Chapitre 5

ALGORITHMES DE TRI ET DE RECHERCHE

1. Présentation des différentes méthodes de tri

Les tableaux permettent de stocker plusieurs éléments de même type. Lorsque le type de ces éléments possède un ordre total, on peut donc les ranger dans un ordre croissant ou décroissant.
Tous les algorithmes de tri utilisent une procédure qui permet d'échanger (permuter) la valeurs de deux variables.

```
Procédure échanger (a,b : entier)
Var
elem : entier ;
Début
  elem ←a;
  a←b;
  b←elem;
Fin.
```

Trier un tableau c'est donc ranger les éléments d'un tableau en ordre croissant ou décroissant. Il existe plusieurs méthodes de tri qui se différencient par leur complexité d'exécution et leur complexité de compréhension**.**

Problème : tri (sort en anglais) il s'agit, étant donnée une suite de n nombres, de les ranger par ordre croissant. La suite de n nombres est représentée par un tableau de n nombres et on suppose que ce tableau est entièrement en machine.

→ Un petit tableau, (7, 1, 15, 8, 2) ⇒ facile de l'ordonner pour obtenir (1, 2, 7, 8, 15).

→ Un tableau de plusieurs centaines, voire millions d'éléments ⇒ moins évident.

Nous choisissons par la suite la présentation des trois méthodes ou algorithmes de tri, chaque méthode permet de présenter un type de classe de complexité trouvée (pire des cas, moyenne et meilleur).

❖ **<u>Différents types de tri</u>** :

- **Tri interne** : tri en mémoire centrale. **Tris externes** : données sur un disque externe.
- **Tri de tableau** : tri qui trie un tableau. Extensible à toutes structures de données offrant un accès en temps (quasi) constant à ses éléments.
- **Tri générique** : peut trier n'import quel type d'objets pour autant qu'on puisse comparer ces objets.
- **Tri comparatif** : basé sur la comparaison entre les éléments (clés).
- **Tri itératif** : basé sur un ou plusieurs parcours itératif du tableau
- **Tri récursif :** basé sur une procédure récursive
- **Tri en place :** modifie directement la structure qu'il est en train de trier. Ne nécessite qu'une quantité très limitée de mémoire supplémentaire.
- **Tri stable :** conserve l'ordre relatif des éléments égaux (au sens de la méthode de comparaison).

1.1. Algorithme de Tri naïfs (tri par sélection)

On recherche le plus petit élément parmi les n éléments et on l'échange avec le premier élément ; puis on recherche le plus petit élément parmi les n−1 derniers éléments de ce nouveau tableau et on l´echange avec le deuxième élément; plus généralement, à la k-ième étape, on recherche le plus petit élément parmi les n−k +1 derniers éléments du tableau en cours et on l'échange avec le k-ième élément**.**

Exemple 1.

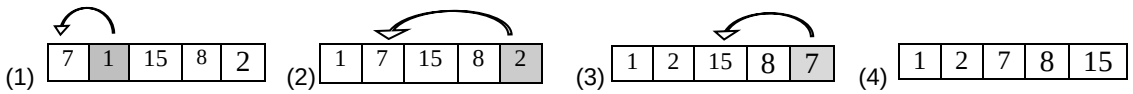


Figure 6. Comment le Tri par Sélection trié le tableau [7, 1, 15, 8, 2]

Données : Un tableau T de N éléments comparables

Résultat : Le tableau T contient les mêmes éléments mais rangés par ordre croissant

```
Algorithme TRI-SELECTION(T : tableau [1..N] d'entiers, entier N)
Var
i, j, min : entier;
Début
  pour i ← 1 à N - 1 faire
        min ← i ;
        pour j ← i + 1 à N faire
              si (T[j] < T[min]) alors
                   min ← j ;
              finsi ;
        finpour ;
        échange (T[i]; T[min]) ;
  finpour ;
Fin.
```

Complexité de l'algorithme

- **Complexité en temps :** le temps d'exécution t(n) du programme dépendra en général de la taille n des données d'entrée ; on distinguera :
  - la complexité moyenne, c'est-à-dire la valeur moyenne des t(n) : elle est en général difficile à évaluer, car il faut commencer par décider quelle donnée est « moyenne » ce qui demande un recours aux probabilités ;
  - la complexité pour le pire des cas, c'est-à-dire pour la donnée d'entrée donnant le calcul le plus long, soit t(n) maximal ;
  - la complexité pour le meilleur des cas, c'est-à-dire pour la donnée d'entrée correspondant au calcul le plus court, soit t(n) minimal.
- **Complexité en espace :** L'algorithme TRI-SELECTION trie les éléments du tableau dans le tableau lui-même et n'a besoin d'aucun espace supplémentaire. Il est donc très économe en espace car il fonctionne en espace constant : on trie le tableau sur place, sans avoir besoin de stocker une partie du tableau dans un tableau auxiliaire. Par contre il n'est pas économe en temps

1.2. Algorithme de Tri Fusion (Merge Sort)

Données : Un tableau T de N entiers indicés de l à r
Résultat : Le tableau T contient les mêmes éléments mais rangés par ordre croissant.

```
Algorithme TRI-FUSION (T : tableau [1..N] d'entiers ; N , l, r : entiers)
Var
m: entier;
Dédut
  si (l < r) alors
    m ← [(l + r)/2] ;
```

```
    finsi ;
   TRI-FUSION(T ; l ; m) ;
   TRI-FUSION(T; m+1, r) ;
   fusion(T; l; r; m) ;
fin.
```

Données : Un tableau T d'entiers indicés de l à r, et tel que l ≤ m < r et que les sous-tableaux T[l … m] et T[m + 1 … r] soient ordonnés
Résultat : Le tableau T contenant les mêmes éléments mais rangés par ordre croissant.

```
Algorithme fusion (T : tableau [l..r] d'entiers ;  l, r, m : entiers)
   Var
   i, j, k, n1, n2 : entiers;
   L : tableau [1..n1] d'entiers;
   R : tableau [1..n2] d'entiers;
   Début
   n1 ← m - l + 1 ;
   n2 ← r – m ;
   pour  I ← 1 à  n1 faire
         L[i] ← T[l + i - 1];
   finpour;
   pour j ← 1 à n2  faire
         R[j] ← T[m + j];
   finpour;
    i ← 1 ;
    j ← 1 ;
    L[n1 + 1] ← ∞ ; // On marque la fin du tableau gauche
    R[n2 + 1] ← ∞ ; // On marque la fin du tableau droit
    pour k ← l à r  faire
          si (L[i] <= R[j]) et (i<=n1) alors

                T[k] ← L[i] ;
                i ← i + 1;
          sinon
             si (j<=n2) alors
               T[k] ← R[j] ;
              j ← j + 1 ;
              finsi ;
           finsi ;
     finpour ;
   Fin.
```

Complexité de l'algorithme

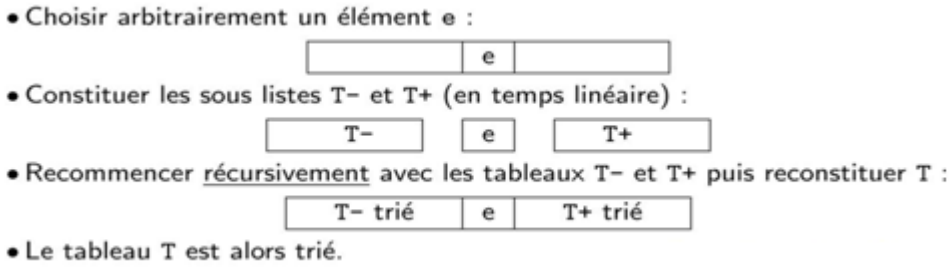
- **La complexité en temps** : est en (**nlogn)**,
- **La complexité en espace** : est **linéaire** dans tous les cas.

1.3. Le tri rapide (quicksort)

Principe de la méthode

Le principe du tri rapide « quicksort » est de découper (rapidement) le tableau en deux parties, une partie (T-) où tous les éléments sont inférieurs à une valeur donnée (le pivot) **e** et l'autre partie (T+) où tous les éléments sont supérieurs ou égaux au pivot. Ensuite on appelle récursivement quicksort indépendamment sur chaque partie. Il est facile de voir qu'un tel processus garantit que le tableau résultant est trié, du moment que les parties diminuent en taille.

Cela se fait en définissant trois fonctions : la fonction TrouvePivot qui recherche un pivot valide, la fonction Partition qui découpe le tableau, et l'action Quicksort qui appelle les deux autres et s'appelle récursivement.



Algorithme de tri rapide

1. Algorithme Fonction Trouver le Pivot

Fonction TrouverPivot(T : tableau d'entier ; i,j : entier) : entier
/* Retourne l'indice d'un pivot si les cases T[i]…T[j] contiennent au moins deux valeurs distinctes, sinon retourne -1. */
Var k : Entier ;
Début
  k ←i+1;
  Tant que (k≤j) **faire**
    Si (T[k]>T[i]) **alors Retourner(k) ;**
    Si (T[k]<T[i]) **alors Retourner(i) ;**
    k ← k + 1;
  fintq;
  Retourner (-1);
Fin.

2. Algorithme fonction Partition

```
Fonction Partition(T : tableau d'entier ; i,j : entier ; p :entier) : entier
/* Découper T en deux parties : de i à k-1 les éléments sont inférieurs à p, de k à j les éléments sont supérieur ou égaux à p. retourner cet indice k qui sépare ces deux parties. */
Var   k,l :entier ;
Début
  k← i;
  l← j;
   Répéter
        Echange(T[k],T[l]) ;
        Tantque (T[k]<p) faire  k← k + 1;
        Tantque (T[l]≥p) faire  l← l − 1;
   Jusqu'à  (k>l)
   Retourner(k) ;
Fin.
```

3. Algorithme Quicksort

```
Fonction Quicksort(T : tableau d'entier ; i,j : entier)
/* Trie le tableau T entre les indices i et j. */
Var id,k : entier ;
Début
    id ← TrouverPivot(T, i, j);
    Si (id≠(-1)) alors
        k← Partition (T, i, j, T[id]);
       Quicksort(T,i,k-1) ;
       Quicksort(T,k,j) ;
    finsi ;
Fin.
```

Complexité de l'algorithme

- **La complexité en temps**, comptée en nombre de comparaisons d'éléments :

  – **Le pire cas** est obtenu si le tableau de départ est déjà trié et chaque appel de partition ne fait que constater que le premier élément est le plus petit du tableau. Soit p(n) la complexité la pire pour trier un tableau de longueur n,
  c'est-`a-dire une **complexité quadratique**, la même que pour le tri par sélection

  – **La meilleure** complexité en temps pour Tri Rapide est obtenue lorsque chaque appel récursif de Tri Rapide se fait sur un tableau de taille la moitié du tableau précédente, ce qui minimise le nombre d'appels récursifs : O(nlog(n)).

  La complexité moyenne de Tri Rapide est plus difficile à calculer; la moyenne de la complexité en temps sur toutes les permutations possibles est de l'ordre de O(nlogn), la même que pour le tri fusion. La complexité en moyenne est donc égale à la complexité dans le meilleur cas, et de plus c'est la meilleure complexité

possible pour un algorithme de tri, ce qui nous permet de dire que Tri Rapide est un bon algorithme.

- **La complexité en espace**, QUICKSORT s'exécute en espace constant : on n'a pas besoin de recopier le tableau à trier, par contre il faut stocker les appels récursifs de QUICKSORT, et il peut y avoir O(n) appels récursifs à QUICKSORT.

Le tableau ci-dessous résume tous les complexités des algorithmes de tri :

Complexité	Espace	Temps		
		Pire	Moyenne	Meilleure
Tri sélection	Constant	n^2	n^2	n^2
Tri fusion	Linéaire	Nlogn	nlogn	nlogn
Tri rapide	Constant	n^2	nlogn	nlogn

1.4. Le tri par Tas (Heapsort)

Le tri par Tas (Heapsort en anglais), inventé par Williams en 1964, le principe de tri est basé sur une structure de donnée très utile, le tas.
La complexité bornée par $\Theta(n \log n)$ (dans tous les cas) et la mise en œuvre très simple

❑ **Arbres : D**éfinition

Définition : Un arbre (tree) T est un graphe dirigé (N, E), où :

- N est un ensemble de noeuds, et
- E $\subset$ N x N est un ensemble d'arcs,

Possédant les propriétés suivantes :

- T est connexe et acyclique
- Si T n'est pas vide, alors il possède un noeud distingué appelé racine.

Cette racine est unique.

- Pour tout arc (n1, n2) $\in$ E, le noeud n1 est le parent de n2.
  - ❖ La racine de T ne possède pas de parent.
  - ❖ Les autres noeuds de T possèdent un et un seul parent

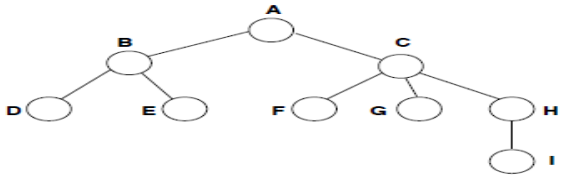


Figure 7. Exemple d'arbre

Terminologie

- Si n2 est le parent de n1, alors n1 est le fils de n2.
- Deux noeuds n1 et n2 qui possèdent le même parent sont des frères.
- Un noeud qui possède au moins un fils est un noeud interne.

- Un noeud externe (non interne) est une feuille de l'arbre.
- Un noeud n2 est un ancêtre (ancestor) d'un noeud n1 si n2 est le parent de n1 ou un ancêtre du parent de n1.
- Un noeud n2 est un descendant d'un noeud n1 si n1 est un ancêtre de n2.

Un chemin

est une séquence de noeuds n1, n2, . . . , nm telle que pour tout :

$i \in [1, m-1]$, (ni , ni+1) est un arc de l'arbre.

Remarque : Il n'existe jamais de chemin reliant deux feuilles distinctes.

La hauteur (height)

La hauteur d'un noeud n est le nombre d'arcs d'un plus long chemin de ce vers une feuille. La hauteur de l'arbre est la hauteur de sa racine.

La profondeur (depth)

La profondeur d'un noeud n est le nombre d'arcs sur le chemin qui le relie à la racine.

<u>Propriétés des arbres binaires entiers</u>

- Le nombre de noeuds externes est égal au nombre de noeuds internes plus 1.
- Le nombre de noeuds interne est égal à (n−1)/2 , où n désigne le nombre de noeuds.
- Le nombre de noeuds à la profondeur (ou niveau) i est $\leq 2^i$
- La hauteur h de l'arbre est $\leq$ au nombre de noeuds internes.
- Le lien entre hauteur et nombre de noeuds peut etre résumé comme suit :

$$n \in \Omega(h) \text{ et } n \in O(2^h) \text{ (ou } h \in O(n) \text{ et } h \in \Omega(\log n))$$

Tas : Définition

- Un arbre binaire complet est un arbre binaire tel que :
  - Si h dénote la hauteur de l'arbre :
    - Pour tout $i \in [0, h-1]$, il y a exactement 2^i noeuds à la profondeur i .
    - Une feuille a une profondeur h ou h − 1.
    - Les feuilles de profondeur maximale (h) sont "tassées" sur la gauche.
- Un tas binaire (binary heap) est un arbre binaire complet tel que :
  - Chacun de ses noeuds est associé à une clé.
  - La clé de chaque noeud est supérieure ou égale à celle de ses fils (propriété d'ordre du tas).

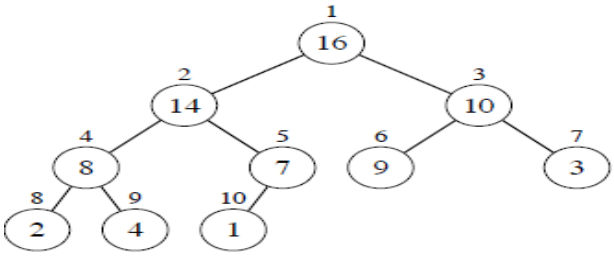


Figure 8. Exemple de tas

Le tas (Heap) nous permet de résoudre le problème des files de priorité. Il est fait de la manière suivante :

- **Structure** : il y a deux types de tas qui sont « symétriques », le tas min et le tas max. Dans le tas max, tous les noeuds des niveaux inférieurs sont plus petits. Dans le tas min, tous les noeuds des niveaux inférieurs sont plus grands.
- **Equilibre** : tous les niveaux de l'arbre sont pleins sauf le dernier qui doit l'être de gauche à droite (s'il existe un fils droit alors il y a nécessairement un fils gauche).

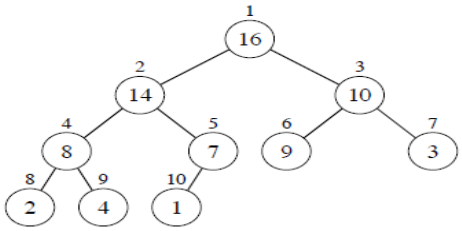
Propriété d'un tas

- Soit T un arbre binaire complet contenant n entrées et de hauteur h :
- n est supérieur ou égal à la taille de l'arbre complet de hauteur h − 1 plus un, soit

$$2^{h-1+1} - 1 + 1 = 2^h$$

- n est inférieur ou égal à la taille de l'arbre complet de hauteur h, soit $2^{h+1} - 1$

$$2^h \le n \le 2^{h+1} - 1 \Leftrightarrow 2^h \le n < 2^{h+1}$$
$$\Leftrightarrow h \le \log_2 n < h + 1$$
$$\Leftrightarrow h = \lfloor \log_2 n \rfloor$$



NB. Si on a un arbre A tel que |A| = n alors sa hauteur est floor(log n)

Implémentation par un tableau

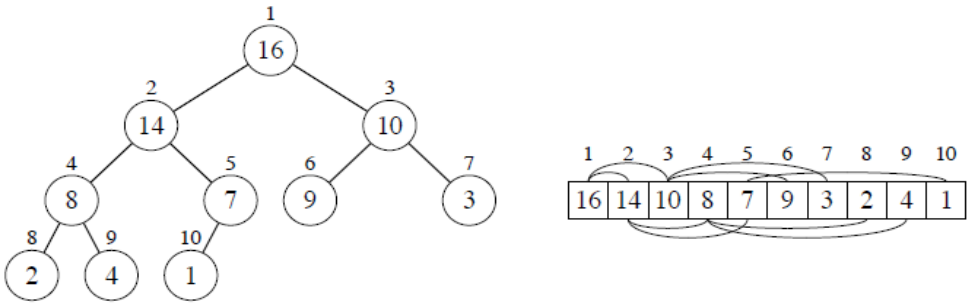


Figure 9. Implémentation par un tableau

- Un tas peut être représenté de manière compacte à l'aide d'un tableau A.
- ❖ La racine de l'arbre est le premier élément du tableau.
- ❖ Parent(i) = [i/2]
- ❖ Left(i) = 2i
- ❖ Right(i) = 2i + 1
- Propriété d'ordre du tas: $\forall i, A[\text{PARENT}(i)] \geq A[i]$

❖ Le tableau ci-dessous résume tous les complexités des algorithmes de tri :

Algorithme	*Complexité*			*En place ?*
	Pire	*Moyenne*	*Meilleure*	
INSERTION-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	oui
SELECTION-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	oui
BUBBLE-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	oui
MERGE-SORT	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	non
QUICK-SORT	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	oui
HEAP-SORT	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)^*$	oui

2. Présentation des différentes méthodes de recherche

2.1. Recherche séquentielle : recherche dans un tableau non trié

Parcourir le tableau à partir du premier élément, et à s'arrêter dès que l'on trouve l'élément cherché.

Soient T un tableau de n éléments et k l'élément qu'on recherche.
Données : Un tableau T de n éléments et un élément k
Résultat : Le premier indice i où se trouve l'élément k si k est dans T, et sinon la réponse « k n'est pas dans T »

```
Procédure RechercheNonTrie (T : tableau [1..N] d'éléments ; k : élément)
Var
I: entire;
Début
    i ←1;
    Tantque ((i <=n) et (T[i] ≠ k))  faire
        i ← i + 1;
    fintantque;
    Si (i < n+1) alors
        écrire (T[i] = k);
    sinon
        écrire (''k n'est pas dans T'') ;
    finsi ;
Fin.
```

Complexité de l'algorithme

La complexité en temps de RECHERCHE est linéaire (de l'ordre de n), puisqu'il faudra au pire parcourir tout le tableau.

2.2. Recherche séquentielle : recherche dans un tableau trié

```
Fonction RechercheTrie(T : tableau [0..max+1] d'éléments ; k:élément ) : entier
Var
i : entier ;
Début
  i← 0;
  Tantque (k>T[i]) faire
     i←i+1 ;
  fintanque ;
retourner(i) ;
Fin.
```

2.3. Recherche dichotomique

Cette méthode s'applique si le tableau est déjà trié et s'apparente alors à la technique Diviser pour Régner . Elle suppose donc :

1. que les éléments du tableau sont comparables
2. un prétraitement éventuel du tableau où s'effectue la recherche : on va, par un précalcul, trier le tableau dans lequel on veut chercher.

Données : Un tableau T[1..N] d'entiers déjà ordonné et un entier k
Résultat : Un indice i où se trouve l'élément k, ou bien -1 si k n'est pas dans T

```
Algorithme RechercheDicho (T : tableau [1..N] d'éléments ; k:élément ) : entier
i,l,r : entier;
Début
l ← 1;
r ← N;
i ← [(l + r)/2];
Tantque ((k ≠ T[i]) et (l ≤ r))  faire
       si (k < T[i]) alors
          r ← i – 1;
       sinon
          l ← i + 1;
       finsi;
       i ← [(l + r)/2];
       si (k = T[i]) alors
         retourner (i) ;
       sinon
         retourner (-1) ;
       finsi ;
```

fintantque ;
Fin.

Complexité de l'algorithme

Soit t(n) le nombre d'opérations effectuées dans cet algorithme sur un tableau de taille n : t(n) satisfait l'équation de récurrence t(n) = t(n /2)+1, comme t(1) = 1, on en déduit t(n) = O(log n). On remarquera que la complexité en temps est réduite de linéaire (O(n)) à logarithmique (O(log n)) entre la recherche séquentielle et la recherche dichotomique.