Université de Biskra
Faculté des Sciences Technologique
Département de Génie Mécanique

COURS
Turbomachine Approfondie

MASTER I

Année universitaire 2018-2019

Chapitre I : Principes de base des turbomachines à fluides compressibles

Les lois fondamentales

Ce chapitre résume les lois physiques de base de la mécanique des fluides et de la thermodynamique, les développements sont sous une forme adaptée à l'étude des turbomachines. Nous aborderons alors les propriétés des fluides, relations d'écoulement compressibles et rendement de la compression et de la détente.

Les lois discutées seront :

1. l'équation de la continuité de l'écoulement ;
2. la première loi de la thermodynamique et l'équation de l'énergie à flux constant ;
3. l'équation de mouvement ;
4. la deuxième loi de la thermodynamique.

Toutes ces lois sont présentées de manières générales ; elles sont indépendantes de la nature du fluide : c'est à dire le fluide peut être compressible ou incompressible.

I.1 L'équation de la continuité

Nous considérons l'écoulement du fluide de densité ρ, à travers l'élément de surface dA, durant l'intervalle de temps dt. (voir figure I.1)

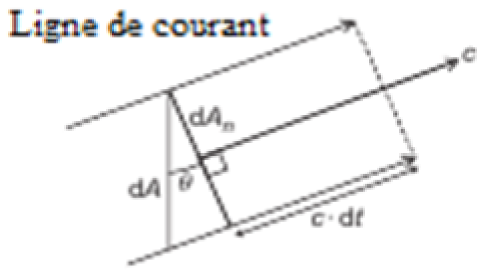


Figure I.1

La masse élémentaire est dm= $\rho\, c\, dt\, dA \cos\theta$

Où c = vitesse de l'écoulement

θ = angle formé par la normale dA_n et l'aire dA

Sur une ligne de courant et désignant A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, ... et A_n sont les surfaces perpendiculaires aux différents points de passages du fluide 1, 2, 3, … et n, alors

$\dot{m} = \rho_1\, c_1\, A_{n1} = \rho_2\, c_2\, A_{n2} = \rho\, c\, A_n$ ceci indique la conservation de masse du fluide lors de l'écoulement. Le débit massique est donné par la relation en un point quelconque de la ligne de courant :

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho\, c\, dA_n$$

I.2 Première loi de la thermodynamique

Cette loi indique la conservation de l'énergie totale d'un système fermé lors s'un cycle de transformations.

$$\oint (dQ - dW) = 0$$

Où : $\oint$ (dQ)= l'énergie calorifique fournie au système pendant le cycle et $\oint$ (dW)= l'énergie (travail) mécanique effectué par le système. Lors du passage du système de l'état 1 à l'état 2, il se produit un échange d'énergie : $E_2 - E_1 = \int_1^2 (dQ - dW)$ où l'énergie du fluide $E = U + \frac{1}{2}(mc^2) + mgz$ se compose de U= énergie interne, $\frac{1}{2}(mc^2)$= énergie cinétique et mgz=énergie potentiel.

La figure I.2 représente le volume de contrôle schématisant une turbomachine à travers laquelle le fluide passe avec un débit $\dot{m}$ de l'entrée 1 à la sortie 2. L'énergie est transférée par le fluide aux aubes du rotor, par convention on considère que le travail mécanique effectué par l'arbre $\dot{W}_x$ est positif, $\dot{Q}$ étant le transfert de chaleur à travers les limites de la turbomachine.

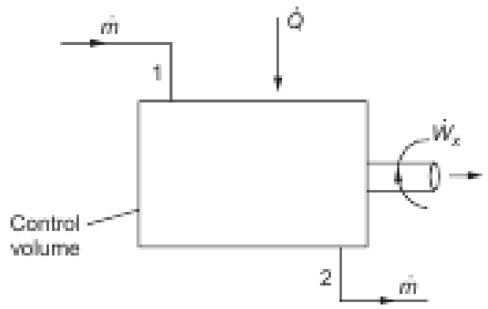


Figure I.2

En respectant la convention des signes, l'équation de conservation d'énergie serait :

$$\dot{Q} - \dot{W}_x = \dot{m}\left[(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1)\right]$$

Où h=enthalpie spécifique, $\frac{1}{2}c^2$= énergie cinétique par unité de masse et g z= énergie potentiel par unité de masse.

Nous définissons l'enthalpie de stagnation : $h_0 = h + \frac{1}{2}c^2$

En générale $g(z_2 - z_1)$ est négligeable, l'équation de conservation d'énergie peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\dot{Q} - \dot{W}_x = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$$

Dans le cas pas d'échange d'énergie calorifique et mécanique, l'enthalpie de stagnation est constante.

La plupart des processus dans les turbomachines sont adiabatique $\dot{Q} = 0$
Exemple pour une turbine l'équation de conservation d'énergie serait de la forme :

$\dot{W}_x = \dot{W}_t = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$ avec $\dot{W}_x > 0$

Et pour un compresseur : $\dot{W}_x < 0$ on écrit alors

$-\dot{W}_x = \dot{W}_c = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$

I.3 L'équation de mouvement

La deuxième loi de Newton de mouvement est l'équation de quantité de mouvement reliant la somme des forces externes agissantes sur une masse élémentaire de fluide à son accélération.

$$\sum \overrightarrow{F_x} = \frac{d}{dt}(m\, c_x) = \dot{m}(c_{x2} - c_{x1})$$

Moment cinétique :

Dans l'étude des turbomachines, l'application de l'équation du moment, résultant de la force exercée τ_A, sur une aube dans une cascade de compresseurs ou de turbines provoquée par la déviation de l'écoulement du fluide dans les canaux d'aubage. En considérant un système de masse m, la somme des moments de toutes les forces externes agissantes sur la masse m de fluide le long d'une direction x arbitraire est égal au taux de variation temporelle de l'impulsion x totale du système, voir figure I.3

$$\tau_A = m\,\frac{d}{dt}(r\, C_\theta)$$

Avec r = distance du centre de masse m à l'axe de rotation A-A, et C_θ = composante de la vitesse perpendiculaire à r (directions tangentielles).

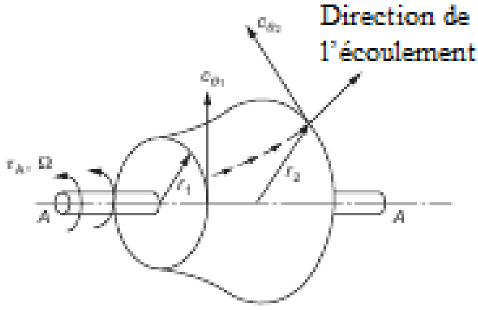


Figure I.3

Equation Euler

Pour un rotor de compresseur fonctionnant à la vitesse angulaire Ω, avec $U = \Omega\, r$ l'énergie mécanique échangée entre le fluide et le rotor est :

$$\dot{W}_c = \tau_A \Omega = \dot{m}\,(U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1})$$

L'énergie mécanique échangée par unité de masse :

$$\Delta W_c = \frac{\dot{W}_c}{\dot{m}} = \frac{\tau_A \Omega}{\dot{m}} = U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1} > 0$$

Dans le cas d'une turbine l'énergie mécanique reçue par unité de masse serait :

$$W_t = \frac{\dot{W}_t}{\dot{m}} = U_1 C_{\theta 1} - U_2 C_{\theta 2} > 0$$

Comme les turbomachines sont de processus adiabatique on peut écrire alors

$$\Delta W_x = h_{01} - h_{02} = U_1 C_{\theta 1} - U_2 C_{\theta 2} = \Delta h_0 = \Delta(UC_\theta)$$

I.4 la deuxième loi de la thermodynamique.

La deuxième loi de la thermodynamique, permet d'introduire le concept d'entropie et de définir des processus thermodynamiques idéaux. Un corollaire important et utile de la deuxième loi de la thermodynamique, connue sous le nom de L'inégalité de Clausius indique que, pour un système subissant un cycle de transformations thermodynamiques impliquant des échanges de chaleur, s'écrit comme suit :

$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$ où dQ est la quantité de chaleur transféré au système à une température absolue T. Si toutes les transformations du cycle sont réversibles, alors $dQ = dQ_R$ ce qui donne l'égalité : $\oint \frac{dQ_R}{T} = 0$. La propriété appelée entropie, pour un changement d'état fini, est alors définie comme $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_R}{T}$ et pour un changement élémentaire $dS = m\, ds = \frac{dQ_R}{T}$ avec m= masse du système considéré.

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel permanent à travers un volume de contrôle dans lequel le fluide subit un changement de l'état 1 à l'entrée à l'état 2 à la sortie, nous aurons la relation suivante

$$\int_1^2 \frac{d\dot{Q}}{T} \leq \dot{m}(S_2 - S_1)$$

Si le changement de l'état est irréversible, on aura une production d'entropie $\Delta S_{irrév}$ alors on a la relation $\dot{m}(S_2 - S_1) = \int_1^2 \frac{d\dot{Q}}{T} + \Delta S_{irrév}$ qui pour un processus adiabatique $d\dot{Q} = 0$ alors $S_2 \geq S_1$ alors que pour le processus réversible l'entropie est constante $S_2 = S_1$

Ainsi, pour un écoulement soumis à un processus à la fois adiabatique et réversible, l'entropie est constante (ce type de processus est appelé isentropique). Puisque les turbomachines sont adiabatiques, ou considérées comme telles, une compression ou une expansion isentropique représente le meilleur processus possible qui peut être atteint. Pour optimiser le rendement, la production d'entropie irréversible $\Delta S_{irrév}$ doit être minimisée, ce qui est l'objectif principal de toute conception.

Plusieurs expressions importantes peuvent être obtenues en utilisant la définition précédente de l'entropie. Pour un système de masse m subissant une transformation réversible $dQ = dQ_R = m\,T\,ds$ et $dW = m\,p\,dv$.

En l'absence de la pesanteur la première loi de la thermodynamique serait :

$$T\,dS = dh + v\,dp$$

Avec h=U+pv, ce qui donne par dérivation dh=dU+pdv+vdp, nous obtenons enfin

$$T\,dS = dh + v\,dp$$

L'entropie est une propriété particulièrement utile pour l'analyse des turbomachines. Toute production d'entropie lors du fonctionnement d'une turbomachine peut être assimilée à une perte de travail et de rendement.

Équation de Bernoulli

Considérons un écoulement permanent adiabatique et sans transfert de travail l'équation d'énergie s'écrit alors :

$$(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2)\,g\,(z_2 - z_1) = 0$$

Appliqué à un volume de contrôle dont l'épaisseur est infinitésimale dans la direction de l'écoulement voir figure I.4, la forme différentielle est de la forme suivante :

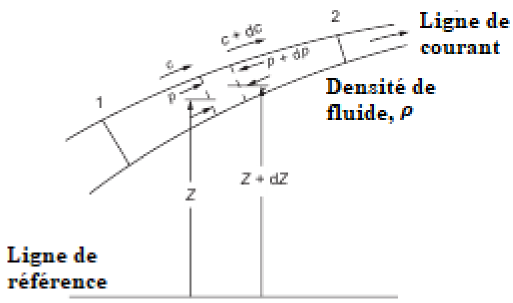
$$dh + cdc + gdz = 0$$

En absence de forces de cisaillement (viscosité) agissantes sur l'écoulement (pas de mélange ni de frottement), alors l'écoulement sera isentropique et on aura :

$$\frac{1}{\rho}\,dp + cdc + gd = 0$$

Par réintégration dans le cas unidimensionnel on aura :

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + g\,(z_2 - z_1) = 0$$



Cas du fluide incompressible :

$$\frac{1}{\rho}\,(p_{02} - p_{01}) + g\,(z_2 - z_1) = 0$$

Où $p_0 = p + \frac{1}{2}\,c^2$ pression de stagnation du fluide incompressible.

Le terme $g\,(z_2 - z_1)$ est en général négligeable alors :

$\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) = 0$, dans un processus isentropique la pression de stagnation est constante.

Ecoulement des fluides et transformations thermodynamiques (Relations)

Les propriétés les plus caractéristiques des fluides sont la pression p, la température T et la densité ρ. Nous également besoin d'examiner comment d'autres propriétés thermodynamiques associées telles que l'énergie interne u, l'enthalpie h, l'entropie s et les chaleurs spécifiques Cp et Cv changent au cours d'un processus.

Des études de thermodynamique statistique ont montré que, dans tous les processus de fluides impliquant un changement de pression, un très grand nombre de collisions moléculaires ont lieu dans un délai extrêmement court intervalle qui signifie que la pression du fluide s'ajuste rapidement à un état d'équilibre. Nous pouvons donc supposer que toutes les propriétés énumérées ci-dessus respecteront les lois et les relations d’état de la thermodynamique à l'équilibre. Nous nous limiterons également aux éléments de substances purs et homogènes tels que : gaz parfaits.

L’air est un mélange de gaz mais, dans la plage de température de 160 à 2100 K, il peut être considéré comme une substance pure et homogène substance. Dans cette plage de température, l'air obéit à la relation de gaz idéale :

$p = \rho\,R\,T$ ou $pv = R\,T$ avec les constantes : c_p, c_v et γ alors la constante des gaz $R = c_p - c_v$ est, on note $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

Calcul de l’entropie pour les gaz parfaits

Dans l'expression $T\,dS = dh + v\,dp$ avec $dh = c_p\,dT$ et $p\,v = R\,T$ nous aurons $T\,dS = c_p\,dT - R\,T\,\frac{dp}{p}$ ce qui donne par intégration lors d'une transformation de l'état 1 à 2 l'expression : $\int_1^2 ds = c_p \int_1^2 \frac{dT}{T} - R \int_1^2 \frac{dp}{p}$ réécrite sous la forme suivante :

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Ecoulements des gaz parfaits compressibles (Relations) :

Pour un écoulement de gaz le nombre de Mach est défini par le rapport de la vitesse de l'écoulement (c) à la vitesse du son (a) : $M = \frac{c}{a}$ et pour un gaz parfait $M = \frac{c}{\sqrt{\gamma R T}}$

Lorsque le nombre $M > 0.3$, le fluide est considéré comme compressible.

A partir de l'enthalpie de stagnation $h_0 = h + \frac{1}{2} c^2$ on peut écrire alors $c_p T_0 = c_p T + \frac{c^2}{2} = \gamma\, T + \frac{M^2\, \gamma\, R\, T}{2}$ avec $\gamma\, R = (\gamma - 1)\, c_p$ on a

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Cas d'une transformation isentropique la relation $dh = \frac{dp}{p}$ est déduite de l'équation : $T\,dS = dh + v\,dp$ et comme le gaz est supposé parfait $p = \rho\, R\, T$ nous obtenons la relation :

$$\frac{dp}{p} = \frac{c_p}{R} \frac{dT}{T} = \frac{dT}{T} \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Par intégration de cette expression entre les conditions statiques et de stagnation nous obtenons pour un écoulement compressible la relation entre la pression de stagnation et statique l'expression :

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/\gamma - 1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/\gamma - 1}$$

L'expression $\frac{dp}{p} = \frac{c_p}{R} \frac{dT}{T} = \frac{dT}{T} \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ peut être intégrée le long de la ligne de courant entre deux points quelconque dans le cas d'écoulement isentropique. Dans ce cas la température de stagnation et pression sont reliés par l'équation :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\gamma/\gamma - 1}$$

La combinaison des équations :

$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2, \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/\gamma-1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\gamma/\gamma-1}$ et de $p = \rho R T$

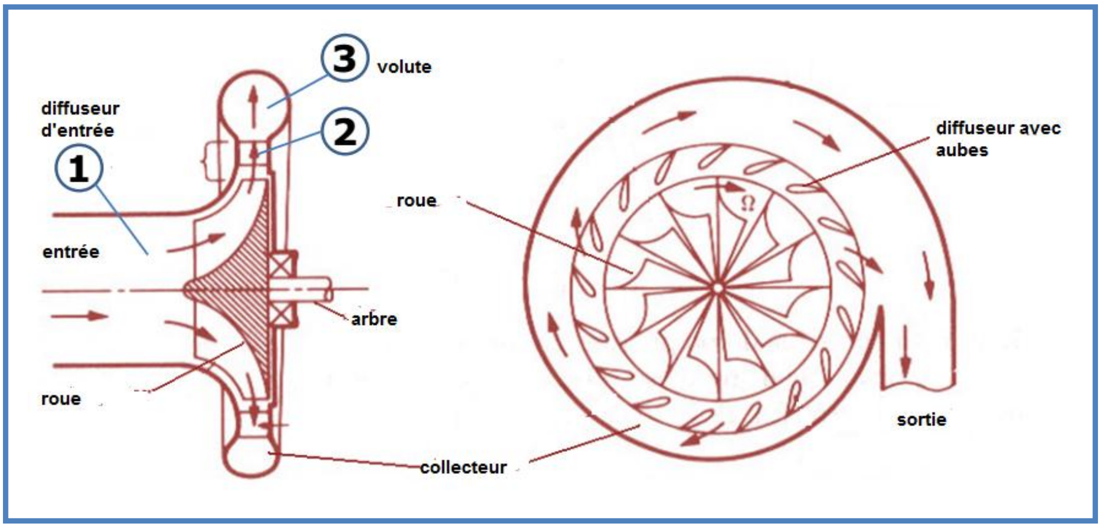
Nous obtenons pour la densité : $\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/\gamma-1}$

Et enfin la relation générale pour les turbomachines

$$\frac{m\sqrt{c_p T_0}}{A_n p_0} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma - 1}} M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

Chapitre II : Compresseur centrifuge

2.1) Généralités : Les turbocompresseurs peuvent être des compresseurs centrifuges (fig.2.1), dans lesquels le parcours du gaz dans les roues est dirigé du centre vers la périphérie. Donc l'énergie de gaz comprimé augmente grâce à la force centrifuge qui est provoquée par le mouvement de rotation des roues des aubes. Les compresseurs centrifuges sont employés pour des hauteurs manométriques élevées.



Leur rôle est de transformer l'énergie cinétique en énergie de pression statique dans le stator, les rotors permettent d'augmenter l'énergie cinétique et la pression statique en même temps.

2.2) constitution des compresseurs centrifuges :

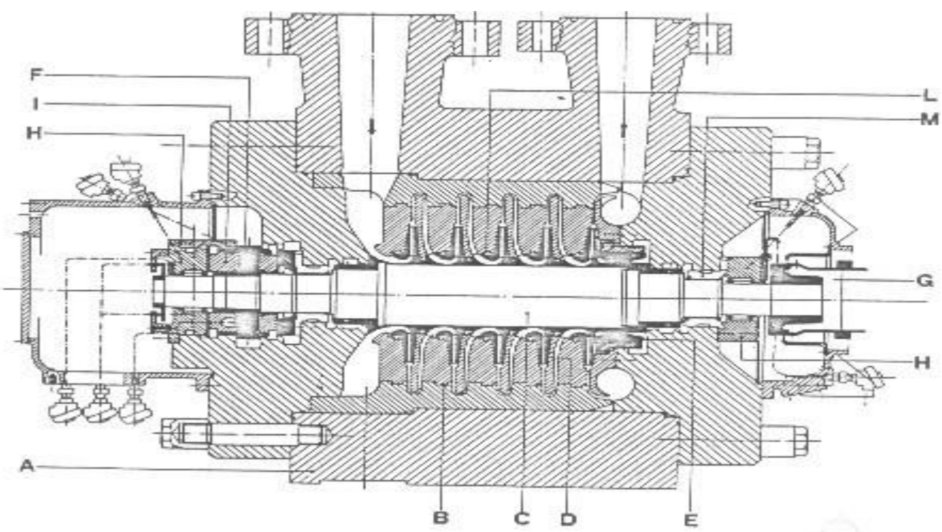


Fig2.2: Compresseur centrifuge

Ce type de machine est constitué par (fig.2.2): un corps extérieur (A) contenant la partie du stator dite ensemble de diaphragmes (B) où est introduit un rotor formé par un arbre (C) (figure(2.3), une ou plusieurs roues (D), le tambour ou piston d'équilibrage (E), le collet du palier de butée (F).

Le rotor entraîné par la machine motrice tourne sur les paliers porteurs (H), il est gardé dans sa position axiale par le palier de butée (I).

Des dispositifs d'étanchéité à labyrinthe (L), si nécessaire et des étanchéités d'huile d'extrémité agissent sur le rotor

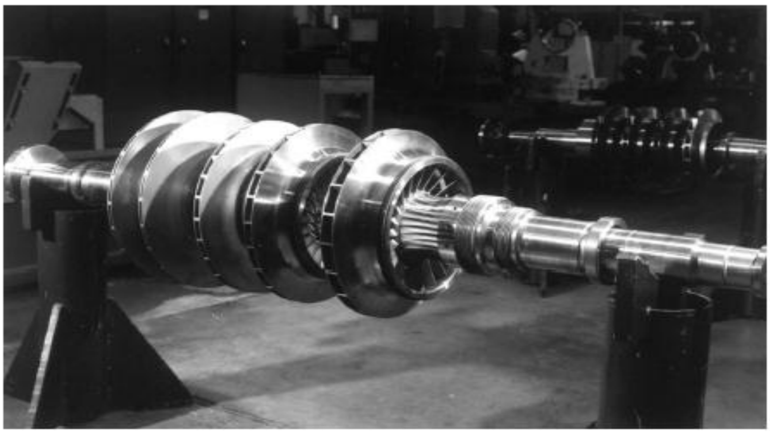
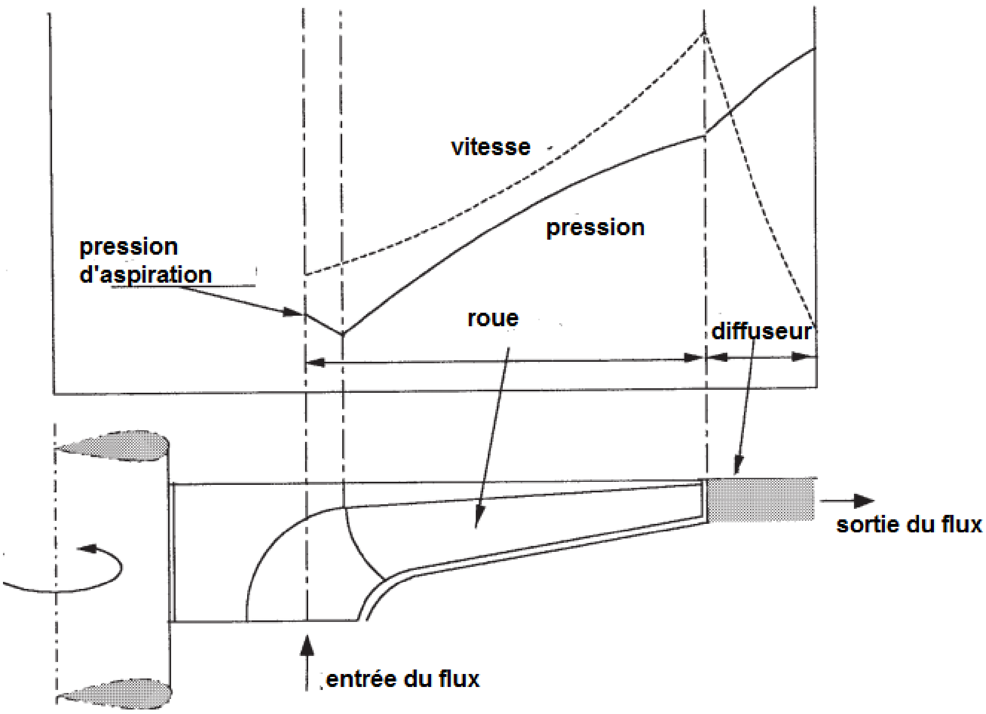


FIG.2.3 : Rotor de compresseur multi étagés

Schéma de principe de fonctionnement :



Pour obtenir de fortes augmentation de pression, il faudrait donc avoir de très grandes vitesses périphériques, mais il ya des limitations de cette augmentations
Deux limitations doit-être tenu en compte, à savoir :

Limite due à la résistance des matériaux
Limite due aux phénomènes supersoniques qui ont une action défavorable sur l'écoulement et donc sur le rendement de la machine.

NB : Pour de forts taux de compression, il faut utiliser des compresseurs multi étagés.

2.3 Etude thermodynamique de la compression du gaz :

D'après la thermodynamique, la quantité d'énergie fournie au gaz à savoir le travail "**dW**" et la quantité de chaleur "**dQ**" peuvent être exprimées par la variation de l'enthalpie "**dh**" et celle de l'énergie cinétique "**d(V² /2)**" pour l'unité de masse "**m** =1kg".

$$dW + dQ = dh + d\left(V^2 / 2\right) + gz \quad \text{En [J/kg]}$$

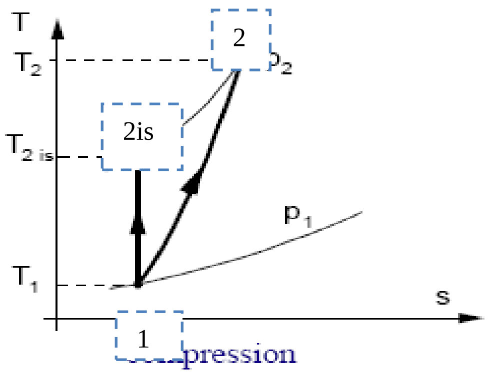
Cette équation représente une des formes de l'équation du premier principe de la thermodynamique relatif à l'écoulement du gaz.

L'énergie cinétique des gaz est supposée négligeable ainsi que le travail potentiel, on a donc :

$d\,(V^2 /2) = 0; \quad gz=0$

Et donc $dh = \delta W + \delta Q$ ……….. (2.1)

L'étude thermodynamique de la compression effectuée souvent à l'aide des diagrammes (**h, s**), permet de déterminer la variation de l'enthalpie ($\Delta h = h_2 - h_1$) dans le compresseur.



$$\eta_c = \frac{\Delta w_{T\,is}}{\Delta w_T} = \frac{h_{2_{is}} - h_1}{h_2 - h_1}$$

fig-(2-5), diagramme entropique-(T,S):

2.3.1) Travail de compression

En rappelant que le rôle d'un compresseur est de minimiser l'augmentation de température totale pour une variation de pression totale donnée ; nous allons exprimer de rendement d'un étage de compression. Pour cela, il faut tout d'abord spécifier :

- Une transformation idéale de référence
- Les états thermodynamiques amont et aval (conditions totales et statiques)
- Les stations entre lesquelles le rendement est évalué

La compression adiabatique réversible dans un compresseur idéal sans perte d'énergie est représentée par la droite (**1-2is**) selon la figure(2-6), parce que dans ce cas (***Q* = 0**) et la variation de l'enthalpie ($\boldsymbol{S_2 - S_1 = 0}$).

$$\Delta h = W \qquad (2.2)$$

- la compression réelle sans refroidissement à lieu suivant la courbe (1-**2**) et elle est toujours accompagnée des pertes $\Delta \boldsymbol{h_p}$ ainsi que l'augmentation de l'enthalpie (**dS** > **0**).
- pour les gaz parfaits **Δh** se calcule à partir de la chaleur spécifique à pression constante C_p.

…………….……(2.3) $W = \Delta h = C_p(T_2 - T_1)$

Où:

- **T_1**: température d'aspiration
- **T_2**: température de refoulement

Il est plus commode parfois d'analyser le fonctionnement des compresseurs à l'aide d'un diagramme (***P, V***) parce que l'aire dans ce diagramme correspond à la valeur du travail.

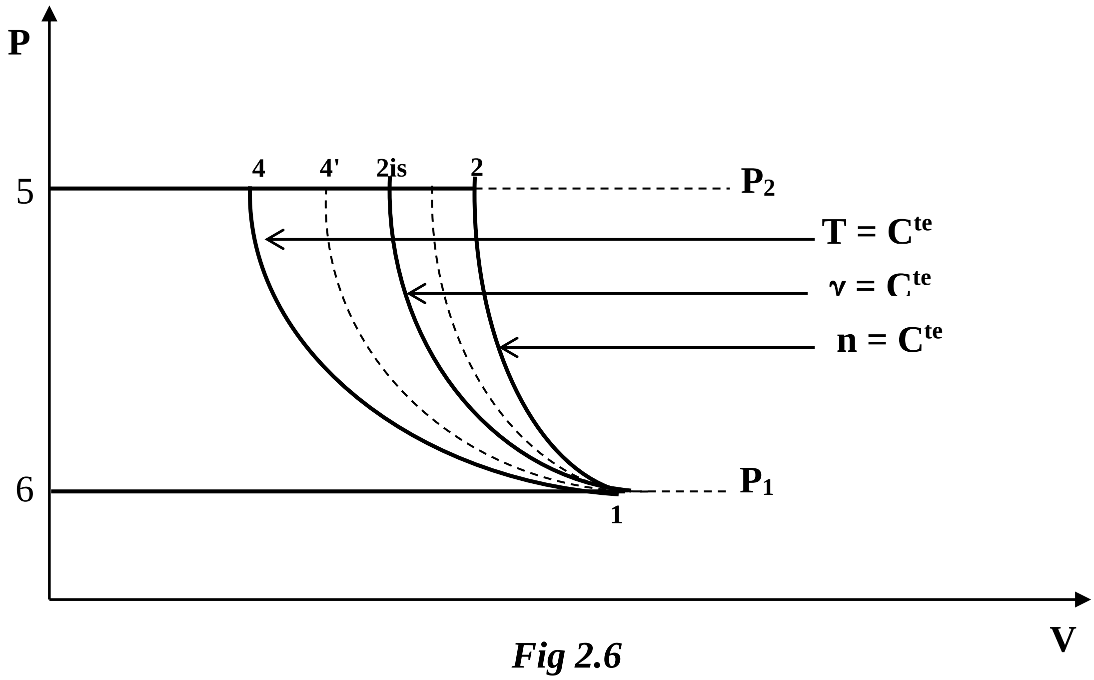


Fig 2.6

Afin d'exprimer le travail **W** en fonction de la pression **P** et du volume spécifique du gaz (V) on doit utiliser la relation pour l'enthalpie.

D'où : $h = U + PV$ ……………………… (2.4)

$dh = dU + PdV + VdP$……..…..... .(2.5)

On a : $dU = \delta Q + \delta W$…..………………. .(2.6)

En rapportant (5) et (6) à (1) nous obtenons:

$dW = VdP$……………………...… (2.7)

$$W = \int VdP$$ …………….....……. (2.8)

❖ pour la compression adiabatique (*1-2*) le travail (***W***) correspond à l'aire (*1-2-5-6-1*) qui se trouve entre l'adiabatique (*1-2*) avec l'exposant adiabatique (γ=***cst***) et les deux droites (*1-6*) et (*2-5*).

La compression réelle accompagnée des pertes interne est effectuée avec l'exposant polytropique.

❖ la compression isothermique est représentée par l'isotherme (1-4).

2.3.2. Travail en fonction du taux de compression:

Dans les turbocompresseurs, on utilise généralement la compression adiabatique sans refroidissement du corps de la machine, le travail adiabatique peut être calculé à partir de l'expression (3) pour les gaz parfaits.

Mais il est plus commande parfois d'exprimer la valeur de W en fonction de taux de compression qui est habituellement connu.

$$r = {}^{p_2}\!/_{p_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots (2.9)$$

Dans le cas de la transformation adiabatique on à:

$$T_{2is}/T_1 = (P_2/P_1)^{(\gamma-1/\gamma)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (2.10)$$

En remplaçant l'équation (10) dans l'équation (3) on trouve :

$$W_{ad} = c_p.T\left(r^{(\gamma-1/\gamma)} - 1\right) \ldots\ldots\ldots \ldots (2.11)$$

C_p : peut être calculé à partir de l'équation de MAYER:

$$C_p - C_v = R_g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots(2.12)$$

r : constante de gaz en [kJ / kg.°k]

Et $\gamma = C_p / C_v$

$$C_p = (\gamma / \gamma\text{-}1).R_g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (2.13)$$

En remplaçant l'équation (13) dans (11) on trouve :

$$W_{ad} = (\gamma / \gamma - 1)Z.R_g.T_1\left(r^{(\gamma-1/\gamma)} - 1\right) \ldots \ldots (2.14)$$

Z=1, gaz parfait

Z≠1, gaz réel

Cette équation permet de calculer le travail adiabatique de la transformation réversible et sans pertes internes dit : " Travail isentropique ".

En remplaçant l'exposant adiabatique **γ** par l'exposant polytropique "**n**" on peut utiliser toutes les équations adiabatiques pour calculer les transformations polytropiques. Il en ressort que le travail polytropique d'une transformation réversible sans pertes d'énergie avec (**n = var**) se calcule à partir de l’équation :

$$W_p = \left(\frac{n}{n-1}\right).R_g.T_1.\left(r^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} - 1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.15)$$

Le travail adiabatique réel **W_r d'une** transformation irréversible avec (**n = var**) suivant l'expression (3) est égal à :

$$W_r = c_p\left(T_2 - T_1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad .(2.16)$$

Où : **T_2** : Température réelle de gaz au refoulement.

Si l'on sait que l'exposant (**n = c**^{te}) de la polytrope (**1-3**) (fig.2-6) qui passe par le point ***2*** correspond à la compression réelle nous pouvons écrire :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(r^{\left(\frac{n-1}{n}\right)}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad ..(2.17)$$

Rapportant les équations (13) et (17) à l'équation (16) on obtient :

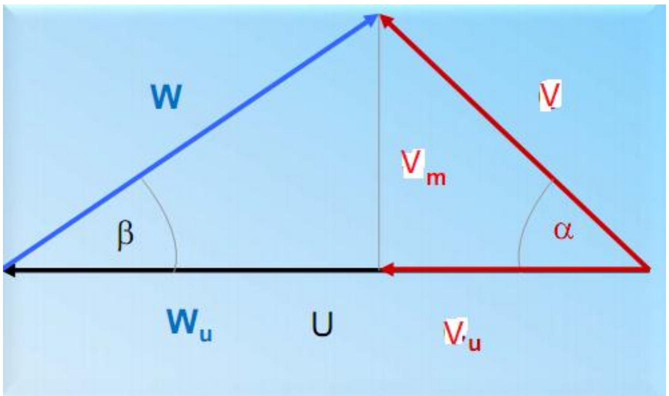
$$Wr = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right).R_g.T1.\left(r^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} - 1\right)\ldots.. \qquad ..(2.18)$$

2.4) Méthode d'Euler :

2.4.1) calcul du travail et puissance par les triangles de vitesses :

Le calcul énergétique nécessite l'utilisation des triangles de vitesses (fig2.7)

L'application du théorème d'Euler fournit le couple tel que :



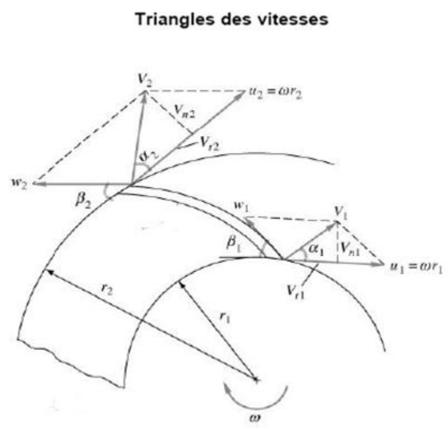


Figure-(2.7), triangle de vitesses

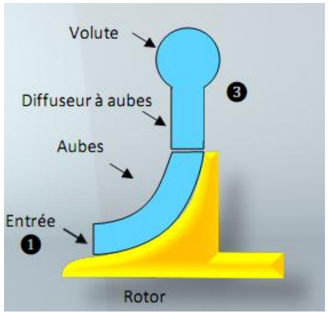


Figure (2.8), triangle de vitesse

On considère une particule fluide traversent la roue. Soient V sa vitesse absolue, W sa vitesse relative par rapport à la roue et U sa vitesse d'entrainement. A chaque instant on a la relation vectorielle :

$$\boxed{\vec{V} = \vec{W} + \vec{U}} \quad (2.27)$$

Cette relation vectorielle est représentée graphiquement par la (fig.2.8)

Les vitesses U et V forment entre elles l'angle (α) et U et W forment l'angle (angle entre vecteur).

La composante de V perpendiculaire à U est appelée vitesse méridienne ou vitesse débitante. Elle est définie par :

$$V_m = V \sin\alpha \qquad (2.28)$$

Ou par :

$$V_m = W sin\beta \qquad (2.29)$$

$$W_1 = \frac{débit}{section\ normale\ à\ \ W_1} = \frac{Q}{2\pi R_1 L_1 \sin\beta}$$

La projection de V sur U est la composante giratoire autour de l'axe de la roue du fluide dans son mouvement absolue, elle définie par :

$$V_u = V \cos\alpha \qquad (2.30)$$

Le triangle des vitesses permet d'écrire :

$$W^2 = U^2 + V^2 - 2UV\ \cos\alpha$$
$$W_1^2 \ = U_1^2 + V_1^2 - 2U_1V_1 cos\alpha_1$$
$$W_2^2 \ = U_2^2 + V_2^2 - 2U_2V_2 cos2$$

$$W_1^2 - W_2^2 = (V_1^2 - V_2^2) + (U_1^2 - U_2^2) + 2(U_2V_2cos2 - U_1V_1cos\alpha_1) \qquad (2.31)$$

2.4.2) Expression d'Euler :

D'après la relation (3-19) et (3-24) on

$$W_{12} = \frac{1}{2}((V_1^2 - V_2^2) + (U_1^2 - U_2^2) + (U_2V_2cos2 - U_1V_1cos\alpha_1) + (U_2^2 - U_1^2) + (V_2^2 - V_1^2))$$

Après simplification il reste l'expression d'Euler :

$$\boxed{W_{12} = (U_2V_2cos\alpha2 - U_1V_1cos\alpha_1)} \qquad (2.32)$$

Avec : $V_{1u} = V_1 cos\alpha_1$ $V_{2u} = V_2 cos\alpha_2$

D'où l'expression d'Euler prend la forme :

$$\boxed{W_{12} = (U_2V_{2u} - U_1V_{1u})} \qquad (2.34)$$

Le couple par unité de débit massique est donné par :

$$\boxed{W_{12} = \omega\Gamma} \quad \Gamma \text{ :N.m/(kg/s)} \qquad (2.35)$$

$$\boldsymbol{W_{12} = \omega\Gamma = \omega(r_2 V_2 cos\alpha 2 - r_1 V_1 cos\alpha_1)} \qquad (2.36)$$

Le couple sur l'arbre est donné par la relation suivante :

$$\boxed{\Gamma_m = \dot{m}\Gamma = \rho Q(r_2 V_2 cos\,\alpha_2 - r_1 V_1 cos\alpha_1)}\,)$$

Nb : dans la littérature $\Gamma_m = C, couple\ sur\ l'arbre\ moteur$

$$C_m = \rho Q(r_2 V_2 cos\alpha_2 - r_1 V_1 cos\alpha_1) \qquad (2.38)$$

La puissance est donnée par la relation suivante:

$$P_u = C_m.\omega = \rho Q(U_2 V_2 cos\alpha_2 - U_1 V_1 cos\alpha_1) \qquad (2.39)$$

$$\boxed{P_u = \rho Q\,\omega(r_2 V_2 cos\,\alpha_2 - r_1 V_1 cos\alpha_1)} \qquad (2.40)$$

Pour un rendement égal à l'unité , on peut combiner la thermodynamique et le théorème d'Euler, on obtient alors :

$$\boxed{W_C = gH_{th} = C_p(T_2 - T_1)}$$

D'où: $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{W_C}{CpT_1}$, (2.41)

avec : $W_c = \omega(r_2 V_2 cos\alpha 2 - r_1 V_1 cos\alpha_1)$ (2.42)

Le rapport de la température s'écrit alors :

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\omega}{C_p T_1}(r_2 V_2 cos2 - r_1 V_1 cos\alpha_1)$$

2.4.4) taux de compression :

Et le taux de compression prend alors la forme suivante:

$$\boxed{r = \frac{P_2}{P_1} = \left[1 + \frac{\eta_c \omega}{C_p T_1}(r_2 V_2 cos\alpha 2 - r_1 V_1 cos\alpha_1)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Remarque: En générale à l'entrée de l'aube du compresseur la direction de la vitesse absolue est axiale $V_{1u} = 0.$, l'équation (4.7) devient:

$$W_c = \omega(r_2 V_{2u}). \qquad (2.44)$$

Si en plus les aubes du compresseur sont radiales $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, on aura $V_{2u} = U_2$ et

$$W_c = U^2. \qquad (2.45)$$

Ce type de compresseur est généralement utilisé en industrie et surtout dans la suralimentation des moteurs à combustion interne.

2.5) La variation de pression :

$$We = (V_{2u} U_2 - V_{1U} U_1) = \frac{1}{2}((W_1^2 - W_2^2) + (U_2^2 - U_1^2) + (V_2^2 - V_1^2)) \quad (2.46)$$

$$W_e = h_{t,2} - h_{t,1} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} - h_1 - \frac{V_1^2}{2} \qquad (2.47)$$

$$h_2 - h_1 = W_e - \frac{V_2^2}{2} + \frac{V_1^2}{2}$$

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}((U_2^2 - U_1^2) - (W_2^2 - W_1^2))$$

$$h_2 - h_1 = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} \qquad (2.48)$$

Comme, on a : $TdS = dh - \frac{dP}{\rho}$,

$dh = \frac{1}{2}(UdU) - \frac{1}{2}d(WdW)$, donc, cette expression et l'expression (2.52) donnent, donc l'expression suivante :

$\frac{dP}{\rho} = \frac{1}{2}(UdU) - \frac{1}{2}d(WdW) - Tds$, comme on a un écoulement adiabatique, on obtient alors :

$$\boxed{\frac{dP}{\rho} = \frac{1}{2}(UdU) - \frac{1}{2}d(WdW)} \qquad (2.49)$$

Il est clair que dans cette équation (2.53) qu'on peut augmenter la pression sans modifier la vitesse relative W en augmentant la vitesse d'entrainement $U_2 > U_1$. Ainsi, les compresseurs peuvent fournir une pression plus élevée que le compresseur axial.
Il existe une autre manière d'augmenter la pression et de mettre un ensemble de roué en série.

2.6) le coefficient de σ glissement :

Le profil de vitesse de W engendre un écoulement tourbillonnaire entre les aubes ce qui entraine une déviation de l'angle moyen à la sortie. Beaucoup d'expérimentateurs ont proposé des relations permettant de passer de l'angle mesurable β_2 des aubes à l'angle β_2 du fluide.

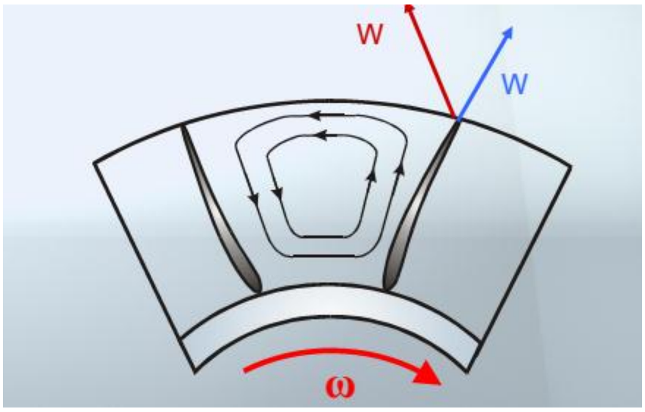


Figure –(2.9), déviation de vitesse

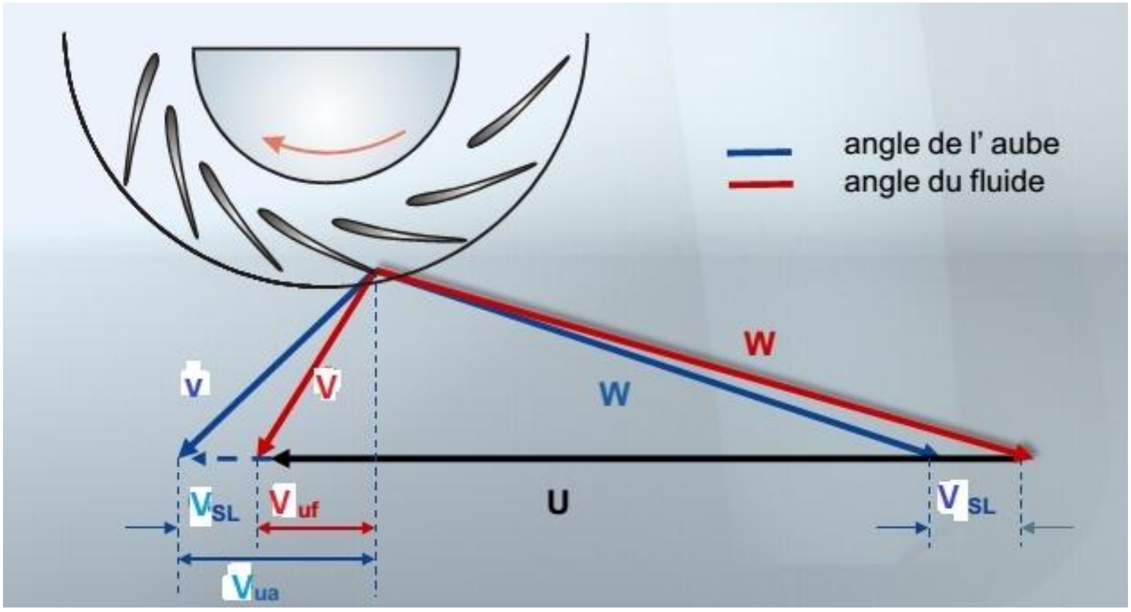


Figure –(2.10a), aubes et triangle de vitesse avec déviation

2.6.1) Définition 1 donnant la valeur σ :

$$\sigma = \frac{U-(V_{2Ua}-V_{2Uf})}{U} = 1 - \frac{V_{SL}}{U} \quad , \quad V_{SL} = (V_{2Ua} - V_{2Uf}) \qquad (2.50)$$

Cette définition fournie une valeur de σ entre une valeur 0 et 1.

2.6.2) Définition 2 de la valeur σ :

$$\sigma = \frac{V_{2Uf}}{U_2} \qquad (2.52)$$

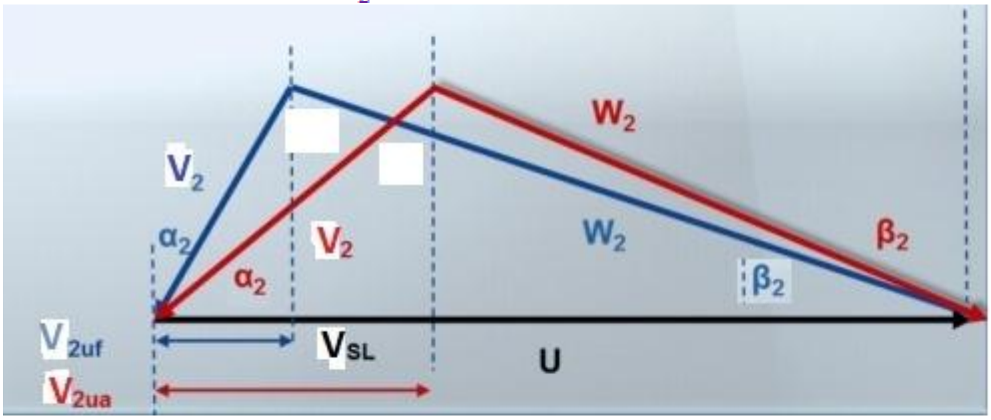


Figure –(2.10b), triangle de vitesse avec déviation

Cette définition mesure l'écart de la vitesse absolue à la sortie par rapport à la direction radiale. La valeur absolue de σ sera compris entre zéro et un, mais la quantité ainsi définie, ne correspond nullement au sens original.

2.5.1) Définition 3 de la valeur σ :

$$\sigma = \frac{V_{2uf}}{V_{2ua}} = \frac{V_{2ua} - V_{SL}}{V_{2ua}} = 1 - \frac{V_{SL}}{V2ua} \qquad (2.53)$$

La valeur de σ est aussi inférieure ou égale à un. Par contre, cette définition a une origine énergétique d'intérêt en ingénierie.
Le rapport entre le travail effectif $W_{ef,}$ *engendré* par l'écoulement ayant un angle différent à celui des aubes et, $W_{ea,}$ le travail théorique produit par un nombre infinie d'aubes, lorsque la vitesse à la sortie du rotor est alignée avec l'angle des aubes est :

$\sigma = \frac{W_{ef}}{W_{ea}}$**, mais lorsque on a :** $V_{1a} = 0$**, on obtient alors :** $\sigma = \frac{V_{2uf}}{V_{2ua}}$

Ainsi, le travail spécifique transmis à l'arbre devient :

$$W_e = \left(V_{2uf}U_2 - \underline{V_{1Uf}}U_1\right) = V_{2uf}U_2 = \sigma V_{2ua}U_2$$

Si les aubes à la sortie sont radiales $V_{2ua} = U_2$; alors on a :

$$W_e = \sigma U_2^2. \qquad \textbf{(2.54)}$$

On note que la définition de : $\sigma = \frac{V_{2Uf}}{U_2}$, également conduit à :

$W_e = V_{2uf}U_2$**, d'où on a :** $\boxed{W_e = \sigma \ U_2^2}$

Cette formule est la plus appropriée pour définir et pour quantifier la variableσ.

Calcul de du coefficient de charge ψ en fonction de σ :

$$\left.\begin{array}{r} \psi = \frac{W_e}{U^2} = \frac{C_p \Delta T_t}{U^2} \\ \sigma = \frac{W_{ef}}{W_{ea}} \end{array}\right\} \qquad \psi = \frac{W_{ea}}{U^2} = \frac{W_{ef}}{\sigma U^2}, \quad \psi = \frac{W_{ea}}{U^2} = \frac{C_p \Delta T_t}{\sigma U^2}$$

Formules pour σ :

$$\sigma = 1 - \frac{\pi}{Z}\left[\frac{Sin\beta_{2a}}{1-\left(V_{2ma}/U_2\right)Cot\beta_{2a}}\right]$$ **, Stodola 1927**

Avec Z : nombre d'aubes,

β_{2a}*: angle de l'aube à la direction tangentielle*

$$\sigma = 1 - \left[\frac{0.63\,\pi/Z}{1-\left(V_{2ma}/U_2\right)tang\beta_{2a}}\right]$$ **, Stanitz 1952**

$$\sigma = 1 - \left[\frac{cos\beta_{2a}}{Z^{0.3}}\right]$$ **, Weisner, 1967**

$$\sigma = \frac{1}{1+\frac{\pi \sin\beta_{2a}}{2Z\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)}}$$ **, Pfleiderer-Eckert**

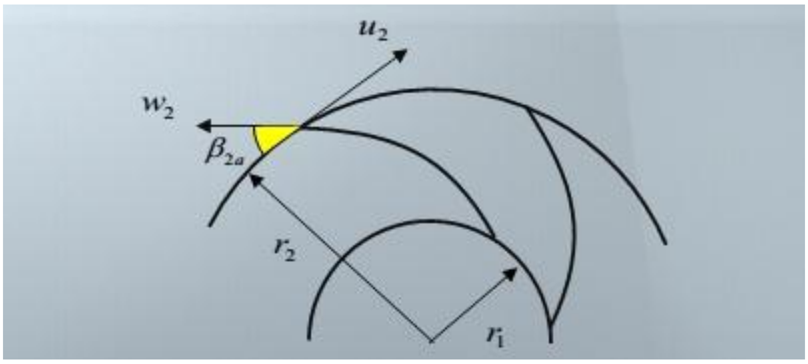


Figure –(2.11), angle déviation

NB : 50 % est faite dans le rotor, $W_e = \left(V_{2U}U_2 - \underline{V_{1U}U_1}\right)$

On dit que le terme $V_{1U}U_1$ est un terme de prérotation.

Sans prérotation, mais en considérant l'angle de glissement $\beta_{2a} = 0$

Le travail effectif devient dans ce cas égale à : $W_e = \sigma \; U_2^2$

Cette formule est la formule de Stanitz est rapide pour estimer σ_s

Pour les aubes radiales, on a la formule suivante $\sigma = 1 - \frac{2}{Z}$ **(2.55)**

2-6) Poussée sur la roue :

Selon figure (2-2), les roues sont soumises à une poussée axiale F_S vers l'aspiration.

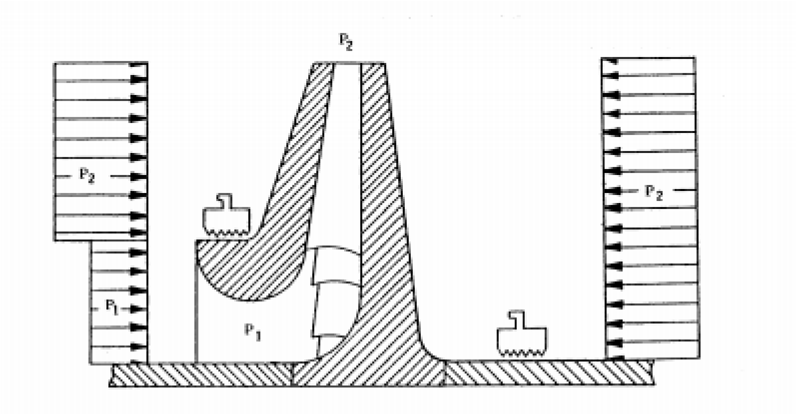
$$F_z = \pi\left(\frac{D_2^2 - D_1^2}{4}\right)(P_2 - P_1) \qquad \textbf{(2.56)}$$

$P_2 = pression\ à\ la\ sortie\ de\ la\ roue$

$P_1 = pression\ à\ l'entréede\ la\ roue$

$D_1 : diamètre\ intérieur$

$D_2 : diamètre\ extérieur$



2-7) constructions du compresseur

2.7.1) les pertes :

Les sources les plus importantes des pertes sont :

- **Pertes par chocs et par frottements**
- **Pertes par recirculation**
- **Pertes dues au jeu annulaire et les pertes par diffusion**

Le produit $\Delta h = \eta\psi\sigma$ concentre les pertes dans un compresseur. Les sources les plus importantes sont les pertes par *incidence* et par *frottement* dans le rotor et dans le diffuseur. Plus précisément, on trouve les pertes de frottement sur le disque, pertes de recirculation, pertes dues au jeu annulaire et les pertes par diffusion. Pour chaque type de perte, des formules empiriques ont été développées.

2.7.2) Le volute

2.7.2) le diffuseur

2.7.3) orientation des aubes :

2.8) limite de pompage :

Le pompage est un phénomène qui peut être très violent qui met en jeu toute ou une partie de la masse de gaz présente dans la machine. Le gaz ne traverse plus la machine régulièrement mais subit des mouvements alternatifs dans une partie ou la totalité du compresseur.

Il s'accompagne :

- De vibration des aubages des roués
- D'inversion de la poussée axiale du rotor

- Des vibrations à très basse fréquence de l'ensemble du compresseur. Qui sont bien sûr extrêmement préjudiciables à le bonne marche mécanique de la machine.

Chapitre III Compresseur axial

L'écoulement **des gaz** à travers les conduits ainsi qu'à travers des machines thermiques telles que les pompes les compresseurs et autres machines tournantes, mérite une attention particulières. Nous savons que l'étude des fluides incompressibles on supposait des considérations « **purement mécanique** » tandis que pour les fluides compressibles on y obligeait d'introduire des suppositions « **thermodynamique** ».

3-1) Equation de continuité :

Elle exprime la conservation de la masse d'un point à un autre.

$$\mathbf{Q_{m,1} = Q_{m,2}\ (kg/s)}$$

Ou, encore selon la notation habituelle : $\dot{m}_1 = \dot{m}_2\ (kg/s)$

$$\boxed{\rho_1 S_1.V_1 = \rho_2 S_2.V_2} \qquad \mathbf{(3.1)}$$

ρ: *masse volumique* $(\frac{kg}{m^3})$

S : surface (m^2)

V : vitesse (m/s)

$$\mathbf{Q_m = \rho.\ S.V = cte}$$

Puisqu'elle permet la différentiation suivante (les trois grandeurs étant susceptibles de varier) :

$$d\rho.S.V + \rho.dS.V + \rho.S.dV = 0 \qquad \mathbf{(3.2a)}$$

Où encore, après division par **ρ.S.U,** on obtient **:**

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dV}{V} = 0} \qquad \mathbf{(3.2b)}$$

3.2) Le nombre de Mach :

Le nombre de Mach $M = \frac{V}{a}$, ce nombre caractérise principalement en plus du

sens de la vitesse, l'effet de compressibilité :

1. a : vitesse du son dans le fluide en question
2. a : dépend beaucoup du fluide, plus le gaz est lourd plus la vitesse du son est grande.

Si on écrit l'équation de continuité, suivant une seule direction :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \qquad \mathbf{(3.3a)}$$

On peut écrire ceci, comme suit :

$$\rho\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (3.3b)$$

L'équation de quantité de mouvement :

$$V\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad (3.4)$$

Ceci peut s'écrire aussi :

$$V\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{où :} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho V}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (3.5)$$

En combinant (3. 3b) avec (3.5) on obtient :

$$-\rho\frac{1}{\rho V}\frac{\partial P}{\partial x} + V\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad ==\gg \quad \frac{1}{V}\frac{\partial P}{\partial x} = V\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$V^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = a^2 \quad , \qquad \text{d'où} \qquad a = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

Pour L'eau $a \rightarrow \infty$ $,cas\ d'un fluide\ incompressible$

Dans le vide $a = 0$

Nous avons aussi l'équation supplémentaire de l'équation d'état :

$Pv = nRT,\ n = \frac{m}{M},\ \ ou\ encore$ $\quad Pv = \frac{m}{M}$RT, Pv = mrT, avec r constantes des gaz, r= $\frac{R}{M}$ avec M : masse molaire du gaz parfait),

$$P = \rho rT$$

Nous savons aussi la loi d'une transformation adiabatique (Q =0):

$P/\rho^{\gamma} = CTE$ d'où$LnP - \gamma Ln\rho = cte$, En dérivant cette équation on obtient :

Avec : $\frac{\partial P}{P}$ -γ $\frac{\partial \rho}{\rho} = 0$, donc : $\frac{\partial P}{P}$ = γ $\frac{\partial \rho}{\rho}$, ce qui donne

$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{P}{\rho}\gamma = a^2$ (Appelée vitesse du son) :

Finalement:

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 = \gamma rT}} \qquad (3.6)$$

Comme le nombre de Mach est égale à $\boldsymbol{M = \frac{V}{a}}$; si

V $< a$ $==\gg$ $M < 1$ $écoulement\ subsonique$

V $> a$ $==\gg$ $M > 1, écoulement\ supersonique$

V= $cas\ compliqué$)

De plus :

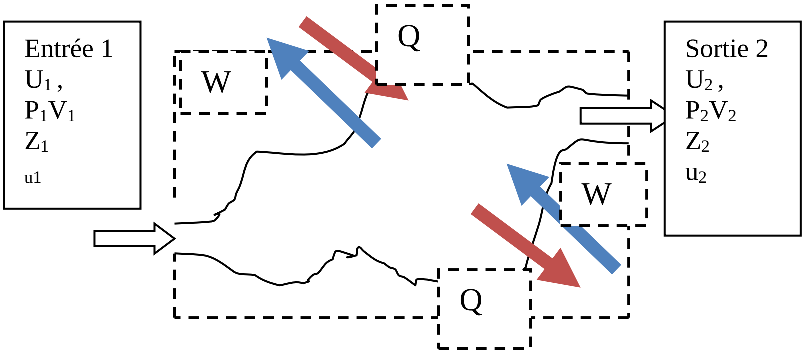
1. si le gaz a une vitesse V< $0.3a$, alors il peut-être considéré comme incompressible (et donc ρ_{gaz} =cte)
2. si le gaz a une vitesse V> $0.3a$, alors il doit être considéré comme compressible

Application numérique : Pour l'air dans les conditions normales, P = 1.013 bar, $\gamma = 1.4$ et $\rho = 1.293\ kg/m^3$ on obtient :

a= 331 m/s

3.3) Equation générale de la dynamique des gaz compressibles :

En générale pour un fluide, l'équation d'énergie peut s'écrire



Considérant un système ouvert et appliquons le premier principe de thermodynamique :

$$u_1 + P_1V_1 + \frac{1}{2}V_1^2 \quad + gZ_1 + Q_1 + W_1 = u_2 + P_2V_2 + \frac{1}{2}V_2^2 \quad gZ_2 + Q_2 + W_2$$

Pour un fluide compressible, cette équation d'énergie s'écrit :

$$u + PV + gZ + \frac{1}{2}V^2 = \text{cte} \qquad (3.7)$$

Pour un gaz, on néglige gZ, d'où l'équation (3.7) devient :

$$h + \frac{1}{2}V^2 = CTE$$

Cette somme est appelée énergie totale du fluide. On peut noter aussi que :

$$h_t = \ h + \frac{1}{2}V^2, appel\acute{e}\ \acute{e}nergie\ totale \text{ (par unité de masse)}$$

$$h_t = CpT_t = C_p\mathrm{T} + \frac{1}{2}V^2,\ \ T_t : appel\acute{e}e\ temp\acute{e}rature\ totale\ d'arr\hat{e}t$$

$$T_t = T + \frac{\frac{1}{2}V^2}{C_p}, \text{ T : température statique}$$

3.3.1) Equation de stagnation et équation non linéaire du débit :

Dans l'étude simplifiée qui suit, on considère que les gaz qui parcourent le cycle en suivants :

la loi des gaz parfaits. PV = mrT (ou P = ρrT)

On néglige les variations de chaleur massique Cp et Cv en fonction de la température T et de la proportion m massique de combustible brûlée. Dans une étude plus précise on pourrait fractionner les évolutions, et considérer pour chacune de ces fractions une température moyenne et effectuer au gaz les constantes caractéristiques.

$$Cp = \frac{r\gamma}{\gamma-1}, \qquad \mathrm{Cv} = \frac{r}{\gamma-1}, \qquad r = C_p - C_V$$

Nb : Pour un écoulement unidimensionnel en régime permanent, l'équation de la conservation de la masse devient :

$$\dot{m} = \rho v A = \frac{P}{rT} vA = \frac{P}{\gamma r T}\gamma v A == \frac{P}{\gamma r T}\gamma a M A \,,$$

Avec : $M = \frac{v}{a}$ nombre de Mach

$$\dot{m} = \frac{P}{\gamma r T}\gamma\sqrt{\gamma r T} M A = \frac{P}{\sqrt{\gamma r T}}\gamma M A$$

$\frac{\dot{m}\sqrt{rT_t}}{PA} = M\sqrt{\gamma}$, cette expression est valable dans les conditions statiques.

Si on connait les conditions d'arrêt au lieu de conditions statiques, avec l'utilisation des relations suivantes :

Pression et masse volumique d'arrêt :

En utilisant la définition qui exprime l'état dynamique (P, r, T, V) à l'arrêt (P_t, r, T_t, 0) par une transformation isentropique

$$\frac{P_t}{P} = \left(\frac{\rho_t}{\rho}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T_t}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$P_t = P\left(1 + \frac{V^2}{2CpT}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rho_t = \rho\left(1 + \frac{V^2}{2CpT}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Autre formule :

En introduisant la notion de nombre de Mach $M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma r T}}$

Il vient que :

$$\frac{V^2}{2CpT} = \frac{\gamma r}{2C_p}\frac{V^2}{a^2} = \frac{\gamma-1}{2}M^2$$

$$T_t = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right), \quad \rho_t = \rho\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad P_t = P\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

La température de stagnation est supérieure à la température statique La différence entre ces deux températures correspond à l'énergie cinétique du fluide

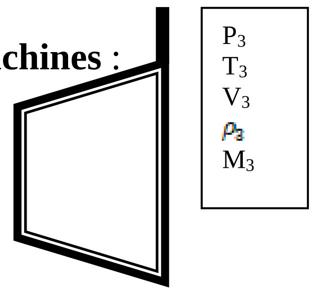
$$T_t - T = \frac{V^2}{2C_p}$$

On a : $\frac{\dot{m}\sqrt{rT_0}}{PA} = M\sqrt{\gamma}$

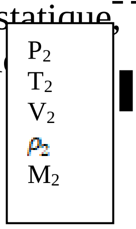
$$\frac{\dot{m}\sqrt{rT_t}}{PA} = M\sqrt{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

3.4) **Thermodynamique appliqué sur les turbomachines** :

Soit le symbole utilisé suivant : Entrée 2, Sortie 3



Les paramètres sont dénommés respectivement
Comme suit (pression statique, Température statique, vitesse, masse volumique et le nombre de Ma



Ecrivons l'équation d'énergie :

$$(W+Q)_{2,3} = \frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2) + g(Z_3 - Z_2) + (u_3 - u_2) \qquad (3.8)$$

Comme le système est adiabatique $Q_{2,3} = 0$:

Pour l'air en générale on suppose $\Delta Z = 0$, L'équation (1.8) devient alors : $W_{2,3} = \frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2) + (u_3 - u_2)$ (3.9)

En réarrangeant l'équation (3.9), on obtient alors :

$$\left(\frac{P_3}{\rho_3} + u_3\right) - \left(\frac{P_2}{\rho_2} + u_2\right) = (P_3 v_3 + u_3) - P_2 v_2 + u_2) = H_3 - H_2$$

En utilisant l'enthalpie totale, l'équation (3.9) devient :

$$\boxed{W_{2,3} = H_{t3} - H_{t2}} \qquad (3.10)$$

Avec : $$\boxed{H_t = H + \frac{1}{2}V^2 = C_p T_t} \qquad (3.11)$$

T_t : température totale, on supposant le coefficient Cp de chaleur spécifique à pression constante d'où : $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} = cte$

Dans le compresseur, la température T_{t3} à priori est constante.

représentant cette transformation dans un diagramme enthalpique (H,S):

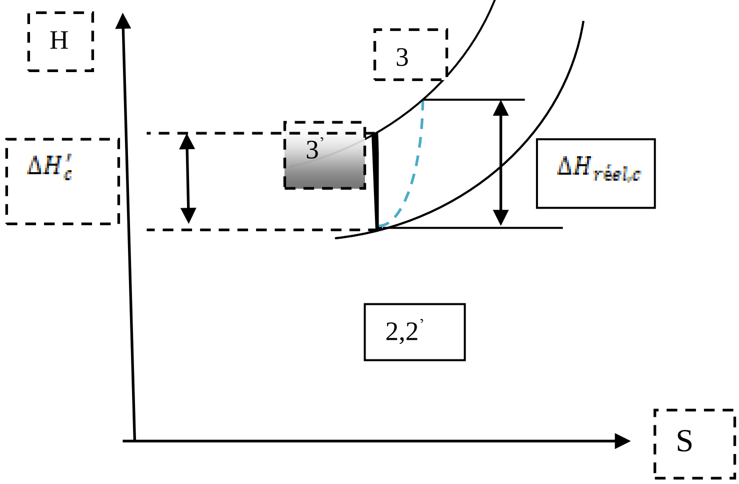


Figure (3-1), diagramme enthalpique (H, S)

En utilisant le rendement du compresseur, on a:

$\eta_c = \frac{\Delta H_c'}{\Delta H_c}$, avec $\Delta H_c = W_c = \frac{\Delta H_c'}{\eta_c} = \frac{C_p(T_{t3}' - T_{t2}')}{\eta_c}$, on a à l'entrée du compresseur la température $T'_{t2} = T_{t2}$, nous obtenons alors :

$$\boxed{W_{2,3} = \frac{C_p(T_{t3}' - T_{t2})}{\eta_c}} \tag{3.12}$$

On peut écrire cette expression comme suit :

$$\boxed{W_{2,3} = \frac{C_p}{\eta_c} T_{t2}\left(\frac{T_{t3}'}{T_{t2}} - 1\right)} \tag{3.13}$$

On peut écrire l'équation de Poisson pour une transformation adiabatique, comme suit :

$$PV^{\gamma} = CTE$$

$\frac{T_{t3}'}{T_{t2}} = \left(\frac{P_{t3}}{P_{t2}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ D'où $$\boxed{W_{2,3} = \Delta H_c = \frac{1}{\eta_c} C_p T_2\left(\left(\frac{P_{t3}}{P_{t2}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)} \tag{1.14}$$

Posons : $r = \frac{P_{t3}}{P_{t2}}$, *taux de compression*

1. compresseur axial : taux de compression de l'ordre : 1.15 à 1.22
2. compresseur centrifuge : taux de compression 4 à 6

On est arrivé à utiliser des compresseurs de 20 étages qui peuvent donner un taux de compression de l'ordre de 20.

$(1.15)^{20} = 16.36$ $(1.22)^{20} = 53$

Nombre d'étages 1 à 12 en (1970)
Nombres d'étages jusqu'à 20 (en 1980)

$$\boxed{W_{2,3} = \Delta H_c = \frac{1}{\eta_c} C_p T_2\left((r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)} \tag{3.15}$$

En arrivant à ce stade, on peut déterminer la température T_{t3} ?

$$\Delta H_c = C_p(T_{t3} - T_{t2}) = \frac{\Delta H_c'}{\eta_c} = C_p(T_{t3}' - T_{t2}'),$$

Comme $\frac{\Delta H'_c}{\eta_c} = \Delta H'_{c}, alors$:

$$\boxed{(T_{t3} - T_{t2}) = \frac{(T'_3 - T_{t2})}{\eta_c}} \qquad (3\text{-}16)$$

Du fait que les frottements à l'intérieur du compresseur élèvent la température, donc on a :

$$T_{t3} > T'_{t3}$$

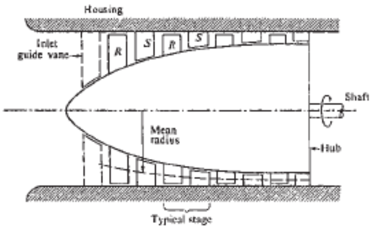


Figure (3-2), compresseur axial

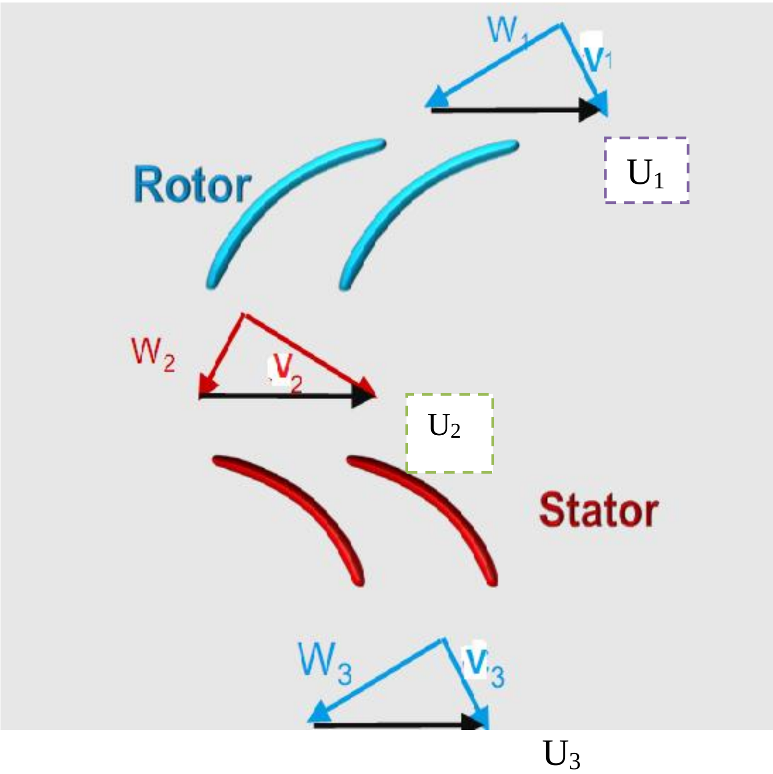


Figure –(3-3), triangle de vitesses dans un étage

Un étage se compose : d'une aube mobile (rotor 1-2) et d'une aube fixe (stator 2-3)

1 : entrée rotor

2 : sortie rotor et entrée stator

3 : sortie stator et entrée rotor (3=1)

1-5) Nomenclature :

W : vitesse relative de l'écoulement

U : vitesse périphérique du rotor

V : vitesse absolue de l'écoulement

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{W} \qquad \textbf{(3-17)}$$

α : angle de vitesse absolue mesuré par rapport à la direction axial

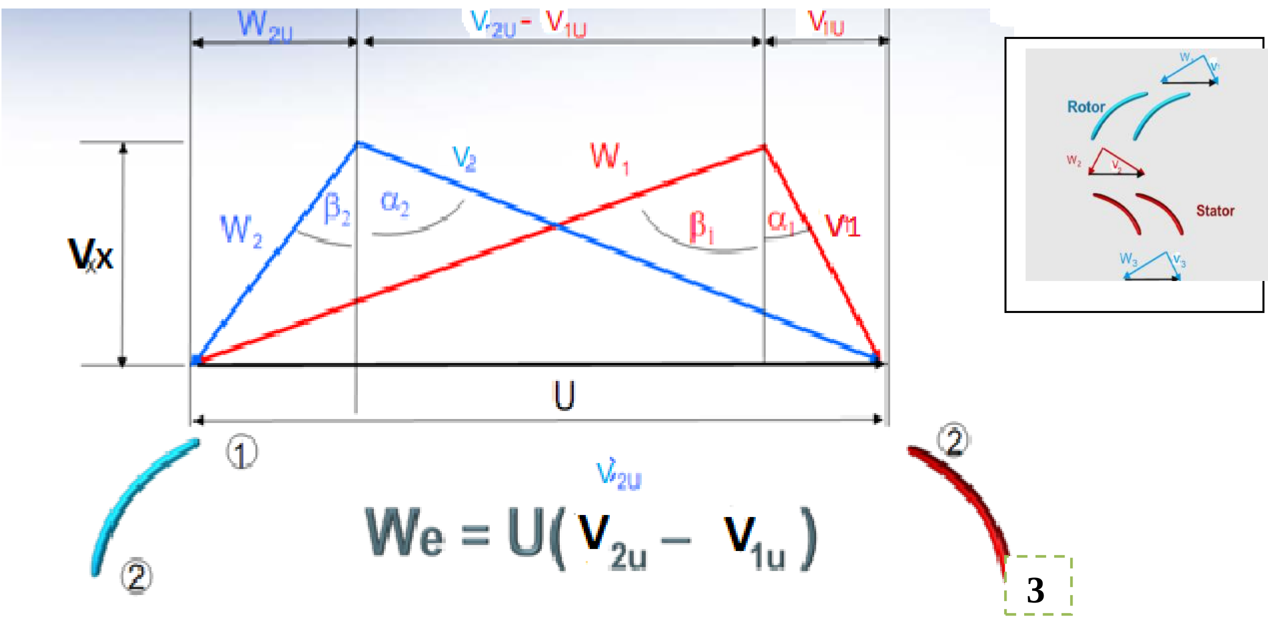
β : angle de vitesse relative mesuré par rapport à la direction axial

NB :

3. la forme des aubes du rotor dépend de l'angle β
4. la forme des aubes du stator dépend de l'angle α

Conservation de la masse : $\dot{m}_{entrée} = \dot{m}_{sortie}$

Dans le rotor 1-2 le fluide se détend et sa vitesse absolue V augmente.



Soit la vitesse d'entrainement $U_1 = R_1.\omega$=, $U_2= R_2.\omega$, avec $U_1= U_2=U$

Avec : $\omega = \frac{2\pi N}{60}$, vitesse de rotation angulaire (rd/s)

Dans un stator (fixe), l'enthalpie totale est constante quoique l'enthalpie statique et la vitesse changent.

Pour un étage $(W+Q)_{13} = H_3 - H_1 + \frac{1}{2}(V_3^2 - V_1^2)$ (3-18a)

Avec $Q_{13} = 0$, adiabatique, donc :

$$W_{1-3} + Q_{1-3} = H_3 - H_1 + \frac{1}{2}(V_3^2 - V_1^2) \qquad (3\text{-}18b)$$

Le travail effective est donné par : $W_e = U\,(V_{2U} - V_{1U})$

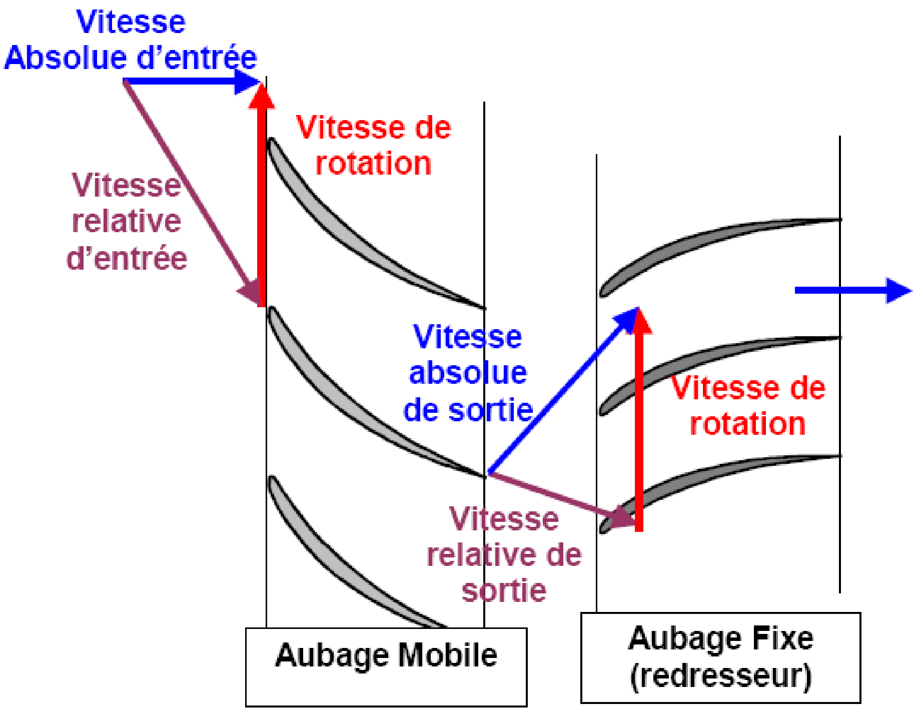
Pour simplifier les triangles des vitesses, on choisit : $V_3 = V_1$ et $\alpha_1 = \alpha_3$

Ecoulement dans les aubes fixes :

Q_{23} = 0, cas adiabatique et $(W)_{23}$ = 0 (pas de travail dans le stator)
$H_3 - H_2 + (\frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2))$ =0 d'où $H_3 - H_2 = \frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2)$

Dans un diffuseur (stator) les canaux sont divergents, donc le fluide est décéléré et comprimé, la pression augmente. Donc, au stator la vitesse diminue grâce à la section de passage qui augmente.
L'enthalpie statique varie telle que H3 > H_2, $H_3 - H_2 > 0$. Donc : $V_2 > V_3 \Rightarrow$ les vitesses absolues diminuent (voir figure).

1. On note que dans un compresseur axial $U_2 = U_1$, de sorte que pour augmenter la pression l'écoulement doit être décéléré, ce qui favorise le décollement de la couche limite
2. Lorsqu'on garde $\rho S = cte$, la vitesse périphérique U et la composante axiale Vx demeurent constantes également.



Coupe d'étage de compresseur

Ecoulement de l'air dans les aubes mobiles :
$(W)_{12} = H_2 - H_1 + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)$,
Si on se place sur le rotor, le travail est nul dans ce cas on aura (relation des vitesses triangulaires) :

$$U_1 = U_2 \quad \Rightarrow W = 0. \quad = H_2 - H_1 + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

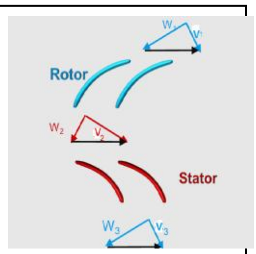
$$H_2 - H_1 = \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2) \qquad (3\text{-}19)$$

Le fluide entre dans un rotor avec la vitesse relative W_1. Pour éviter l'entrée sans choc, il faut donc que la direction de W_1 soit tangente (ou très proche) au squelette d'une aube à son entrée.
Les aubes du rotor où (distributeur) sont divergents, donc la vitesse relative diminue ($W2 < W_1$) et la pression du fluide augmente. Le fluide quitte le rotor avec la vitesse W_2 et entre dans le diffuseur (les canaux fixes) avec la vitesse absolu $\vec{V_2} = \vec{W_2} + \vec{U}_2$

Dont la direction est déterminée par l'angle α_2. Evidemment, pour éviter la perte par choc, il faut que l'angle α_2 proche de l'angle d'aube du diffuseur α_1 ($\alpha_3 = .\alpha_1$)
L'enthalpie statique $H_2 > H_1 \Rightarrow \Delta H > 0$

Tableau récupélatif :

	Vitesse absolue	Vitesse relative	Section de passage	Pression statique	Pression totale
rotor	↗	↘	↗	↗	↗
Stator	↘	↗	↗	↗	→



3-6) Les coefficients :

Coefficient de charge : $\Psi = \frac{W_e}{U^2}$,

parfois Ψ est considéré positif pour les turbines et négatif pour les compresseurs.

Le coefficient de débit :

$$\phi = \frac{V_x}{U}$$

Le degré de réaction :

$$R = \frac{variation\ d'enthalpie\ dans\ le\ rotor}{variation\ d'enthalpie\ dans\ l'étage} = \frac{H_2 - H_1}{H_3 - H_1}$$

On définit alors l'énergie échangée en deux contributions, à savoir la variation cinétique $\frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2)$que l'on appelle énergie d'action et la variation de :

$\frac{w_2^2 - w_3^2}{2}$ Appelée énergie de réaction ($\frac{w_2^2 - w_3^2}{2g}$ ou charge statique).

Où, $\frac{\frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2) + \frac{w_2^2 - w_3^2}{2}}{g}$ charge totale (en m).

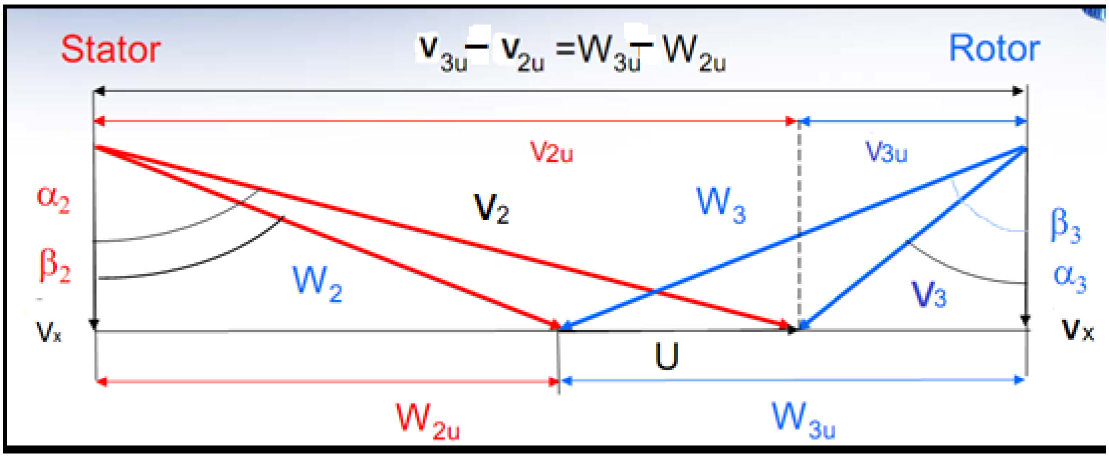
Définit par le rapport de la charge statique à la charge totale.

$$\mathbf{R} = \frac{\frac{w_1^2 - w_2^2}{2}}{\frac{1}{2}(V_3^2 - V_2^2) + \frac{w_2^2 - w_3^2}{2}}, \qquad \text{où}$$

$$\mathbf{R} = \frac{H_2 - H_1}{H_3 - H1}\begin{cases} \textit{appliqué sur le rotor } H_2 - H_1 = \frac{1(w_1^2 - w_2^2)}{2} \\ \textit{appliquée à tout l'étage } W = H_3 - H_1 + \frac{1}{2}(V_3^2 - V_1^2) \end{cases} \quad (3-20)$$

Si R ≠ 0 (généralement R= ½ symétrie des triangles de vitesse) une partie de la pression statique est obtenue dans le rotor.

3-6-1) Triangle normal dans un compresseur :



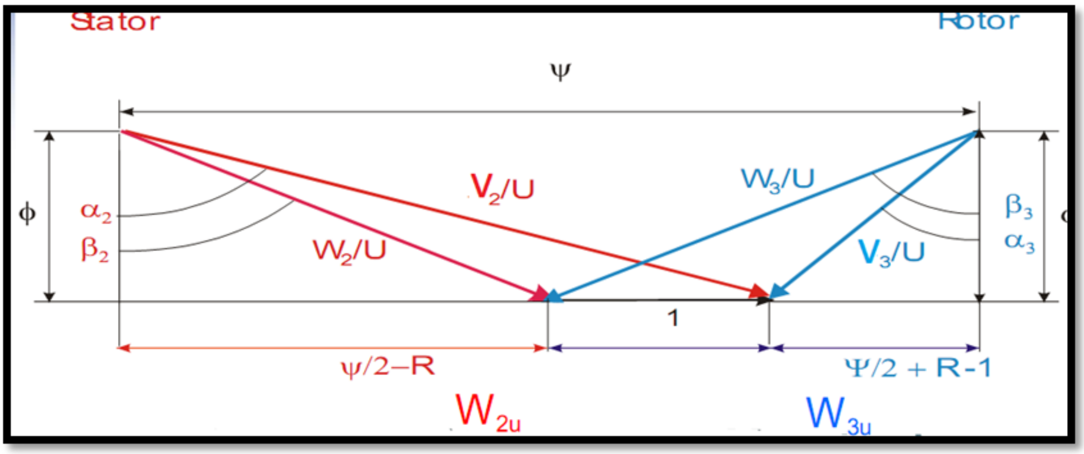
$$W_e = U(V_{3u} - V_{2u})$$

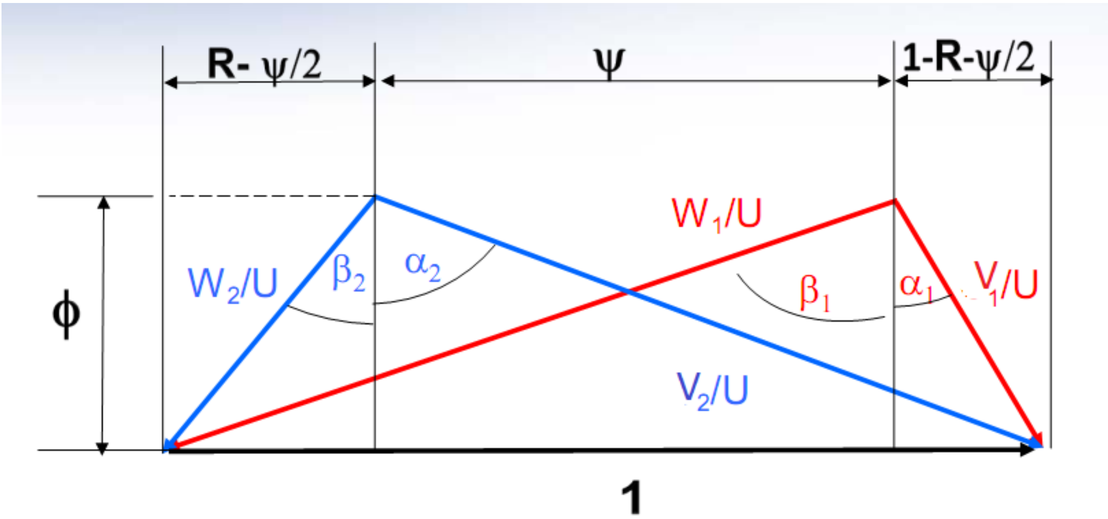
$$\frac{W_e}{U} = (V_{3U} - V_{2U}) = (W_{3U} - W_{2U})$$

$$\Psi = \frac{W_e}{U^2} = (V_{3U} - V_{2U})/U,$$

$$\phi = \frac{V_{2x}}{U} = \frac{V_{3x}}{U} = \frac{V_x}{U} \qquad (3\text{-}21)$$

Triangle adimensionnel dans un compresseur :





$$\frac{V_3}{U} = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} + R - 1\right)^2} \qquad \frac{V_2}{U} = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} - R + 1\right)^2}$$

$$\frac{W_3}{U} = \sqrt{\phi^2 + \left(R + \frac{\psi}{2}\right)^2} \qquad \frac{W_2}{U} = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} - R\right)^2}$$

$$\alpha_3 = artan\left(\frac{R - 1 + \psi/2}{\phi}\right) \qquad \alpha_2 = artan\left(\frac{1 - R + \psi/2}{\phi}\right)$$

$$\beta_3 = artan\left(\frac{\psi/2 + R}{\phi}\right) \qquad \beta_2 = artan\left(\frac{\psi/2 - R}{\phi}\right)$$

3-7a) Rendement polytropique en fonction de k et γ:

Si on considère une infinitésimale compression nous définissons un rendement élémentaire polytropique comme suit (voir figure ci-dessous 3-5) :

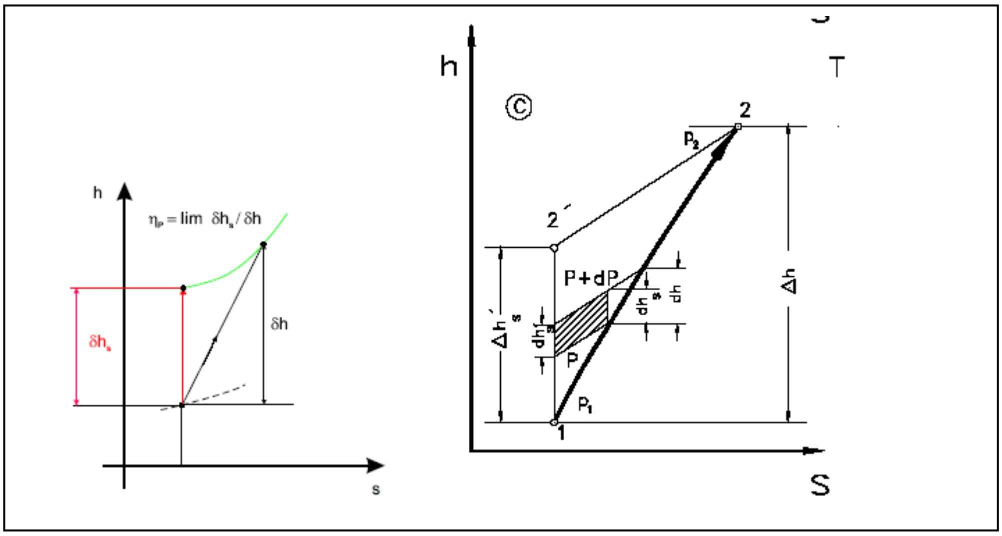


Figure-(3-5), diagramme (H,S) d'un étage

Le rendement polytropique de l'étage est donc :

$$\eta_p = \frac{dh_S}{dh}, \qquad (3\text{-}22)$$

avec **dh =** CpdT , $dh_S = C_P dT_S$

Pour une compression, on peut écrire :

$$\eta_p = \frac{T+dT_S-T}{T+dT\ \ -T} = \frac{\frac{T+dT_S}{T}-1}{\frac{T+dT}{T}-1}$$

Pour un processus polytropique, généralement on prend $PV^k = cte$, on incère cette idée dans (3-20a) on aura :

$$\eta_p = \frac{dh_S}{dh} = \frac{\left[\frac{P+dP}{P}\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}{\left[\frac{P+dP}{P}\right]^{\frac{k-1}{k}}-1},$$

ainsi on a selon l'approximation de Taylor :

$$\left(1+\frac{dP}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} \approx 1+\left(\frac{k-1}{k}\right)\frac{dP}{P}$$

, cependant on a :

$$\eta_p = \frac{dh_S}{dh} = \frac{1+\frac{dP}{P}\frac{\gamma-1}{\gamma}-1}{1+\frac{dP}{P}\frac{k-1}{k}-1} = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right),$$

finalement on a :

$$\boxed{\eta_p = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} \qquad (3\text{-}23)$$

3-7b) Le rendement du compresseur en fonction du rendement polytropique

En combinant avec l'expression (3-23), le rendement du compresseur peut s'écrire alors en fonction du rendement polytropique comme suit :

$$\boxed{\eta_c = \frac{\left(\frac{P'_{t3}}{P_{t2}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}{\left(\frac{P_{t3}}{P_{t2}}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1} = \frac{\left(\frac{P'_{t3}}{P_{t2}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}{\left(\frac{P_{t3}}{P_{t2}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma\eta_p}}-1}} \qquad (3\text{-}24)$$

Jusqu'à présent nous avons considéré, une transformation infinitésimale par contre si on travaille sur plusieurs étages, on considère donc un coefficient polytropique $\bar{k}$ moyen pour l'ensemble des étages de même pour le coefficient adiabatique $\bar{\gamma}$.

Donc, pour plusieurs étages, on a la transformation :

$P_{t2}V_2{}^{\bar{k}} = P_{t3}V_3{}^{\bar{k}}$, que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$lnP_{t2} - \bar{k}lnV_2 = lnP_{t3} - \bar{k}lnV_3, \quad \text{d'où} \quad \bar{k} = \frac{ln\frac{P_{t3}}{P_{t2}}}{ln\frac{V_2}{V_3}}$$

Puisque l'enthalpie h = $C_pT_{t3} = \frac{\gamma}{\gamma-1}rT_{t3} = \frac{\gamma}{\gamma-1}P_{t3}V_3$,

Où $\bar{k}$ **e**t $\bar{\gamma}$ sont respectivement le coefficient polytropique et le coefficient adiabatique moyenne (ou isentropique) le rendement polytropique selon la figure (3-25) pour tous les étages prend alors la forme :

$$\boxed{\bar{\eta}_p = \frac{(\bar{\gamma}-1)}{\bar{\gamma}}\frac{ln\frac{P_{t3}}{P_{t2}}}{ln\frac{T_{t3}}{T_{t2}}}} \qquad (3\text{-}25)$$

$\bar{\eta}_p$ est considéré pour une infinité d'étages. Il caractérise directement le rendement « réel » du compresseur.

On sait que le rendement du compresseur selon la figure (3-1) que :

$\eta_c = \frac{\Delta H'_c}{\Delta H_c}$, il est à rappeler que η_c n'est pas nécessairement le même pour chaque étage.

$$\frac{P_{t3}}{P_{t2}} = \left[1 + \frac{\Delta H_c \eta_c}{CpT_{t2}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[1 + \eta_c\left(\frac{T_{t3}}{T_{t2}} - 1\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Pour un étage (x-y) , $\frac{P_{ty}}{P_{tx}} = \left[1 + \eta_c\left(\frac{T_{ty}}{T_{tx}} - 1\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Pour n étages, on peut écrire entre (2-3) $\frac{P_{t3}}{P_{t2}} = \left(\frac{P_{ty}}{P_{tx}}\right)^n$, $\frac{T_{t3}}{T_{t2}} = \left(\frac{T_{ty}}{T_{tx}}\right)^n$

Donc :

$$\frac{P_{t3}}{P_{t2}} = \left[1 + \eta_c \left(\left(\frac{T_{ty}}{T_{tx}}\right)^n - 1\right)\right]^{\frac{n\gamma}{\gamma-1}}$$

On déduit alors :

$$\boxed{\eta_c = \frac{\left(P_{t3}/P_{t2}\right)^{\frac{\gamma-1}{n\gamma}} - 1}{\left(T_{t3}/T_{t2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}}$$

3-7c) effet de Nombre d'étage sur le rendement du compresseur η_c :

Cas particulier : rapport de compression $\frac{P_{t3}}{P_{t2}} = 10$, et rapport de température entrée sortie $\frac{T_{t3}}{T_{t2}} = 2.035$

Différents étages (n)	**1**	**2**	**4**	**…..**	**10**	**100**	**n→ ∞**
η_c	**0.90**	**0.916**	**0.923**		**0.9256**	**0.926**	

On remarque que $\textit{lorsque}$ η_c **augmente avec n, mais vers une limite.**

Si n→∞ implique que $\eta_c \to \frac{0}{0}$, appliqué le théorème de L'Hopital

Le dérivé par rapport à n :

$$\eta_c|'n = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma} ln(\left(\frac{P_{t3}}{P_{t2}}\right)\left(-\frac{1}{n^2}\right)[......]}{\left(-\frac{1}{n^2}\right) ln(\frac{T_{t3}}{T_{t2}})[....]}),$$ **d'où si n→∞ alors on a** $\eta_c \to \bar{\eta}_p$

Application : un compresseur axial a un rapport de pression de 10 et un rendement polytropique $\eta_p = 0.9$. En supposant γ =1.4, calculer le rendement isentropique.

$rép$: η_{is}=0.864