1.3مقدمة :

بالرغم من أن معظم الأجسام الصلبة في الطبيعة ليست معدنية إلا أن المعادن لعبت دورا أساسيا في نظرية الأجسام الصلبة إبتداءا من نهاية القرن التاسع عشر و إلى غاية وقتنا الحالي. تعتبر الحالة المعدنية أحد أهم الحالات الأساسية للمادة. مثلا نجد أن أكثر من ثلثي العناصر الكمياوية عبارة عن معادن.

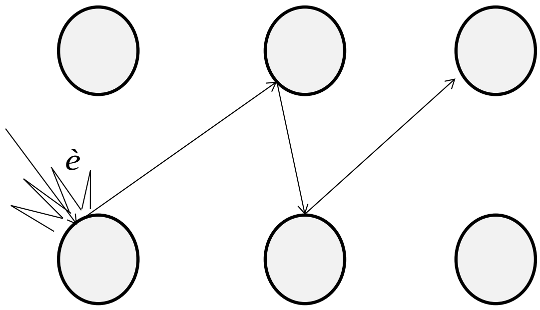
طوال القرن الأخير حاول الفزيائيون إنشاء نماذج بسيطة لإعطاء شرح كيفي و كمي للخصائص المميزة لكل أنواع المادة الصلبة بما فيها المعادن و قد تمكنت هذه النماذج من تفسير سلوك الإلكترونات في الجسم الصلب.

أولى النماذج المقترحة كان لدراسة كل من الناقلية الكهربائية و الحرارية بواسطة الإلكترونات الحرة في المعدن.

2.3 نموذج درود (1900):

1.2.3 الناقلية الكهربائية:

لتفسير الناقلية الكهربائية في المعادن, إفترض درود أن كل ذرة تساهم في النقل بواسطة إلكترونات التكافؤ الخاصة بها. تتجمع هذه الإلكترونات مشكلة غازا مثاليا من الإلكترونات الحرة. يهمل درود قوى التنافر بين الإلكترونات أو قوى التجاذب من طرف الأيونات الموجبة. لذلك تسلك الإلكترونات سلوك الغازات المثالية و الشيء الوحيد الذي يعيق حركتها هو التصادم مع الأيونات الساكنة بصفة مرنة مشكلا المقاومة الكهربائية.



الشكل 1.1

بإهمال الطاقة الكامنة , يكتسب كل إلكترون طاقته الحركية من درجة حرارة الوسط $E_c = \frac{3}{2}k_B T$. بوجود عدد n من الإلكترونات في المعدن تكون الطاقة الإجمالية $E_c = n\frac{3}{2}k_B T$. و السعة الحرارية للمعدن تكون ثابتة $C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = n\frac{3}{2}k_B$.

مفتاح.آف

لتعريف عملية التصادم مع الأيونات الساكنة نستعمل وسيطين إثنين هما : المسار الحر الوسطي λ و الذي يمثل معدل المسافة الفاصلة بين تصادمين متتاليين, و الزمن الحر الوسطي τ أو زمن التصادم (يسمى أيضا بزمن الإسترخاء). و النسبة بينهما هي السرعة الحرارية $v = \frac{\lambda}{\tau}$ التي يتحرك بها الإلكترون خلال الزمن τ في غياب قوى خارجية.

في غياب القوى الخارجية يكون معدل السرعة الحرارية معدوما $\langle v_0 \rangle = 0$. أما بوجود حقل كهربائي خارجي $\vec{E}$ يتعرض كل إلكترون لقوة الحقل الكهربائي $\vec{F} = -e\vec{E}$ و يكتسب سرعة إضافية تستنتج من القانون الثاني للحركة:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m}\vec{E} \qquad (3.1)$$

حيث m كتلة الإلكترون و e شحنته. و منه معدل السرعة المكتسبة في المدى بين تصادمين هو:

$$\vec{v} = \int_0^v d\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}\int_0^\tau dt = -\frac{e}{m}\vec{E}\tau \qquad (3.2)$$

لحساب الناقلية الكهربائية نقوم أولا بحساب كثافة التيار $\vec{J}$:

$$\vec{J} = -ne\vec{v} = n\frac{e^2}{m}\tau\vec{E} = \sigma\vec{E} \qquad (3.3)$$

إذن الناقلية الكهربائية هي:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \qquad (3.4)$$

و علي يمكن إستنتاج علاقة الناقلية بدرجة الحرارة حسب نموذج درود من خلال زمن الإسترخاء:

$$\tau = \frac{\lambda}{v}; v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2\frac{3}{2}k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \Longrightarrow \sigma = \frac{ne^2\lambda}{m\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}} = \frac{ne^2\lambda}{\sqrt{3mk_BT}} \qquad (3.5)$$

عند درجة الحرارة $T = 77K$ تكون السرعة الحرارية من رتبة $v\sim10^7 cm/s$ و $\tau\sim10^{-14}s$ و بالتالي بالنسبة للمسار الحر الوسطي $\lambda\sim a\sim A^0$. أي أن المسار الحر الوسطي من نفس رتبة الفاصلة الذرية للمعدن و كانت هذه النتيجة معقولة جدا حسب درود بما أن التصادمات تتم مع الأيونات الساكنة المنفصلة عن بعضها البعض بالفاصلة الذرية a .

المقارنة مع التجربة:

- بينت التجارب أن ناقلية المعادن σ تتناسب مع مقلوب درجة الحرارة T^{-1} في مجال واسع من درجة الحرارة. أما من أجل الدرجات الحرارية المنخفضة فإن $\sigma \propto T^{-5}$ لتصل إلى قيمة ثابتة من أجل الدرجات الحرارية المنخفضة جدا و هو ما يختلف عن النتيجة التي توصل إليها درود.

- في الدرجات الحرارية المنخفضة جدا و من خلال القيم التجريبية للناقلية وجد أن المسار الحر الوسطي λ يصبح من رتبة السنتيمتر $10^8 a$. لا يمكن كذلك تفسير زيادة المسار الحر الوسطي في الدرجات الحرارية المنخفضة جدا حسب نموذج درود الذي يعتبر سبب المقاومة هو التصادم مع الأيونات الساكنة المنفصلة عن بعضها البعض ببضع أنغشترونات.

2.2.3 تعميم:

نحاول الآن كتابة معادلة الحركة للإلكترونات الحرة في الحالة العامة، أخذا بعين الإعتبار وجود التصادمات كقوة معيقة.

نفرض أن تطبيق القوة الخارجية كان عند $t = 0$. بعد مرور زمن t ، فإن الإلكترون سيكتسب كمية حركة $\delta p(t)$. عند $t + dt$ ، تصبح كمية حركة الإلكترون $\delta p(t + dt)$ ، حيث:

$$\delta p(t+dt) = \underbrace{\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)}_{\text{إحتمالية عدم التصادم}} \left(\underbrace{\delta p(t)}_{\text{كمية الحركة السابقة}} + \underbrace{Fdt}_{\text{المكتسبة}} \right) \qquad (3.6)$$

$$\delta p(t+dt) = \delta p(t) + Fdt - \frac{dt}{\tau}\delta p(t) - \frac{dt^2}{\tau}F \qquad (3.7)$$

يمكن إهمال الحد الرابع المتناهي في الصغر أمام باقي الحدود، و منه:

$$\frac{d\delta p\,(t)}{dt} = \frac{\delta p\,(t+dt) - \delta p\,(t)}{dt} = F - \frac{\delta p\,(t)}{\tau} \qquad (3.8)$$

تمثل F القوة المحركة و $\frac{\delta p\,(t)}{\tau}$ القوة المعيقة المتعلقة بالتصادمات من خلال τ . العلاقة (2.39) تمثل معادلة الحركة للإلكترون مع وجود التصادمات.

يمكن كتابة هذه المعادلة بدلالة السرعة،:

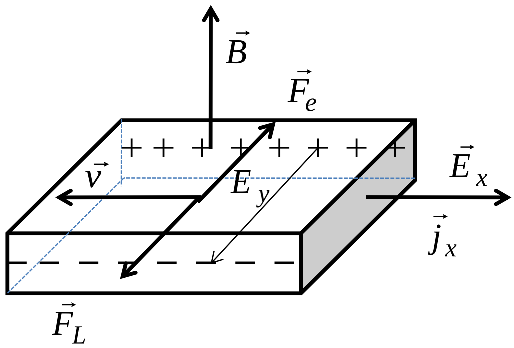
$$m\frac{d\delta v\,(t)}{dt} + m\frac{\delta v(t)}{\tau} = F \qquad (3.9)$$

و كثافة التيار :

$$\boldsymbol{j(t)} = -ne\frac{\boldsymbol{\delta p(t)}}{m} \qquad (3.10)$$

3.2.3 ظاهرة هول:

لوحظت ظاهرة هول (نسبة للعالم هول) عند وجود حقل كهربائي و حقل مغناطيسي في آن واحد و من خلالها نتمكن من تحديد كل من نوع و تركيز حاملات الشحنة. يوضح الشكل 2.1 مخططا لهذه التجربة. نسلط حقلا مغناطيسيا ثابتا و عموديا حثه $\vec{B}$ في الإتجاه (oz) على صفيحة معدنية يمر بها تيار كهربائي كثافته $\vec{j}_x$.



الشكل 2.1

عندئذ تتأثر الإلكترونات في الصفيحة بقوة لورانتز الناشئة من كل من الحقل الكهربائي و المغناطيسي:

$$\vec{F}_L = -q\vec{v} \wedge \vec{B} \qquad (3.11)$$

حيث $\vec{v}$ هي سرعة الإلكترونات في إتجاه القوة الكهربائية $-q\vec{E}_x$. تعمل قوة لورانتز على حرف الإلكترونات عن مسارها فتتجمع على حافة الصفيحة مشكلة شحنة سالبة. أما على الوجه المقابل و نظرا لتعادل الشحنة في المعدن فتظهر شحنة موجبة. نتيجة لذلك ينشأ حقل كهربائي عرضي E_y بإتجاه y مما يعني قوة كهربائية عرضية $\vec{F}_e$. هذه القوة معاكسة في الإتجاه لقوة لورانتز و عندما تتساوى معها في الشدة تتوقف عملية تراكم الشحنات و نتحصل على حالة إتزان وفق الإتجاه (oy) . أي:

$$-q\left|\vec{v} \wedge \vec{B}\right| = -qE_y \Rightarrow v \cdot B = E_y \Rightarrow j_x = -qn\frac{E_y}{B}$$

$$R_H = -\frac{1}{qn} = \frac{E_y}{j_x B} \qquad (3.12)$$

يسمى R_H بمعامل هول للمعدن ويقاس عمليا لتحديد تركيز الإلكترونات في المعدن. من خلال تركيز الإلكترونات و تركيز الذرات (النسبة بينهما) نتمكن من تحديد تكافؤ المعدن.

المقارنة مع التجربة: بإستخدام القياسات التجريبية و حساب معامل هول حسب النموذج البسيط :

- وجد أن التكافؤ Z للمعادن النبيلة كالذهب و الفضة و التي هي أحادية التكافؤ يتراوح بين 1.3 و 1.5.
- ظهرت قيمة R_H موجبة لبعض المعادن ثنائية التكافؤ مثل البريليوم Be و المغنيزيوم Mg حيث أعطى $Z\sim 0.2 - 0.4$, و لبعض المعادن ثلاثية التكافؤ مثل الأليمنيوم Al و الإنديوم In مع $Z\sim 0.3$.
- تبين التجارب أن R_H متعلق بالحقل المغناطيسي و درجة الحرارة و ليس قيمة ثابتة.

4.2.3 تعميم :

نعتبر أن الحقل الكهربائي ثابت بثلاث مركبات بالإضافة للحقلا المغناطيسي الثابت بمركبة واحدة حثه B وفق الإتجاه (oz) . تكتب معادلة الحركة للإلكترون في هذه الحال كما يلي:

$$m\frac{\boldsymbol{\delta v}}{\tau} = -e\boldsymbol{E} - e\boldsymbol{\delta v} \wedge \boldsymbol{B} \tag{3.13}$$

$$\delta v \wedge B = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ \delta v_x & \delta v_y & \delta v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \delta v_y B i - \delta v_x B j$$

$$\begin{cases} m\frac{\delta v_x}{\tau} = -eE_x - e\delta v_y B \\ m\frac{\delta v_y}{\tau} = -eE_y + e\delta v_x B \\ m\frac{\delta v_z}{\tau} = -eE_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x - \frac{e\tau}{m}\delta v_y B \\ \delta v_y = -\frac{e\tau}{m}E_y + \frac{e\tau}{m}\delta v_x B \\ \delta v_z = -\frac{e\tau}{m}E_z \end{cases}$$

$$\delta v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x - \frac{e\tau}{m}\left(-\frac{e\tau}{m}E_y + \frac{e\tau}{m}\delta v_x B\right)B = -\frac{e\tau}{m}E_x + \left(\frac{e\tau}{m}\right)^2 BE_y - \left(\frac{e\tau B}{m}\right)^2 \delta v_x$$

$$\delta v_x = \frac{-\frac{e\tau}{m}\left(E_x - \frac{e\tau B}{m}E_y\right)}{\left(1+\left(\frac{e\tau B}{m}\right)^2\right)}$$

نضع $\omega_c = \frac{eB}{m}$ ، يسمى ω_c بالتردد السيكلوتروني.

$$\delta v_x = \frac{-\frac{e\tau}{m}(E_x - \omega_c\tau E_y)}{(1+(\omega_c\tau)^2)} \tag{3.14}$$

بطريقة مماثلة نجد :

$$\delta v_y = \frac{-\frac{e\tau}{m}(E_y + \omega_c\tau E_x)}{(1+(\omega_c\tau)^2)} \tag{3.15}$$

و منه كثافة التيار في هذه الحالة:

$$j_x = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{(E_x - \omega_c\tau E_y)}{(1+(\omega_c\tau)^2)}$$

$$j_y = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{(E_y + \omega_c\tau E_x)}{(1+(\omega_c\tau)^2)}$$

$$j_z = \frac{ne^2\tau}{m}E_z$$

يمكن التعبير عن التيار بشكل مصفوفي:

$$\begin{bmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{(1+(\omega_c\tau)^2)}\begin{bmatrix} 1 & -\omega_c\tau & 0 \\ \omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(\omega_c\tau)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0}{(1+(\omega_c\tau)^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\omega_c\tau & 0 \\ \omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(\omega_c\tau)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

إذن بوجود حقل كهربائي و حقل مغناطيسي ثابتين، تأخذ الناقلية شكلا مصفوفيا. مركبة الناقلية وفق الإتجاه oz الذي هو إتجاه الحقل المغناطيسي، لا تتعلق به ، بخلاف باقي المركبات التي تتأثر بالحقل المغناطيسي.

5.2.3 الناقلية الكهربائية المتناوبة :

بوجود حقل كهربائي متناوب $E_0 exp(i\omega t)$ ، تصبح الناقلية الكهربائية أيضا متناوبة، تكتب معادلة الحركة كما يلي:

$$m\frac{d\delta v(t)}{dt} + m\frac{\delta v(t)}{\tau} = F = -eE_0 exp(i\omega t) \quad (3.17)$$

$$\delta v(t) = \delta v_0 exp(i\omega t)$$

$$i\omega m\delta v_0 exp(i\omega t) + \frac{m}{\tau}\delta v_0 exp(i\omega t) = -eE_0 exp(i\omega t)$$

$$\delta v_0(\omega) = -\frac{\frac{e\tau E_0}{m}}{(1+i\omega\tau)}$$

و منه كثافة التيار :

$$j(\omega) = -en\delta v_0(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{E_0}{(1+i\omega\tau)} \quad (3.18)$$

و الناقلية الكهربائية :

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{(1+i\omega\tau)} \quad (3.19)$$

أهم تطبيق لهذه الدراسة هو تفاعل موجة كهرومغناطسية ممثلة بحقليها الكهربائي و المغناطيسي (المتعامدان) مع الإلكترونات الحرة في المعدن.

حتى تبقى الدراسة الكلاسيكية صالحة لهذا التفاعل ، يجب أن يكون طول الموجة الكهرومغناطسية كبير جدا مقارنة بالمسار الحر الوسطي للإلكترونات الحرة. أي أن الحقل الكهربائي لا يتعلق إلا بالزمن و لا يتعلق بالموضع. التيار الكهربائي الناتج عن الحقل الكهربائي للموجة الكهرومغناطسية كما سبق و أن حددناه:

$$\boldsymbol{j}(\omega) = \sigma(\omega)\cdot\boldsymbol{E}(\omega) \quad (3.20)$$

بالنسبة للأمواج الكهرومغناطسية فإن تأثير القوة المغناطسية على الإلكترونات الحرة للمعدن مهمل أمام تأثير القوة الكهربائية. الموجة الكهرومغناطيسية داخل المعدن خاضعة لمعادلات ماكسويل التي تكتب كما يلي :

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0\,, \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \nabla\wedge\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \nabla\wedge\boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon_r}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \quad (3.21)$$

حيث $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ سرعة الضوء، $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ و $\mu_0 = 1$ للمعادن اللافيرومغناطيسية، ε_0 نفاذية الفراغ. إذن معادلة الإنتشار للحقل الكهربائي تكتب كما يلي :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{E}) = -\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\nabla \wedge \boldsymbol{B})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{\varepsilon_r}\boldsymbol{E} + \mu_0\boldsymbol{j}\right) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

و منه تكتب المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية للحقل الكهربائي كما يلي :

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{C^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon_r} - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\boldsymbol{E} = 0 \quad (3.23)$$

يمثل المقدار $\varepsilon(\omega) = \boldsymbol{\varepsilon_r} - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$ ثابت العزل النسبي المركب. بإعتبار المعدن كغاز من الإلكترونات الحرة (وكأنه فراغ محتوي على إلكترونات حرة) فإن ثابت العزل النسبي $\boldsymbol{\varepsilon_r} = 1$. بتعويض الناقلية الكهربائية المتناوبة بعلاقتها السابقة نجد :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - i\frac{1}{\varepsilon_0\omega}\frac{\sigma_0}{(1+i\omega\tau)} = 1 - i\frac{1}{\varepsilon_0\omega}(1-i\omega\tau)\frac{\sigma_0}{(1+\omega^2\tau^2)} \quad (3.24)$$

من أجل الترددات العالية $\omega\tau \gg 1$ ، يتبسط ثابت العزل كما يلي :

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - i\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega^3\tau^2}(1-i\omega\tau) = 1 - i\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega^3\tau^2} - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega^2\tau} \approx 1 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega^2\tau} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{1}{\varepsilon_0\omega^2\tau}\frac{ne^2\tau}{m} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_0 m}\frac{ne^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (3.26)$$

يسمى $\omega_p = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$ بتردد البلازما ، و هو التردد الذي يفصل بين الترددات التي تتخامد فيها الموجة الكهرومغناطيسية (بوجود إنعكاس قوي و بالتالي سمك إختراق ضعيف) و الترددات التي تنفذ بها الموجة عبر المعدن و تؤدي إلى الحركة المتناوبة لغاز الإلكترونات المعدن.

بالفعل نلاحظ أنه في حالة كون ثابت العزل حقيقيا (مجال الترددات العالية من تحت الحمراء فما فوق) و من أجل الترددات الأقل من ω_p فإن ثابت العزل يكون سالبا ما يعني أن الموجة متخامدة أي تخترق المعدن بسمك ضعيف و تنعكس بشدة (مثلا إنعكاس الضوء المرئي على سطح المعدن). في حين أنه إذا كان ثابت العزل موجب $\omega > \omega_p$ هذا يعني أن الموجة منتشرة و تنفذ من خلال المعدن و بالتالي فالمعدن يكون شفاف لهذه الموجة (مثلا الأشعة فوق البنفسجية و أشعة اكس تنفذ من خلال المعدن). في هذه الحالة يكون المعدن كبلازما بسبب الحركة الجماعية للإلكترونات بشكل متناوب و التي تشكل القطب السالب للمعدن في حين أن الأيونات الثابتة تشكل قطبه الموجب.

يتعلق تردد البلازما بتركيز الإلكترونات في المعدن و بزمن التصادم .

فعل الجلد أو فعل كلفن:

هذا الفعل خاصية مميزة للمعادن عند تفاعلها مع الموجة الكهرومغناطيسية و عندما يكون تيار الإزاحة $\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon_r}\boldsymbol{E}$ مهمل أمام تيار النقل $\boldsymbol{j}$. أي أن العلاقة (3.22) تتبسط إلى :

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - i\mu_0\omega\sigma\boldsymbol{E} = 0 \quad (3.27)$$

و بما أن $\boldsymbol{j} = \sigma \cdot \boldsymbol{E}$ إذن معادلة الإنتشار للتيار الكهربائي المتناوب تكتب كما يلي :

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{j} - i\mu_0\omega\sigma\boldsymbol{j} = 0 \qquad (3.28)$$

إذا إعتبرنا أن الناقل أسطواني و ذو طول لا نهائي حسب الإتجاه (ox) حيث يكون تدفق التيار وفق الإتجاه (ox) ، إذن التيار لا يظهر تغيرات وفق (ox) ، بينما يتغير وفق العمق (oz) . إذن تكتب معادلة كثافة التيار :

$$\frac{\partial^2 j_x}{\partial z^2} - i\mu_0\omega\sigma j_x = 0 \qquad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{j_x}(z)}{\partial z^2} - i\mu_0\omega\sigma\overline{j_x}(z) = 0 \ , \ j_x(z,t) = \overline{j_x}(z)exp(i\omega t) \qquad (3.30)$$

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية :

$$D^2 = i\mu_0\omega\sigma \Longrightarrow D = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\omega\sigma}$$

الحل المقبول و الذي له معنى هو ذو الإشارة السالبة في الأسية لأنه يعبر عن نقصان التيار كلما تعمقنا داخل الناقل.

$$\overline{j_x}(z) = Aexp\left(-(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}z\right) = Aexp\left(-(1+i)\frac{z}{\delta}\right) \ ; \ j_x = Aexp\left(-(1+i)\frac{z}{\delta}\right)exp(i\omega t)$$

$$j_x = Aexp\left(-\frac{z}{\delta}\right)expi\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \qquad (3.31)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}} \qquad (3.32)$$

إذن كثافة التيار تقل كلما تعمقنا داخل الناقل وفق الإتجاه oz . يعرف هذا الفعل بفعل الجلد أو فعل كلفن و يسمى δ بسمك الجلد . يتعلق بالناقلية الكهربائية و التردد. مثلا من أجل النحاس ذو الناقلية $\sigma = 5.8 \times 10^7 sm^{-1}$ و من أجل الترددات المنخفضة نسبيا $50\ Hz$ يكون سمك الجلد في حدود $\delta = 9.3\ mm$ و هو ما يتعدى نصف قطر أسلاك النحاس ، إذن فالتيار ينتقل على كل الناقل . أما من أجل ترددات في حدود $1MHz$ يقل سمك الجلد $\delta = 66\ \mu m$ و يقتصر نقل التيار على السطح و تزداد الإستطاعة الضائعة بفعل جول.

3.3 الناقلية الحرارية في المعادن:

يتم نقل الحرارة في المعادن أساسا بواسطة إلكترونات النقل , بخلاف العوازل التي يتم النقل فيها بواسطة إهتزاز الذرات (الفونونات). بالنسبة لغاز مثالي تعطى الناقلية الحرارية بالعلاقة التالية:

$$K = \frac{1}{3}C_v\langle v^2\rangle\tau \qquad (3.33)$$

طبقا لنموذج درود و بمماثلة غاز الإلكترونات مع غاز الجزيئات المثالي, يمكن تطبيق علاقة الناقلية الحرارية المخصصة للغازات الجزيئية على غاز الإلكترونات. بإعتبار السعة الحرارية $C_v = \frac{3}{2}nk_B$ و السرعة الحرارية $\langle v^2\rangle = \frac{3k_BT}{m}$ نجد:

$$K_e = \frac{3nk_B^2T\tau}{2m} \qquad (3.34)$$

بالنسبة لعدد كبير من المعادن تكون النسبة بين الناقلية الحرارية و الناقلية الكهربائية جداء درجة الحرارة ثابتة و تسمى بعدد لورانز :

$$L = \frac{K_e}{\sigma \cdot T} = \frac{3nk_B^2 T\tau}{2m} \cdot \frac{m}{ne^2\tau T} = \frac{3}{2}\frac{k_B^2}{e^2} = 1.11 \times 10^{-8} \left(\frac{V}{K}\right)^2 \qquad (3.35)$$

هذه القيمة قريبة من القيمة التجريبية لعدد كبير من المعادن و التي في حدود $2.31 - 2.11 \times 10^{-8}$. لكن ذلك لا يعني صلاحية نموذج درود. إقتراب عدد لورانز لدرود من القيمة التجريبية ناتج عن خطأين يلغي أحدهما الآخر. فقيمة السعة الحرارية الحقيقة للإلكترونات أقل بمئة مرة عن قيمتها حسب درود أما قيمة مربع السرعة الحقيقية فهو أكبر بمئة مرة.

4.3 نموذج لورانتز (1905):

بغرض تحسين نموذج درود، قام لورانتز بإدخال تصحيح على نظرية درود. حيث إفترض أن الإلكترونات لا تملك نفس السرعة الحرارية التي إعتمدها درود $\left(v_{th} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}\right)$ و إنما تخضع لتوزيعة إحصائية هي التوزيعة الكلاسيكية لماكسويل–بولتزمان.

تعطى توزيعة ماكسويل–بولتزمان بدلالة الطاقة كما يلي:

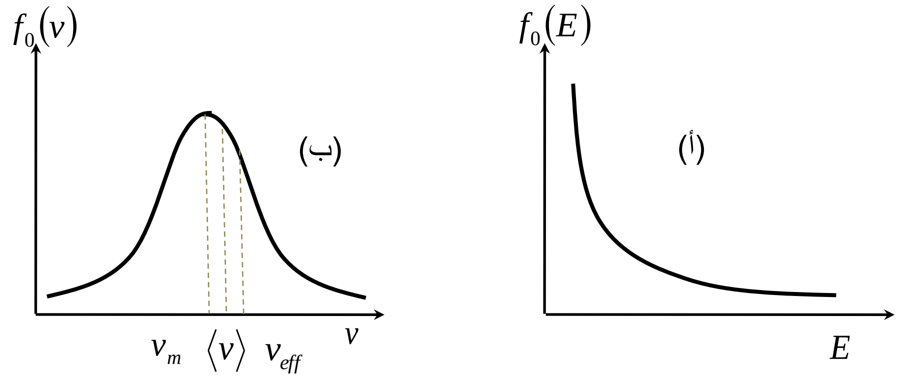
$$f_0(E) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right) \qquad (3.36)$$

أو بدلالة السرعة :

$$f_0(v) = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T}\right) \qquad (3.37)$$

و هي تمثل إحتمالية إمتلاك الإلكترون لطاقة E (سرعة v) حيث تتغير طاقة الإلكترونات و لا تكون متماثلة كما هي الحال في نموذج درود. ثابت الإستنظام في العلاقة (3.37) $A = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}$ أختير بحيث $\int_0^\infty f_0(v)\, d^3v = \frac{N}{V}$.

نوضح في الشكل 3.1 (أ) و (ب) إحتمالية ماكسويل بدلالة الطاقة و بدلالة السرعة على التوالي.



الشكل 3.1

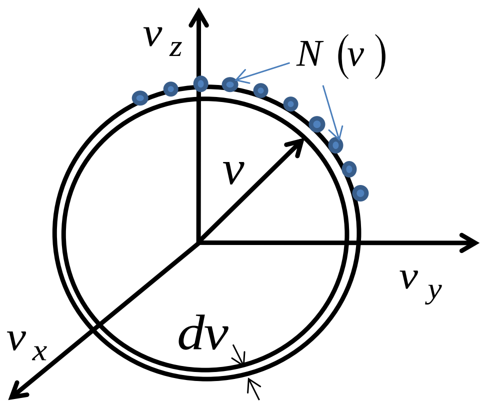
مفتاح.آف

في الشكل 3.1 (ب) تمثل v_m السرعة الموافقة لأكبر إحتمال، $\langle v\rangle$ السرعة المتوسطة، و v_{eff} السرعة الفعلية.

تمثل العلاقة $\frac{1}{2}mv^2$ في فضاء السرع (v_x, v_y, v_z) معادلة كرة، سطحها يسمى بسطح تساوي الطاقة :

$$\frac{2E}{m} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{3.38}$$

على سطحها نتمكن من تحديد كثافة الإلكترونات $N(v)$ ذات السرعة v و التي تشترك في نفس الطاقة.



الشكل 4.1

تركيز الإلكترونات في الحجم العنصري $4\pi v^2 dv$ للإكليل هو :

$$dn(v) = f_0(v)\cdot 4\pi v^2 dv = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T}\right)\cdot 4\pi v^2 dv \tag{3.39}$$

من خلاله نتمكن من تحديد كثافة الإلكترونات $N(v)$ ذات السرعة v و التي تشترك في نفس الطاقة :

$$dn(v) = N(v)\cdot dv \Rightarrow N(v) = n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T}\right)\cdot 4\pi v^2 \tag{3.40}$$

$$P(v) = \frac{N(v)}{n} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T}\right)\cdot 4\pi v^2 \tag{3.41}$$

$P(v)$ تمثل إحتمالة الإسكان بالإلكترونات حسب الإحصاء الكلاسيكي لماكسويل–بولتزمان و بإعتبار التناظر الكروي لغاز الإلكترونات في فضاء السرع. من خلال $P(v)$ نتمكن من تحديد كل من السرعة الموافقة للإحتمال الأعظمي، السرعة المتوسطة و السرعة الفعالة بإستخدام العلاقات التالية:

$$v_m\left(\frac{dP(v)}{dv} = 0\right), \langle v\rangle = \int_0^\infty v\cdot P(v)\,dv, v_{eff}^2 = \int_0^\infty v^2\cdot P(v)\,dv \tag{3.42}$$

إذن حسب لورانتز من أجل سرعة معينة v هناك مجموعة $N(v)$ فقط من الإلكترونات التي تشترك في نفس السرعة و السرعة متغيرة، خلافا مع درود الذي يفرض أن كل الإلكترونات لها نفس السرعة و هي السرعة الحرارية $\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$.

1.4.3 الناقلية الكهربائية :

تحت تأثير حقل كهربائي خارجي منتظم غير قوي، تتغير دالة التوزيع من f_0 إلى f و يمكن كتابة تغير f خلال الزمن كما يلي:

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Cham} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Coll} \qquad (3.43)$$

الحد (1) ناشئ عن الحقل الكهربائي و الحد (2) عن التصادم. بإعتبار أن الحقل غير قوي، فإن إنسحاب f يكون صغير $f - f_0 \ll 1$ و يحدث دون أن يتغير شكلها. إذا إفترضنا أن الحقل المطبق وفق (oy) فإن إنزياح f أيضا يكون وفق نفس الإتجاه:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Cham} = \frac{\partial f}{\partial v_y}\cdot\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{-eE_y}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_y} \qquad (3.44)$$

بالنسبة لحد التصادم فيعرف بدلالة زمن التصادم τ_r كما يلي:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} = \frac{f - f_0}{\tau_r} \qquad (3.45)$$

و منه تغيرات دالة التوزيع مع الزمن تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{df}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{Cham} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{coll} = \frac{-eE_y}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_y} + \frac{f - f_0}{\tau_r} \qquad (3.46)$$

في النظام المستقر، $\frac{df}{dt} = 0$ ، و منه :

$$f = f_0 + \frac{e\tau_r E_y}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial v_y} \qquad (3.47)$$

$$f - f_0 \ll 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v_y} \approx \frac{\partial f_0}{\partial v_y} = \frac{\partial v}{\partial v_y}\frac{\partial f_0}{\partial v}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow 2v\frac{\partial v}{\partial v_y} = 2v_y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial v_y} = \frac{v_y}{v}$$

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2 \Rightarrow \frac{v_y}{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\partial f_0}{\partial v_y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial f_0}{\partial v}$$

$$f = f_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{e\tau_r E_y}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v} \qquad (3.48)$$

نحسب الآن كثافة التيار j_y :

مفتاح.آف

$$j_y = -e\int v_y \cdot dn = -e\int_0^{\infty} v_y \cdot \left(f_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{e\tau_r E_y}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)4\pi v^2 dv \qquad (3.49)$$

الحد الأول يمثل كثافة التيار عند التوازن و بالتالي يكون معدوما:

$$j_{y0} = -e\int_0^{\infty} v_y \cdot f_0 \cdot 4\pi v^2 dv = 0 \qquad (3.50)$$

و منه يبقى فقط حساب الحد :

$$j_y = -e\int_0^{\infty}\frac{v}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{e\tau_r E_y}{m}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)4\pi v^2 dv = \frac{4\pi e^2 E_y}{3m}\int_0^{\infty} v\cdot\frac{\lambda}{v}\cdot\left(-\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)v^2 dv$$

$$j_y = \frac{4\pi e^2\lambda E_y}{3m}\int_0^{\infty}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)v^2 dv \qquad (3.51)$$

بعد تعويض $f_0(v)$ بعبارتها و المكاملة نجد:

$$j_y = \frac{4\pi e^2\lambda}{3(2\pi m\, k_B T)^{1/2}}\; E_y \qquad (3.52)$$

و منه تأخذ الناقلية العبارة التالية:

$$\sigma = \frac{4\pi e^2\lambda}{3(2\pi m\, k_B T)^{1/2}} \qquad (3.53)$$

نلاحظ أن هذه العلاقة مشابهة لعلاقة درود، $\sigma \propto T^{-1/2}$ ، و النسبة بينهما تقترب من 1:

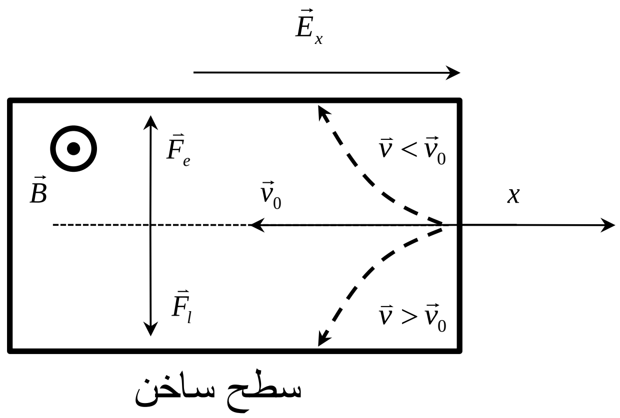
$$\frac{\sigma_L}{\sigma_D} \approx 1.09 \qquad (3.54)$$

و بالتالي و بالرغم من أن لورانتز حاول أن يأخذ بعين الإعتبار وجود توزيعة إحصائية لسرعة الإلكترونات ، إلا أنه وجد عبارة الناقلية الكهربائية لا تختلف كثيرا عن عبارة درود التي لا تتوافق مع التجربة.

2,3,4 الناقلية الكهربائية بوجود حقل مغناطيسي:

بإعتبار نموذج لورانتز، تتناقص الناقلية الكهربائية بتعريض المعدن لحقل مغناطيسي. و كلما زادت قيمة الحقل المغناطيسي كلما تناقصت الناقلية الكهربائية أكثر. ذلك أن لسرعة الإلكترونات توزيعة بولتزمانية و التوازن بين قوة لورانتز الناشئة من الحقل المغناطيسي و قوة الحقل الكهربائي العرضي (حقل هول) يتم فقط من أجل بعض الإلكترونات ذات السرعة v_0 الموافقة للتوزان. في حين أن الإلكترونات التي تتحرك بسرعة أكبر أو أصغر من v_0 سوف تنحرف و تسلك مسارا منحنيا بين طرفي العينة. و هذه الإنحرافات تعني نقصان عدد الإلكترونات المساهمة في النقل الكهربائي (أي نقصان الناقلية).

نوضح ذلك بشكل أكثر تفصيلا فيما يلي:



الشكل 1.5

من أجل الإلكترونات ذات السرعة لدينا:

$$\vec{F}_l + \vec{F}_e = \vec{0} \tag{3.55}$$

$$v_0 = \frac{E_y}{B} \tag{3.56}$$

الإلكترونات ذات السرعة v_0 لا تنحرف، بل تستمر وفق الإتجاه (ox) . الإلكترونات التي لها سرعة أكبر من v_0 أي $\vec{F}_l > \vec{F}_e$ ، تنحرف نحو الجانب الأيسر من المعدن. أما الإلكترونات التي لها سرعات أقل من v_0، فتنحرف نحو الجانب الأيمن للمعدن. تؤدي عملية الصدم للإلكترونات السريعة إلى تسخين الوجه الأيسر ، مما ينتج فرقا في درجة الحرارة بين الوجهين و تسمى هذه الظاهرة **بظاهرة أيمنكسهاوزن**.

تمارين السلسلة 3

التمرين 1:

تحت تأثير حقل كهربائي خارجي ثابت $\vec{E}$ يتعرض إلكترون إلى قوة الحقل $\vec{F}$.

1. طبق قانون نيوتن الثاني و أكتب معادلة الحركة. إستنتج معدل السرعة المكتسبة.
2. بإستخدام عبارة كثافة التيار أوجد عبارة الناقلية الكهربائية σ .
3. أعط عبارة كل من الطاقة الحركية و السرعة الحرارية للإلكترون حسب نموذج درود.
4. إستنتج عبارة الناقلية الكهربائية بدلالة درجة الحرارة. و هل تتوافق مع الملاحظات التجريبية؟
5. إستنتج عبارة الناقلية الحرارية.

التمرين 2:

صفيحة معدنية نسلط عليها وفق الإتجاه (ox) حقل كهربائي مستمر E_x و وفق الإتجاه (oz) حقل مغناطيسي حثه $\vec{B}$.

1. ما الذي يحدث للإلكترونات ؟
2. إستنتج عبارة حقل هول.
3. أوجد عبارة معامل هول.

التمرين 3:

نعتبر إلكترونا حرا يتحرك بنحو عشوائي في معدن و نفرض أن دالة كثافة الإحتمال حتى يتعرض لتصادم مع أيون عند زمن t معطاة بالعلاقة التالية : $p_r(t) = \frac{1}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}$ ، τ متوسط زمن التصادم.

1. حدد متوسط الفترة الزمنية التي يتعرض خلالها الإلكترون للتصادم التالي ، $\bar{t} = \int_0^\infty t p_r(t) dt$.
2. حدد مربع متوسط الفترة الزمنية التي يتعرض خلالها الإلكترون للتصادم التالي ، $\overline{t^2} = \int_0^\infty t^2 p_r(t) dt$.
3. حدد الإنحراف القياسي Δt للفترة الزمنية التي يتعرض الإلكترون خلالها للتصادم التالي ، $\Delta t = \sqrt{\overline{t^2} - \bar{t}^2}$.

التمرين 4:

دراسة تفاعل موجة كهرومغناطيسية مع الإلكترونات القلبية للمعدن. نعتبر الإلكترون المرتبط مع الذرة يتعرض للقوة الخارجية للحقل الكهربائي المتناوب $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_0} e^{i\omega t}$ ، قوة الإحتكاك و قوة الإرجاع $K \cdot x$. حيث K معامل المرونة. بغياب القوة الخارجية يهتز الإلكترون بتردد ثابت $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

1. أكتب معادلة الحركة للإلكترون المرتبط بدلالة الموضع x .

2. أوجد سعة إهتزاز الإلكترون x_0 بدلالة ω ، ω_0 و $\boldsymbol{E_0}$.

3. يشكل الإلكترون مع الأيون ثنائي قطب . حدد عبارة الإستقطابية الكهربائية المعرفة بـ: $\mathrm{P} = -enx$.

4. التيار الكهربائي الناشئ عن الحركة الإهتزازية لإلكترون القلب يعطى بالعلاقة : $\boldsymbol{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$. إستنتج الناقلية الكهربائية .

التمرين 5:

حسب نموذج لورانتز لا تملك جميع الإلكترونات الحرة نفس السرعة و إنما تخضع لإحتمالية ماكسويل بولتزمان الكلاسيكية المعطاة بـ :

$$P(v) = \frac{N(v)}{n} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} exp\left(\frac{-mv^2}{2k_B T}\right) \cdot 4\pi v^2$$

1. أثبت أن $\int_0^\infty P(v)\,dv = 1$.

2. حدد عبارة السرعة الموافقة للإحتمال الأعظمي، $\left(\frac{dP(v)}{dv} = 0\right)$ v_m .

3. السرعة المتوسطة $\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot P(v)\,dv$.

4. السرعة الفعالة $v_{eff}^2 = \int_0^\infty v^2 \cdot P(v)\,dv$.

إستعن بالتكامل $\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.