Université: Mohamed Khieder
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Lois de Proba. 2018/2019
Niveau: 1er année master

Serie d'exercice N03

Exercice 01.

Sient X et $(X_n)_{\mathbb{N}}$ une famille de v.a.

1) Montrer les égalités entre événements

$$\begin{aligned}\{(X_n)_{\mathbb{N}} \text{ ne converge pas vers } X\} &= \underset{\varepsilon\in]0,+\infty[}{\cup} \limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}, \\ &= \underset{p\in\mathbb{N}^*}{\cup} \limsup_n \left\{|X_n - X| > \frac{1}{p}\right\}.\end{aligned}$$

2) Montrer que $(X_n)_{\mathbb{N}}$ converge p.s. vers X si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

3) Montrer que si, pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge alors la suite $(X_n)_{\mathbb{N}}$ converge p.s. vers X.

Exercice 02.

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$. On considère une suite indépendante $(U_n)_{\mathbb{N}}$ de v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1]$. Démontrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, que la suite des moyennes empiriques $I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k)$ associée à la suite de v.a.r. $(f(U_n))_{\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers l'intégrale au sens de Lebesgue $\int_{[0,1]} f d\lambda$.

Exercice 03.

Soient (X_n) une suite de v.a.r. de carré intégrable non corrélées. On suppose qu'il existe un réel μ et un réel positif C tels que, pour tout $n \geq 1$, $E[X_n] = \mu$ et $var(X_n) \leq 0$. Montrer que la suite $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge vers μ dans L_2 et en probabilité.

Exercice 04.

Montrer à l'aide de la loi forte des grands nombres que

1.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) d\lambda^{(n)}(x_1, ..., x_n) = f\left(\frac{1}{2}\right),$$

où $\lambda^{(n)}$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ et f une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Indication: On pourra considérer une suite indépendante de v.a.r. $(X_i)_{i\geq 1}$de même loi uniforme $U([0,1])$.

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n}\frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\alpha),$$

où α est un réel strictement positif et f une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Indication: On pourra considérer une suite indépendante de v.a.r. $(Y_i)_{i\geq 1}$de même loi de Poisson $P(\alpha)$.

Exercice 05.

Soient f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons S_n une v.a.r. binomiale de loi $B(n,x)$.

1) Montrer que $p_n(x) := E\left[f\left(\frac{1}{n}S_n\right)\right]$ est un polynôme en x appelé polynôme de *Bernstein* de f.

2) En utilisant l'uniforme continuité de f sur $[0,1]$ montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |p_n(x) - f(x)| &\leq E\left[\left|f\left(\frac{1}{n}S_n\right) - f(x)\right|\right] \\ &\leq \varepsilon P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - x\right| < \delta\right) + 2P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - x\right| \geq \delta\right) \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \end{aligned}$$

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{x(1-x)}{n\delta^2} \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

3) Démontrer le théorème de Weierstrass: Tous application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes.

Exercice 06.

Etudier la convergence étroite de la suite de probabilités $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de densités respectives $(f_n)_{n\geq 1}$ où pour tout $n \geq 1$, f_n est définie par $f_n(x) := nx^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

Exercice 07.

Soit $(p_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de réels de $]0,1[$ telle que

$$\lim_n (np_n) = \alpha \in]0,+\infty[.$$

Montrer que la suite de probabilités $(B(n,p_n))_{\mathbb{N}}$ converge étroitement vers la probabilité de Poisson $P(\alpha)$

Exercice 08.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $v.a.r$ définies sur un espace $(\Omega, F, \mathbf{P})$ et f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une $v.a.r$ X. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

Exercice 09.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r qui converge en loi vers une $v.a.r$ constante a (i.e. la suite $(\mathbf{P}_{X_n})_{n\geq 1}$ converge étroitement vers δ_a). Montrer que la convergence a lieu également en probabilité.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite indépendante de v.a.r de même loi de Cauchy $C(1)$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^{k=n} X_k$. Etudier les convergence en probabilité et en loi des suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{1}{n}S_n\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}S_n\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 10.

Soient X une v.a.r. et $(X_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r., on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{X_n} := \delta_{x_n}$ où $x_n \in \mathbb{R}$.

1) Si $P_X = \delta_x$, $x \in \mathbb{R}$, montrer que la suite $(X_n)_{\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers x.

2) Montrer que si la suite $(X_n)_{\mathbb{N}}$ converge en loi vers X, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_X = \delta_x$.