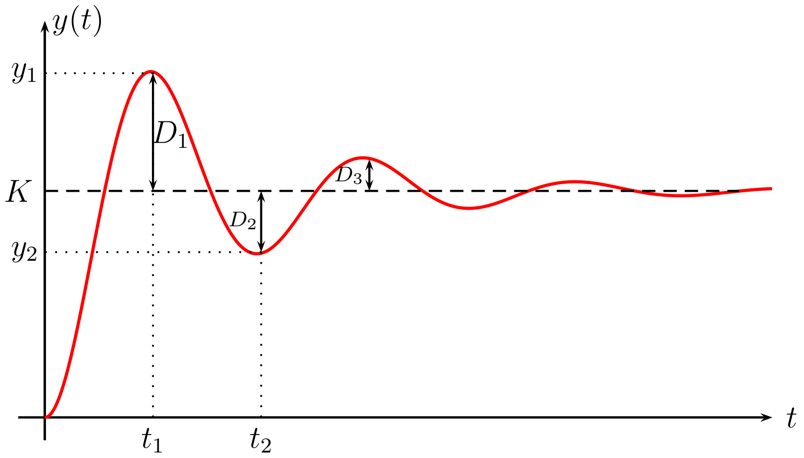


Figure 4.15 – Système du second ordre $\zeta < 1$

La dérivée de $y(t)$ par rapport au temps est donnée par:

$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \left[\zeta \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \varphi\right) - \sqrt{1-\zeta^2}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \varphi\right)\right] \quad (4.77)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos\varphi \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi\right) - \sin\varphi\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi\right)\right] \quad (4.78)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) \quad (4.79)$$

Chaque extremum local vérifie la relation:

$$\dot{y}(t_n) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t_n\right) = 0 \Rightarrow t_n = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.80)$$

Les maximas de la réponse indicielle interviennent donc aux instants:

$$t_n = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.81)$$

En remplaçant dans l'expression de la réponse indicielle (4.75) :

$$\begin{aligned} y(t_n) &= K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{n\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin(n\pi + \phi)\right] && (4.82)\\ &= K\left[1 - (-1)^n \left(e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\right)^n\right] && (4.83)\\ &= K\left[1 - (-1)^n M^n\right], \qquad M = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} && (4.84) \end{aligned}$$

La valeur de dépassement D_n est alors donnée par:

$$D_n = \frac{y(t_n) - K}{K} = \frac{K\left[1 - (-1)^n M^n\right] - K}{K}, \quad n \geq 0 \tag{4.85}$$

$$D_n = (-1)^{n+1} e^{-\frac{n\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad n \geq 0 \tag{4.86}$$

La procédure d'identification est alors :

1. $K = y(\infty)$,
2. $y_1 = K(1+M),\ y_2 = K(1-M^2) \Rightarrow M = \frac{y_1 - y_2}{y_1}$,
3. $M = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta = \left|\frac{\ln M}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 M}}\right|$,
4. $t_1 = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}},\ t_2 = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{(t_2 - t_1)\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \tau_n = \frac{1}{\omega_n}$

4.8 Généralisation

Un intérêt particulier a été accordé dans les paragraphes précédents aux systèmes d'ordres un et deux. Les notions de base abordées jusqu'à présent s'étendent aux systèmes d'ordre supérieur à deux, mais la caractérisation théorique de leurs réponses est plus délicate.

La réponse transitoire d'un système d'ordre n supérieur à 2 peut être fortement marquée par certains pôles plutôt que d'autres. Ces pôles dits dominants sont situés près de l'axe imaginaire dans la carte des pôles. Ils correspondent à des constantes de temps élevées ou à des amortissements faibles.

Les caractéristiques transitoires des systèmes d'ordre supérieur à deux ne peuvent être calculées algébriquement sans que l'on passe par des approximations. Lorsque celles–ci sont justifiées, on obtient généralement une évaluation raisonnable de ces caractéristiques.

Considérons une fonction de transfert constituée exclusivement de pôles telle que:

$$G(p) = \frac{K}{\prod_{i=1}^{n}(p + p_i)} \tag{4.87}$$

Il s'agit donc, selon la valeur de l'ordre n, d'un assemblage de blocs du premier et/ou du second ordre se comportant chacun comme un filtre pass-bas. Si on considère que la bande passante globale est imposée par les constantes de temps $(1/p_i)$ les plus grandes, alors ce sont les pôles $-p_i$ les plus proches de l'origine du plan complexe qui imposent le mode de comportement général du système. La figure 4.17 montre que le système du 4ème ordre

$$G(p) = \frac{800}{(p+1)(p+20)(p^2+4p+40)}$$

présente un mode dominant du premier ordre. En effet, pour la réponse indicielle du système, représentée sur la figure 4.17, les exponentielles, ayant l'exposant le plus négatif, disparaissent très vite devant les autres, au fur et à mesure que le temps s'accroît.

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{800}{(p+1)(p+20)(p^2+4p+40)} = \frac{800}{(p+1)(p+20)(p^2+4p+40)}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1.1380}{p+1} + \frac{0.0058}{p+20} + \frac{0.1322(p+2)}{(p+2)^2+36} - \frac{2\times 0.0631}{6} \cdot \frac{6}{(p+2)^2+36}$$

La réponse indicielle est alors

$$y(t) = u(t) - 1.1380e^{-t} + 0.0058e^{-20t} + e^{-2t}\left(0.1322\cos 6t - 0.0210\sin 6t\right)$$

Puisque les exponentielles e^{-20t} et e^{-2t} disparaissent plus rapidement que e^{-t}, le système du 4ème ordre peut être approché par un système du premier ordre de la forme

$$G_m(p) = \frac{1}{p+1}$$

La réponse indicielle du système d'ordre un utilisé pour l'approximation est donnée par:

$$y_m(t) = u(t) - e^{-t}$$

L'erreur d'approximation est représentée sur la figure 4.16

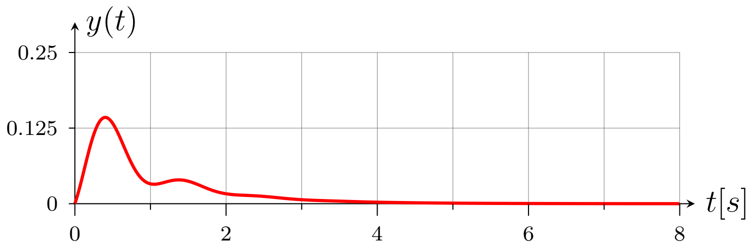


Figure 4.16 – Erreur d'approximation

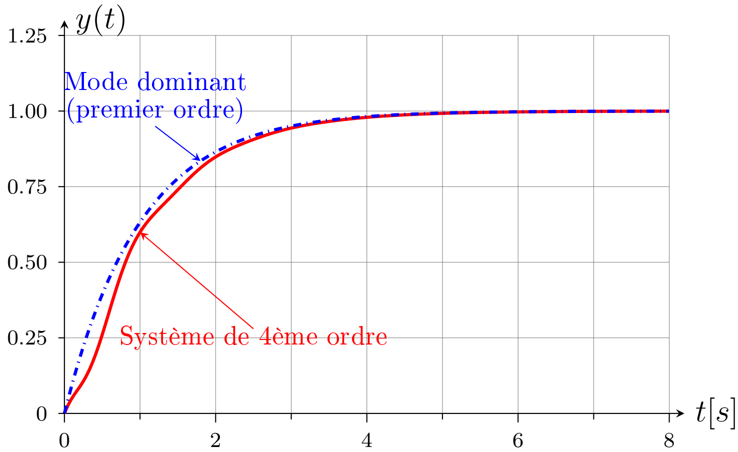


FIGURE 4.17 – Exemple de mode dominant