Chapitre 5

Précision et stabilité des systèmes asservis

5.1 Introduction

5.2 Précision d'un système asservi

La qualité d'un système asservi est jugée par sa stabilité et sa rapidité, mais aussi par la précision avec laquelle il suit l'entrée de référence.

5.2.1 Type d'un système asservi

Soit le système asservi représenté par la figure 5.1, avec

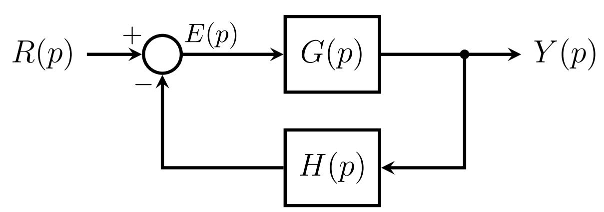

FIGURE 5.1 – Système asservi

$$G(p)H(p) = \frac{K \prod_{i=1}^{m} (p + z_i)}{p^Q \prod_{k=1}^{n-Q} (p + p_k)} \tag{5.1}$$

On dit que le système est de type Q.

5.2.2 Erreur d'état stationnaire

L'erreur d'état stationnaire est définie comme:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) \tag{5.2}$$

où $e(t)$ est l'erreur entre la consigne et la sortie système, on a dans le domaine complexe:

$$E(p) = R(p) - H(p)Y(p) \tag{5.3}$$

or

$$Y(p) = G(p)E(p) \tag{5.4}$$

Alors on obtient

$$E(p) = R(p) - G(p)H(p)E(p) \Rightarrow E(p) = \frac{R(p)}{1+G(p)H(p)} \tag{5.5}$$

Si la limite $\lim_{t\to\infty} e(t)$ existe on peut appliquer le théorème de la valeur finale et on obtient:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{p\to 0} pE(p) \tag{5.6}$$

L'erreur de l'état stationnaire peut être déterminée par:

$$e_{ss} = \lim_{p\to 0} pE(p) = \lim_{p\to 0} \frac{pR(p)}{1+G(p)H(p)} \tag{5.7}$$

5.2.3 Erreur de position

Lorsque l'entrée est un échelon unitaire $r(t) = u(t)$.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{p\to 0} pE(p) \\ &= \lim_{p\to 0} p\frac{R(p)}{1+G(p)H(p)} \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+G(p)H(p)} \end{aligned}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\lim_{p\to 0} G(p)H(p)} \tag{5.8}$$

On pose

$$K_p = \lim_{p\to 0} G(p)H(p) \tag{5.9}$$

K_p est appelée constante d'erreur de position. L'erreur de position est donnée par:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \tag{5.10}$$

La constante d'erreur de position d'un système de type Q

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{p\to 0} G(p)H(p) \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{K\prod_{i=1}^{m}(p+z_i)}{p^Q\prod_{k=1}^{n-Q}(p+p_k)} \end{aligned}$$

alors

$$K_p = \begin{cases} K_0 & \text{pour les systèmes de type 0} \\ \infty & \text{pour les systèmes de type 1,2,...} \end{cases} \tag{5.11}$$

ou K_0 est le gain statique du système. L'erreur de position est constante pour les systèmes de type 0 et nulle pour les systèmes de type supérieur ou égal à 1.

5.2.4 Erreur de vitesse

Lorsque l'entrée est une rampe unitaire $r(t) = t$.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{p\to 0} pE(p) \\ &= \lim_{p\to 0} p\frac{R(p)}{1+G(p)H(p)} \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{1}{p+pG(p)H(p)} \\ &= \frac{1}{\lim_{p\to 0} pG(p)H(p)} \end{aligned}$$

On pose

$$K_v = \lim_{p\to 0} pG(p)H(p) \tag{5.12}$$

K_v est appelée constante d'erreur de vitesse.
L'erreur de vitesse est donnée par:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \tag{5.13}$$

La constante d'erreur de vitesse d'un système de type Q

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{p\to 0} pG(p)H(p) \\ &= \lim_{p\to 0} \frac{K\prod_{i=1}^{m}(p+z_i)}{p^{Q-1}\prod_{k=1}^{n-Q}(p+p_k)} \end{aligned}$$

alors

$$K_v = \begin{cases} 0 & \text{pour les systèmes de type 0} \\ C^{te} & \text{pour les systèmes de type 1} \\ \infty & \text{pour les systèmes de type 2,3,...} \end{cases} \tag{5.14}$$

L'erreur de vitesse est infinie pour les systèmes de type 0, constante pour les système de type 1 et nulle pour les systèmes de type supérieur ou égal à 2.

5.2.5 Erreur d'accélération

Lorsque l'entrée est une parabole unitaire $r(t) = \frac{t^2}{2}$.

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{p \to 0} pE(p) \\ &= \lim_{p \to 0} p \frac{R(p)}{1 + G(p)H(p)} \\ &= \lim_{p \to 0} \frac{1}{p^2 + p^2 G(p)H(p)} \\ &= \frac{1}{\lim_{p \to 0} p^2 G(p)H(p)} \end{aligned}$$

On pose

$$K_a = \lim_{p \to 0} p^2 G(p)H(p) \tag{5.15}$$

K_a est appelée constante d'erreur d'accélération.
L'erreur d'accélération est donnée par:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \tag{5.16}$$

La constante d'erreur d'accélération d'un système de type Q

$$\begin{aligned} K_a &= \lim_{p \to 0} p^2 G(p)H(p) \\ &= \lim_{p \to 0} \frac{K \prod_{i=1}^{m} (p + z_i)}{p^{Q-2} \prod_{k=1}^{n-Q} (p + p_k)} \end{aligned}$$

alors

$$K_a = \begin{cases} 0 & \text{pour les systèmes de type 0 et 1} \\ C^{te} & \text{pour les système de type 2} \\ \infty & \text{pour les systèmes de type 3,4,...} \end{cases} \tag{5.17}$$

L'erreur d'accélération est infinie pour les systèmes de type 0 et 1, constante pour les système de type 2 et nulle pour les systèmes de type supérieur ou égal à 3.

				e_{ss} : Erreur de l'état stationnaire		
Type du système	K_p	K_v	K_a	$r(t) = u(t)$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{t^2}{2}$
0	K	0	0	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	∞	C^{te}	0	0	$\frac{1}{K_v}$	0
2	∞	∞	C^{te}	0	0	$\frac{1}{K_a}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

TABLE 5.1 – Erreurs d'état stationnaire

5.3 Stabilité

La stabilité est une propriété fondamentale des systèmes asservis. Un système stable est un système qui reste au repos à moins qu'on ne l'excite au moyen d'une source extérieure, et qui revient au repos dès que toutes les excitations cessent.

Définition 5.1. On dit qu'un système est stable si la réponse à l'impulsion unité tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Définition 5.2. On dit qu'un système est stable si la réponse est bornée pour toute entrée bornée.

Soit $r(t)$ et $y(t)$ l'entrée et la sortie d'un système linéaire alors si

$$|r(t)| \leq N < \infty \qquad \text{pour} \quad t \geq t_0 \tag{5.18}$$

alors

$$|y(t)| \leq M < \infty \qquad \text{pour} \quad t \geq t_0 \tag{5.19}$$

La sortie du système est donnée par:

$$y(t) = \int_0^\infty r(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.20}$$

ou $g(\tau)$ est la réponse impulsionnelle du système.

En prenant la valeur absolue des deux côtés de l'équation 5.20, on obtient

$$|y(t)| = \left| \int_0^\infty r(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \right| \tag{5.21}$$

Puisque la valeur absolue d'une intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue de l'intégrande, alors

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty |r(t-\tau)g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leq \int_0^\infty |r(t-\tau)|\,|g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \tag{5.22}$$

Alors si $r(t)$ est un signal borné

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty N\,|g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = N\int_0^\infty |g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \tag{5.23}$$

Alors, pour que la sortie $y(t)$ soit bornée il faut

$$|y(t)| \leq N\int_0^\infty |g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leq M < \infty \tag{5.24}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty |g(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leq P < \infty \tag{5.25}$$

L'interprétation physique de l'équation 5.25 est que l'aire au dessous de la valeur absolue de la réponse impulsionnelle évaluée entre $t = 0$ et $t = \infty$ doit être finie.

Par définition la fonction de transfert d'un système est égale à la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle

$$G(p) = \int_0^\infty g(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \tag{5.26}$$

alors

$$|G(p)| \leq \int_0^\infty |g(t)|\left|e^{-pt}\right|\mathrm{d}t \tag{5.27}$$

Les racines de l'équation caractéristique sont les pôles de la fonction de transfert $G(p)$, alors lorsque $G(p)$ est évaluée aux pôles de la fonction de transfert on a $|G(p)| = \infty$ et pour $p = \sigma + j\omega$, $|e^{-pt}| = |e^{-\sigma t}|$, l'équation 5.27 devient

$$\infty \leq \int_0^\infty |g(t)|\left|e^{-\sigma t}\right|\mathrm{d}t \tag{5.28}$$

Si un ou plusieurs racines de l'équation caractéristiques appartiennent au demi plan droit ou à l'axe imaginaire du plan complexe, $\sigma \geq 0$ alors $|e^{-\sigma t}| \leq N = 1$. Alors l'équation 5.28 devient

$$\infty \leq \int_0^\infty N\,|g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t \tag{5.29}$$

Pour $\mathrm{Re}(p) = \sigma \geq 0$.

Puisque l'équation 5.29 est en contradiction avec le critère de stabilité donné par l'équation 5.25 on conclut que pour qu'un système linéaire soit stable il faut que les racines de l'équation caractéristique appartiennent au demi plan droit du plan complexe.

La stabilité d'un système linéaire peut être déterminée en vérifiant si un ou plusieurs racines de l'équation caractéristique appartiennent au demi-plan gauche ou à l'axe imaginaire du plan complexe.

La fonction de transfert d'un système en boucle fermée peut être écrite sous la forme;

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} \tag{5.30}$$

En général, $G(p)$ et $H(p)$ sont de la forme:

$$G(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \qquad \text{et} \qquad H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec $p(p), q(p), n(p)$ et $d(p)$ sont des polynômes de la variable complexe p. La fonction de transfert du système en boucle fermée peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{Y(p)}{R(p)} &= \frac{P(p)D(p)}{Q(p)D(p) + P(p)N(p)} \\ &= \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \qquad m \leq n \end{aligned}$$

La factorisation du numérateur et du numérateur permet d'écrire

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{K(p+z_1)(p+z_2)\cdots(p+z_{m-1})(p+z_m)}{(p+p_1)(p+p_2)\cdots(p+p_{n-1})(p+p_n)} \tag{5.31}$$

Considérons la réponse indicielle du système. Premièrement, on considère le cas ou les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont réels et distincts;

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K(p+z_1)(p+z_2)\cdots(p+z_{m-1})(p+z_m)}{(p+p_1)(p+p_2)\cdots(p+p_{n-1})(p+p_n)} \tag{5.32}$$

$Y(p)$ peut être écrite sous la forme;

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i1}}{p+p_i} + \frac{c_{(n+1)1}}{p} \tag{5.33}$$

Alors la réponse indicielle est;

$$y(t) = c_{(n+1)1}u(t) + \sum_{i=1}^{n} c_{i1}e^{-p_i t} \tag{5.34}$$

Maintenant, considérons le cas de pôles réels et pôles complexes distincts. La transformée de Laplace de la réponse indicielle, contenant q pôles réels et $2r$ pôles complexes, peut s'écrire:

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K\prod_{i=1}^{m}(p+z_i)}{\prod_{i=1}^{q}(p+p_i)\prod_{j=1}^{r}(p^2 + 2\zeta_j\omega_j p + \omega_j^2)} \tag{5.35}$$

avec $q + 2r = n$. Si les pôles sont distincts, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme;

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{q} \frac{c_{i1}}{p+p_i} + \sum_{j=1}^{r} \frac{a_j(p+\zeta_j\omega_j) + b_j\omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}}{p^2 + 2\zeta_j\omega_j p + \omega_j^2} + \frac{c_{(n+1)1}}{p} \tag{5.36}$$

La réponse indicielle est la somme d'un échelon, des termes de premier ordre et des termes de second ordre.

$$y(t) = c_{(n+1)1}u(t) + \sum_{i=1}^{q} c_{i1}e^{-p_i t} + \sum_{j=1}^{r} e^{-\zeta_j\omega_j t}\left[a_j \cos\left(\omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}\right)t + b_j \sin\left(\omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}\right)t\right] \tag{5.37}$$

Dans le cas général, la transformée de Laplace de réponse indicielle s'écrit sous la forme

$$Y(p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{K\prod_{i=1}^{m}(p+z_i)}{\prod_{i=1}^{q}(p+p_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{r}(p^2+2\zeta_j\omega_j p+\omega_j^2)^{m_j}} \tag{5.38}$$

avec $n = \sum_{i=1}^{q} n_i + 2\sum_{j=1}^{r} m_j$. Alors la réponse indicielle s'écrit, dans le cas général, sous la forme:

$$\begin{aligned} y(t) = c_{(n+1)1}u(t) + \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-p_i t} + \\ \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\zeta_j\omega_j t}\left[a_{jk}\cos\left(\omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}\right)t + b_{jk}\sin\left(\omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}\right)t\right] \end{aligned} \tag{5.39}$$

Il est clair que la réponse indicielle est bornée si les termes exponentiels tendent vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette condition est vérifiée si les pôles du système sont à partie réelle négative. La figure 5.2 représente la forme de la réponse impulsionnelle pour différentes position des pôles dans le plan complexe.

Théorème 5.1. Un système linéaire continu est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative.

5.3.1 Critère de stabilité de Routh

Si bien que la stabilité d'un système linéaire invariant peut être vérifiée par l'analyse de la réponse impulsionnelle ou par la détermination des racines de l'équation caractéristique l'implémentation pratique de ces critères est souvent très difficiles. La réponse impulsionnelle peut être obtenue par le calcul de la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert, qui n'est pas toujours une tâche simple. La détermination des racines de l'équation caractéristique qui est en général un polynôme d'ordre élevée peut se faire un calculateur numérique.

En pratique l'analyse de stabilité des systèmes linéaires est rarement déterminée par l'analyse de la réponse impulsionnelle ou par le calcul des racines de la fonction caractéristique.

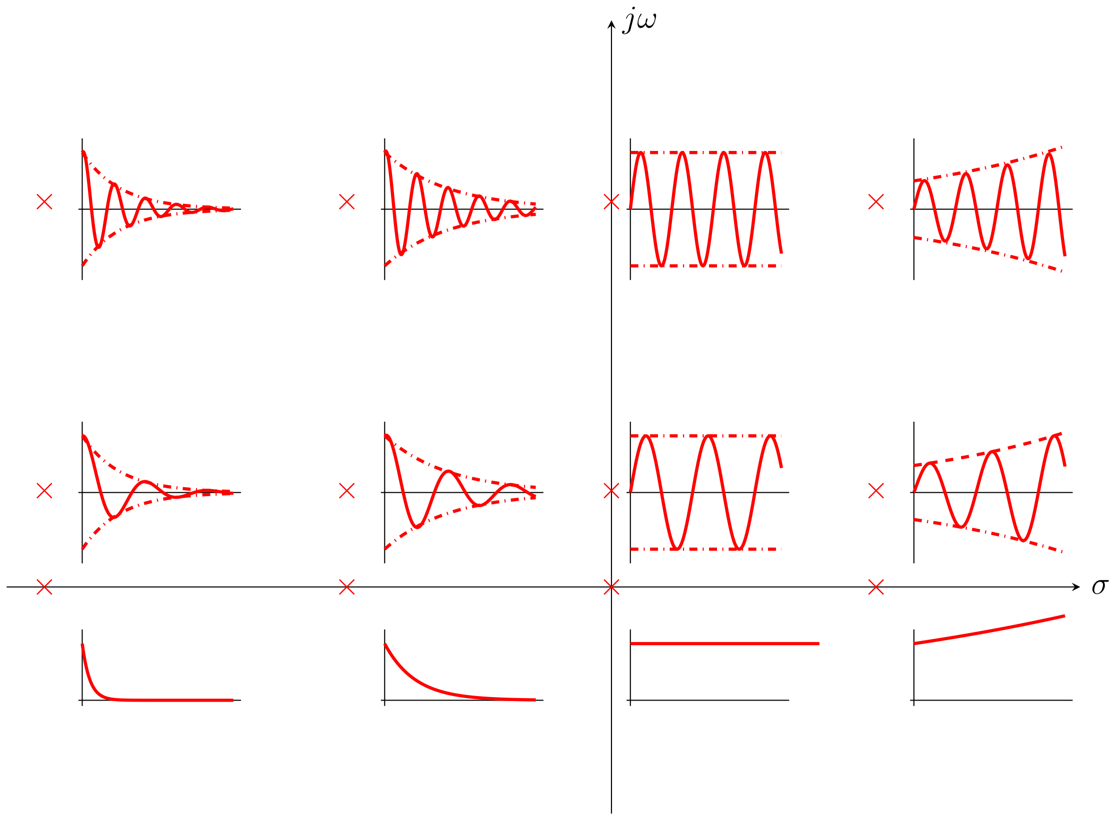

FIGURE 5.2 – Réponse impulsionnelle pour différentes position des pôles dans le plan complexe

En général, on utilise des algorithmes qui permettent l'analyse de stabilité sans calculer les racines de l'équation caractéristique.

Le critère de stabilité de Routh est une méthode permettant de déterminer l'existence ou non de racines instables d'une equation polynomiale sans calculer les racines.

La procédure d'application du critère de Routh est la suivante:

1. Écrire l'équation caractéristique sous la forme suivante:
$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0 \tag{5.40}$$
On suppose que $a_0 \neq 0$, c'es-à-dire que les racines nulle nulles ont été éliminés.
2. Si tous les coefficients ne sont pas de même signe ou s'il existe des coefficients nuls alors il existe une ou plusieurs racines imaginaires pures ou à partie réelle positive et le système n'est pas stable. La première condition nécessaire mais insuffisante de stabilité est que tous les coefficients de l'équation 5.40 existent et sont de signe positif. Si les coefficients $a_i, i = 0, 1, ..., n$ sont négatifs on multiplie les deux côtés de l'équations 5.40 par -1 pour avoir des coefficients positifs.
3. Si tous les coefficients sont positifs, on arrange les coefficients du polynôme dans un tableau de la forme suivante:

$$\begin{array}{c|ccccc}
p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
\hline
p^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
p^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & \cdots \\
p^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
p^2 & e_1 & e_2 & & & \\
p^1 & f_1 & & & & \\
p^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

Les coefficients $b_1, b_2, ...$ sont déterminés en utilisant les expressions suivantes:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$
$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$
$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$
$$\vdots$$

De la même façon on détermine le reste des coefficients du tableau

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1} \\
c_2 &= \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1} \\
c_3 &= \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1} \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \\
d_2 &= \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \\
d_3 &= \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1} \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}$$

On continue la procédure de calcul des coefficients jusqu'à la n$^{\text{ème}}$ ligne du tableau. Pendant le calcul des coefficients on peut diviser ou multiplier une ligne entière par un nombre positif dans le but de simplifier les calculs sans que le résultat de stabilité soit altéré.

Le critère de Routh state que le nombre de racines de l'équation 5.40 à partie réelle positive est égal au nombre de changements de signe des coefficients de la première colonne de la table de Routh. Il faut noter que la connaissance de la valeur des coefficients de la première colonne n'est pas nécessaire, seul la connaissance de leurs signes est nécessaire.

Exemple 5.1.

$$p^3 + 2p^2 + 4p + 4 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
p^3 & 1 & 4 \\
p^2 & 2 & 4 \\
\hline
p^1 & 2 & 0 \\
p^0 & 4 &
\end{array}$$

Les coefficients de la première colonne sont tous positifs et il n'y a pas de changement de signe dans les coefficients de la première colonne et le système est stable.

Exemple 5.2.

$$p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p + 5 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
p^4 & 1 & 3 & 5 \\
p^3 & 2 & 4 & 0 \\
\hline
p^2 & 1 & 5 & \\
p^1 & -3 & & \\
p^0 & 5 & &
\end{array}$$

Le nombre de changements de signe dans la première colonne est égal à deux ce qui signifie que l'équation possède deux racines à partie réelle positive et le système est instable.

Cas particuliers

- Si le premier coefficient d'une ligne est nul alors que les autres termes sont non nuls alors on remplace le terme nul par un nombre positif très petit $\varepsilon > 0$ et on calcule le reste des termes de la table de Routh en fonction de paramètre ε.
  Exemple 5.3. Soit l'équation caractéristique:

  $$p^4 + 2p^3 + p^2 + 2p + 4 = 0$$

  $$\begin{array}{c|ccc}
  p^4 & 1 & 1 & 4 \\
  p^3 & 2 & 2 & 0 \\
  \hline
  p^2 & 0 & 4 &
  \end{array}$$

  Le coefficient nul est remplacé par ε.

  $$\begin{array}{c|ccc}
  p^4 & 1 & 1 & 4 \\
  p^3 & 2 & 2 & 0 \\
  \hline
  p^2 & \varepsilon & 4 & \\
  p^1 & \frac{2\varepsilon-8}{\varepsilon} & 0 & \\
  p^0 & 4 & &
  \end{array}$$

  Le terme

  $$\frac{2\varepsilon - 8}{\varepsilon} = 2 - \frac{8}{\varepsilon}$$

  est de signe négatif lorsque $\varepsilon \to 0^+$ alors il existe deux changements de signe dans la première colonne et le système possède deux pôles à partie réelle positive.
- Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, ce qui signifie l'existence de deux racines de même amplitude et de positions radialement opposées dans le plan complexe, c'es-à-dire deux racines réelles de même valeur absolue mais de signes opposés ou de deux racines imaginaires conjuguées. Dans ce cas, la détermination du reste des termes de la table de Routh se fait en formant l'équation polynomiale auxiliaire par les coefficient la dernière ligne à coefficients non nuls. La ligne dont lees coefficients

sont nuls est remplacée par les coefficients de la dérivée de l'équation auxiliaire et le reste des termes du tableau sont déterminés de la manière habituelle.

Exemple 5.4.

$$p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 4p + 8 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} p^5 & 1 & 3 & 4 \\ p^4 & 2 & 6 & 8 \\ \hline p^3 & 0 & 0 & \\ p^2 & & & \\ p^1 & & & \end{array}$$

Les coefficients de la troisième ligne sont nuls. L'équation auxiliaire est obtenue en utilisant les coefficients de la deuxième ligne. L'équation auxiliaire est:

$$A(p) = 2p^4 + 6p^2 + 8 = 0$$

La dérivée du polynôme auxiliaire est:

$$\frac{\mathrm{d}A(p)}{\mathrm{d}p} = 8p^3 + 12p$$

$$\begin{array}{c|ccc} p^5 & 1 & 3 & 4 \\ p^4 & 2 & 6 & 8 \\ \hline p^3 & 8 & 12 & \\ p^2 & 3 & 8 & \\ p^1 & -\frac{28}{3} & & \\ p^0 & 8 & & \end{array}$$

Le nombre de changements de signe dans la première colonne est égal à deux ce qui signifie que le système possède deux pôles à partie réelle positive et le système est instable.

Les racines de l'équation auxiliaire sont aussi des racines de l'équation caractéristique:

$$A(p) = 2p^4 + 6p^2 + 8 = 0 \Rightarrow p^2 = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}j$$

Exemple 5.5.

$$p^5 + 6p^4 + 12p^3 + 12p^2 + 11p + 6 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} p^5 & 1 & 12 & 11 \\ p^4 & 6 & 12 & 6 \\ \hline p^3 & 10 & 10 & \\ p^2 & 6 & 6 & \\ p^1 & 0 & & \end{array}$$

Les coefficients de la cinquième ligne sont nuls. L'équation auxiliaire est obtenue en utilisant les coefficients de la quatrième ligne. L'équation auxiliaire est:

$$A(p) = 6p^2 + 6 = 0$$

La dérivée du polynôme auxiliaire est:

$$\frac{\mathrm{d}A(p)}{\mathrm{d}p} = 12p$$

$$\begin{array}{c|lll}
p^5 & 1 & 12 & 11 \\
p^4 & 6 & 12 & 6 \\
\hline
p^3 & 10 & 10 & \\
p^2 & 6 & 6 & \\
p^1 & 12 & & \\
p^0 & 6 & &
\end{array}$$

Il n'existe pas de changement de signe dans les coefficients de la première colonne alors les pôles sont à partie réelle négative à l'exception d'une paire de pôles appartenant à l'axe imaginaire. Ces deux pôles sont les racines de l'équation auxiliaire:

$$A(p) = 6p^2 + 6 = 0 \Rightarrow p = \pm j$$

Exemple 5.6.

$$p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 4p + 8 = 0$$

$$\begin{array}{c|lll}
p^5 & 1 & 3 & 4 \\
p^4 & 2 & 6 & 8 \\
\hline
p^3 & 0 & 0 & \\
p^2 & & & \\
p^1 & & &
\end{array}$$

Les coefficients de la troisième ligne sont nuls. L'équation auxiliaire est obtenue en utilisant les coefficients de la deuxième ligne. L'équation auxiliaire est:

$$A(p) = 2p^4 + 6p^2 + 8 = 0$$

La dérivée du polynôme auxiliaire est:

$$\frac{\mathrm{d}A(p)}{\mathrm{d}p} = 8p^3 + 12p$$

$$\begin{array}{c|lll}
p^5 & 1 & 3 & 4 \\
p^4 & 2 & 6 & 8 \\
\hline
p^3 & 8 & 12 & \\
p^2 & 3 & 8 & \\
p^1 & -\frac{28}{3} & & \\
p^0 & 8 & &
\end{array}$$

Le nombre de changements de signe dans la première colonne est égal à deux ce qui signifie que le système possède deux pôles à partie réelle positive et le système est instable.
Les racines de l'équation auxiliaire sont aussi des racines de l'équation caractéristique:

$$A(p) = 2p^4 + 6p^2 + 8 = 0 \Rightarrow p^2 = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}j$$

Exemple 5.7.

$$p^5 + 2p^4 + 6p^3 + 12p^2 + 8p + 16 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} p^5 & 1 & 6 & 8 \\ p^4 & 2 & 12 & 16 \\ \hline p^3 & 0 & 0 & 0 \\ p^2 & & & \\ p^1 & & & \end{array}$$

Les coefficients de la troisième ligne sont nuls. L'équation auxiliaire est obtenue en utilisant les coefficients de la deuxième ligne. L'équation auxiliaire est:

$$A(p) = 2p^4 + 12p^2 + 16 = 0$$

La dérivée du polynôme auxiliaire est:

$$\frac{\mathrm{d}A(p)}{\mathrm{d}p} = 8p^3 + 24p$$

$$\begin{array}{c|ccc} p^5 & 1 & 6 & 8 \\ p^4 & 2 & 12 & 16 \\ \hline p^3 & 8 & 24 & 0 \\ p^2 & 6 & 16 & \\ p^1 & \frac{8}{3} & & \\ p^0 & 16 & & \end{array}$$

Il n'existe pas de changement de signe dans les coefficients de la première colonne alors les pôles sont à partie réelle négative à l'exception de deux paires de pôles appartenant à l'axe imaginaire. Ces deux paires de pôles sont les racines de l'équation auxiliaire:

$$A(p) = 2p^4 + 12p^2 + 16 = 0 \Rightarrow p^4 + 6p^2 + 8 = 0 p^2 = -4, p^2 = -2 \Rightarrow p_{1,2} = \pm 2j, \quad p_{3,4} = \pm\sqrt{2}j$$

Application du critère de Routh dans l'analyse des systèmes asservis

Le critère algébrique de Routh est d'utilité limitée dans l'analyse des systèmes de commande puisqu'il ne permet pas de caractériser la qualité de la stabilité. Il permet juste de vérifier la stabilité absolue du système sans donner aucune indication sur la stabilité relative du système. Malgré cette limitation, le critère de Routh peut être utilisé dans l'analyse des systèmes asservis.

Considérons le système représenté par la figure 5.3 et on demande de déterminer les valeurs de K pour lesquelles le système est stable.

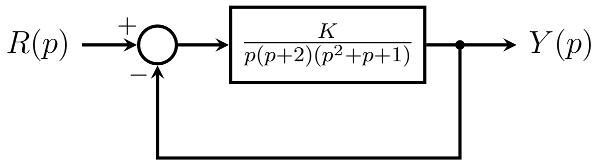

Figure 5.3 – Système en boucle fermée

La fonction de transfert en boucle fermée est

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{K}{p(p^2+p+1)(p+2)+K}$$

L'équation caractéristique est alors

$$p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0$$

Le tableau de Routh

$$\begin{array}{c|lll} p^4 & 1 & 3 & \mathrm{K} \\ p^3 & 3 & 2 & 0 \\ p^2 & \frac{7}{3} & \mathrm{K} & \\ p^1 & 2-\frac{9}{7}K & & \\ p^0 & K & & \end{array}$$

Pour que le système soit stable, il faut que K soit positif et que tous les coefficients de la première colonne soit positif. C'es-à-dire

$$\begin{cases} K > 0 \\ 2-\frac{9}{7}K > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < \frac{14}{9}$$

Le système est stable pour $0 < K < \frac{14}{9}$. Pour $K = \frac{14}{9}$ le système est oscillatoire.