نظرية الإنتاج

- **تمهيـد:**

تحاول نظرية المنتج أن تبين مختلف التصرفات و الموافق, والقرارات التي تقوم بها المؤسسة لغرض إنتاج كمية معينة ضمن الميزانية المخصصة لذلك، بهدف الحصول أفضل المكاسب وأكبرها.

أولا:الهدف من دراسة سلوك المنتج :

الهدف النهائي من دراسة سلوك المنتج هو اشتقاق العرض الخاص بسلعة معينة في ظل شكل السوق السائد.

ثانيا: الفرضيات التي يقوم عليها سلوك المنتج :

الفرضية الأساسية التي يقوم عليها تحليل سلوك المنتج هي عقلانيته، فالمنتج العقلاني أو الرشيد هو ذلك المنتج الذي يهدف إلى استعمال عوامل الإنتاج بالشكل الذي يسمح له بإنتاج الكمية التي تعظم ربحه في حدود الميزانية المخصصة للإنتاج.

ثالثا: المعطيات التي يجب توفرها من اجل تحليل سلوك المنتج:

حتى نتمكن من تحليل سلوك المنتج يجب أن تتوفر الشروط التالية:

1/ **دالة الإنتاج:** و هي العلاقة التي تحدد لنا الطريقة الإنتاجية التي يستعملها المنتج، أي طريقة المزج أو الخلط بين عوامل الإنتاج.

2/ **الميزانية المخصصة للإنتاج**: و هي ما يخصصه المنتج من أموال لشراء عوامل الإنتاج.

3/ **الأسعار**: ونقصد بها أسعار عوامل الإنتاج في سوق تلك العوامل.

1- دالة الإنتاج:

لكي يستطيع منتج معين إنتاج كمية محددة من سلعة معينة, يجب عليه استعمال كميات مختلفة من عوامل الإنتاج (العمل, رأس المال, الأرض, التكنولوجيا، التنظيم....) .

دالة الإنتاج هي تلك الصيغة الرياضية التي تصور العلاقة ما بين الكمية المنتجة وعوامل الإنتاج المساهمة في إنتاجها.

و دالة الإنتاج قد تكون بدلالة عامل إنتاجي واحد متغير أو أكثر:

$$Q_1=f(L)$$

$$Q_2=f\ (L, K)$$

$$Q_3=f\ (L, K, T)$$

2- دالة الإنتاج بعامل متغير واحد(دالة الإنتاج في الفترة القصيرة):

في هذه الحالة يستعمل المنظم عامل إنتاجي واحد متغير بينما العوامل الأخرى(رأس المال , الأرض, التكنولوجيا.....) تبقى ثابتة, تسمى هذه الحالة بـ:عملية الإنتاج في الفترة القصيرة، ولهذا السبب لا يمكن تغيير عوامل الإنتاج بسهولة، لأن هناك من العوامل ما يحتاج إلى فترات أطول من أجل تغييره، مثل: الأرض، ويتم اختيار عامل الإنتاج المتغير حسب طبيعة الصناعة.

وعادة في تحليل سلوك المنتج يعتبر العامل المتغير هو عنصر العمل (L).

2-1- أنواع الإنتاج في الفترة القصيرة:

في الفترة القصيرة يوجد ثلاث أنواع من الإنتاج هي الإنتاج الكلي والإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي.

أ- **الإنتاج الكليTP**: يمكن تعريف الإنتاج الكلي TP على أنه مجموع الكميات المنتجة عند استخدام عامل الإنتاج المتغير (العمل).

ب- **الإنتاج المتوسطَ للعملAP_L**: الإنتاج المتوسط للعمل هو عبارة عن مدى مساهمة كل عامل في الإنتاج الكلي، أي هو الإنتاج الكلي مقسوم على الكمية المستخدمة من عامل الإنتاج المتغير (العمل).

و يحسب كما يلي: $$AP_L = \frac{TP}{L}$$

ج- **الإنتاج الحدي للعمل MP_L**: الإنتاج الحدي هو التغير في الإنتاج الكلي الناشئ عند زيادة استخدام العامل المتغير العمل بوحدة واحدة. و يحسب بالطريقة التالية:

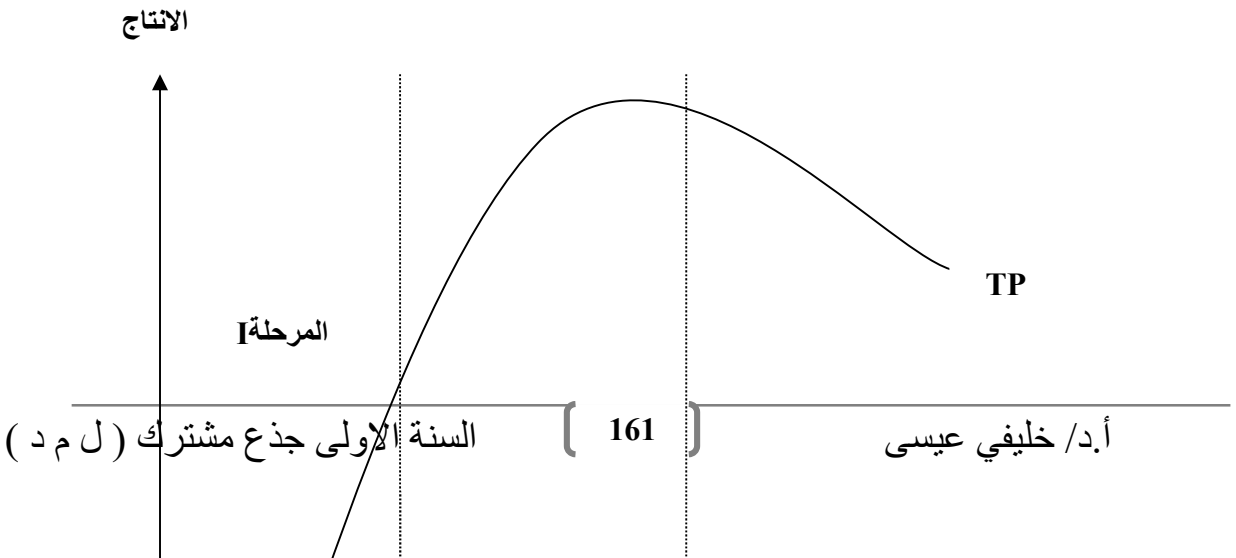
$$MP_L = \frac{\Delta TP}{\Delta L} = \frac{\delta TP}{\delta L}$$

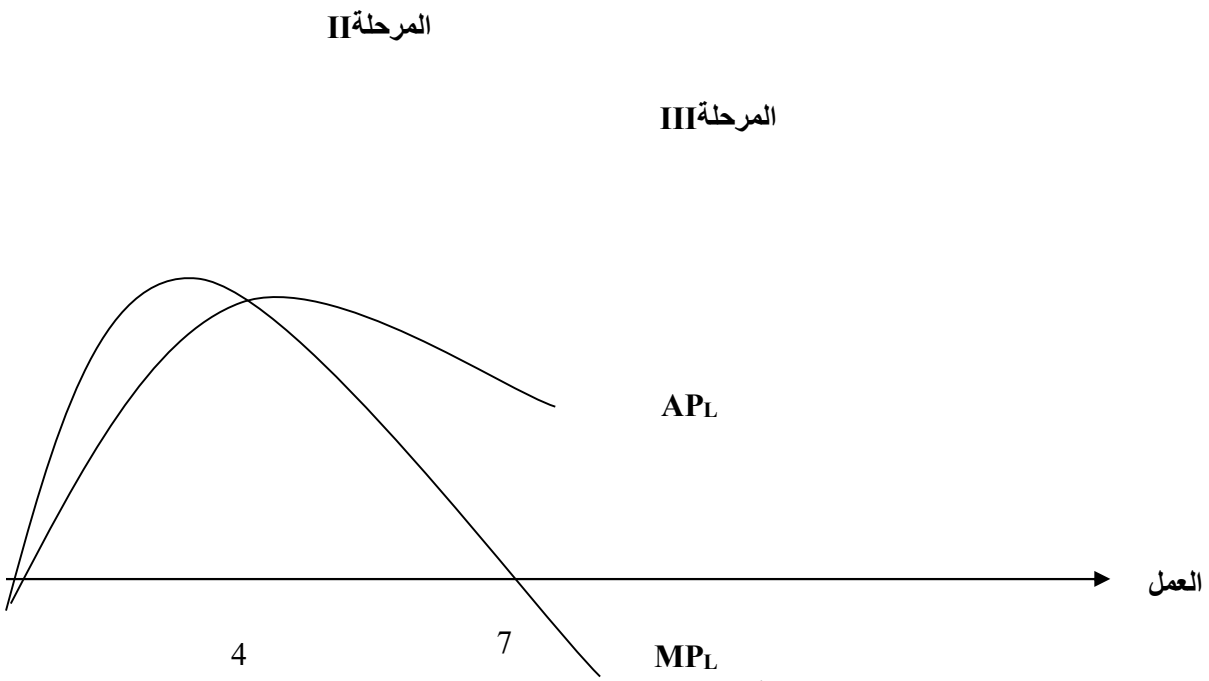
د- التمثيل البياني لمنحنيات الإنتاج الكلي و الإنتاج الحدي و الإنتاج المتوسط:

يمكن تمثيل الأنواع الثلاثة للإنتاج(الكلي،الحدي،المتوسط) و ذلك كما هو مبين في المثال التالي:

إنتاج حدي MP_L	إنتاج متوسط AP_L	إنتاج كلي TP	العمل L	الأرض T
-	0	0	0	1

1	1	10	10	10
1	2	24	12	14
1	3	39	13	15
1	4	52	13	13
1	5	62	12.4	10
1	6	66	11	4
1	7	66	9.42	0
1	8	64	8	-2





من خلال الشكل السابق نلاحظ أن الإنتاج الكلي TP يرتفع إلى غاية وصوله إلى نهائية العظمى يبدأ بعدها في التناقص ومن منحنى الإنتاج الكلي يمكن اشتقاق منحنى الإنتاج المتوسط (AP_L) و منحنى الإنتاج الحدي (MP_L)، حيث أن منحنى الإنتاج المتوسط يزداد حتى يصل إلى نهايته العظمى، يأخذ بعدها في التناقص مع زيادة إستخدام العمل، ونفس القول ينطبق على منحنى الإنتاج الحدي الذي يزيد هو الأخر حتى يبلغ نهايته العظمى بعدها يبدأ في التناقص حتى يقطع محور العمل أي $(MP_L = 0)$ ، ليصبح بعدها سالب تماما مع زيادة إستخدام عنصر العمل.

هـ- العلاقة بين المنحنيات الثلاثة:

إن التمعن في الشكل السابق يعطينا أكثر تفاصيل حول تطورات المنحنيات، والعلاقة بينهم.

1) العلاقة بين منحنى TP و منحنى MP_L:

- عندما يكون منحنى الإنتاج الحدي متزايدا تماما يكون منحنى الإنتاج الكلي متزايدا بمعدل متزايد.
- عندما يصل منحنى الإنتاج الحدي إلى أعظم قيمة له يكون منحنى الإنتاج الكلي عند نقطة انعطاف (نقطة التحول من التزايد بمعدل متزايد الى التزايد بمعدل متناقص).
- عندما يكون منحنى الإنتاج الحدي متناقصا في المجال الموجب يكون منحنى الإنتاج الكلي متزايدا بمعدل متناقص.

- عندما يقطع منحنى الإنتاج الحدي محور العمل(الإنتاج الحدي معدوم) يكون منحنى الإنتاج الكلي عند أعظم قيمة له (أعظم إنتاج).
- عندما يكون منحنى الإنتاج الحدي متناقصا في المجال السالب يكون منحنى الإنتاج الكلي متناقصا تماما.

2) **العلاقة بين منحنى AP_L و منحنى MP_L:**

- عندما يكون منحنى الإنتاج المتوسط متزايدا تماما يكون منحنى الإنتاج الحدي فوقه دوما.
- عندما يتقاطع منحنيا الإنتاج المتوسط و الإنتاج الحدي يكون منحنى الإنتاج المتوسط عند نهايته العظمى.
- عندما يكون منحنى الإنتاج المتوسط متناقصا تماما يكون منحنى الإنتاج الحدي تحته دوما.

2-2- مراحل الإنتاج:

من الشكل السابق نستطيع تقسيم مراحل الإنتاج إلى ثلاث مراحل أساسية هي:

أ- **المرحلةالاولى**:

في المرحلة الأولى يتزايد منحنى الإنتاج المتوسط حتى يبلغ مستواه الأقصى، كما يتزايد منحنى الإنتاج الحدي حتى يبلغ هو أيضا مستواه الأقصى ثم يبدأ بالتناقص مع بقائه موجبا، إلى أن يتقاطع مع منحنى الإنتاج المتوسط $(MP_L = AP_L)$، في مقابل ذلك يزيد الإنتاج الكلي بمعدلات متزايدة إلى أن يصل إلى نقطة الإنعطاف .

تبدأ المرحلة الأولى من نقطة الأصل ، وتنتهي عندما يبلغ منحنى الإنتاج المتوسط نهايته العظمى(أي عندما يتقاطع منحنى الإنتاج الحدي مع منحنى الإنتاج المتوسط).

$$L=0 \longrightarrow (MP_L = AP_L)$$

$$L=0 \longrightarrow L = 4$$

ب- المرحلةالثانية:

تبدأ هذه المرحلة من نهاية المرحلة الأولى أي من النهاية العظمى للإنتاج المتوسط و تنتهي عندما يقطع منحنى الإنتاج الحدي محور العمل، أي عندما ينعدم الإنتاج الحدي $(MP_L = 0)$.

$$(MP_L = AP_L) \longrightarrow (MP_L = 0)$$

$$L=4 \longrightarrow L=7$$

ج- المرحلة الثالثة:

تبدأ عندما يقطع منحنى الانتاج الحدي محور العمل (محور L)، و تنتهي إلى مالا نهاية.

و في هذه المرحلة يتناقص الإنتاج الكلي تماما.

$$(MP_L = 0) \longrightarrow \infty$$

$$L=7 \longrightarrow L=\infty$$

2-3- قانون الغلة المتناقصة:

يخضع تطور الإنتاج بهذا الشكل إلى ما يسمى بقانون النسب المتغيرة أو قانون الغلة المتناقصة و الذي يعني أنه عند إضافة وحدات متتالية (L=1,L=2,L=3,....) من عامل الإنتاجي المتغير "العمل L" ، فان الإنتاج الكلي يزداد بمعدل متزايد ثم يزداد بمعدل متناقص ثم يتناقص تماما , وذلك تبعا لتطورات الإنتاج الحدي , ويبدأ قانون الغلة المتناقصة في العمل انطلاقا من النقطة التي يبلغ فيها الإنتاج الحدي مستواه الأعظمي حيث يبدأ فيها بالتناقص في المجال الموجب دون توقف إلى أن ينعدم.

2-4- المنطقة الاقتصادية(القرار الرشيد للمنتج عند المرحلة الثانية):

يمكن أن نلاحظ انه عند المرحلة الثالثة يستعمل المنتج كمية كبيرة من العمل مقابل كمية قليلة من رأس المال، وفي هذه المرحلة فإن إنتاجية العمل تكون سالبة بالرغم من أن إنتاجية رأس المال عالية (موجبة) ، ويمكن الحصول على مستوى إنتاجي أفضل باستعمال عدد أقل من العمال , ولذلك فإن هذا المنتج لا يتخذ قراراته الإنتاجية في هذه المرحلة .

كم أن المرحلة الأولى من الإنتاج تناظر المرحلة الثالثة منه (من الإنتاج) ، فبالنسبة لرأس المال يستعمل المنتج كمية كبيرة منه، مقابل عدد كبير من العمال وفي هذه المرحلة فإن إنتاجية رأس المال تكون سالبة بالرغم من أن إنتاجية العمل عالية (موجبة)، ويمكن الحصول على مستوى أفضل من الإنتاج بإستعمال كمية أقل من رأس المال(كمية أكبر من العمل) , ولذلك فإن المنتج لا يتخذ قراراته الإنتاجية في هذه المرحلة أيضا .

تبقى المرحلة الثالثة من الإنتاج التي تكون فيها إنتاجية رأس المال وإنتاجية العمل موجبتان رغم تناقصهما, ولذلك يجب أن تتركز القرارات الرشيدة لهذا المنتج في المرحلة الثانية من مراحل الإنتاج.

- **مثال:** لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = 10 + 12L - L^2$

المطلوب:- إيجاد دالة الإنتاج المتوسط للعمل.

- إيجاد دالة الإنتاج الحدي للعمل.
- إيجاد عدد العمال عندما يكون الإنتاج الكلي في حده الأقصى.
- إيجاد عدد العمال عندما يكون الإنتاج الحدي في حده الأقصى.
- إيجاد عدد العمال عندما يكون الإنتاج المتوسط في حده الأقصى.

- **الحل:**1- ايجاد دالة الإنتاج المتوسط للعمل:

$$AP_L = \frac{TP}{L} = \frac{10 + 12L - L^2}{L}$$

$$AP_L = \frac{10}{L} + 12 - L$$

1- ايجاد دالة الإنتاج الحدي للعمل:

$$MP_L = \frac{\delta TP}{\delta L} = 12 - 2L$$

$$MP_L = 12 - 2L$$

3- إيجاد عدد العمال عندما يكون الإنتاج الكلي في حده الأقصى:

يكون الإنتاج الكلي في حده الأقصى عندما يكون الإنتاج الحدي معدوما.

$$MP_L = 0 = \frac{\delta TP}{\delta L} = 12 - 2L = 0$$

$$12 - 2L = 0 \Leftrightarrow L = \frac{12}{2} \Leftrightarrow L = 6$$

4- إيجاد قيمة الإنتاج الحدي عندما يكون الإنتاج الكلي في حده الأقصى:

يكون الإنتاج الكلي في حده الأقصى عند:L=6

عنـد هذا العدد من العمال تصبح قيمة الإنتاج الحدي:

$$MP_L = 12 - 2(6) = 12 - 12 = 0$$

5- إيجاد قيمة الإنتاج المتوسط عندما يكون الإنتاج الكلي في حده الأقصى:

يكون الإنتاج الكلي في حده الأقصى عند:L=6

عنـد هذا العدد من العمال تصبح قيمة الإنتاج المتوسط:

$$AP_L = \frac{10}{6} + 12 - 6$$

$$AP_L = \frac{46}{6} = 7.66$$

3- الإنتاج باستخدام عاملين إنتاجيين متغيرين (دالة إنتاج الفترة الطويلة):

في هاته الحالة يستطيع المنظم أن يستعمل عاملين إنتاجين متغيرين، وبما أنه يستطيع أن يغير عوامل الإنتاج كلها، فمعنى ذلك أن دالة الإنتاج المعبرة عن ذلك هي دالة الإنتاج للفترة طويلة، لأن المنتج لا يستطيع تغيير كل عوامل الإنتاج إلا في الفترة الطويلة.

وتكون دالة الإنتاج في هاته الفترة عبارة على $Q = f(L,K)$

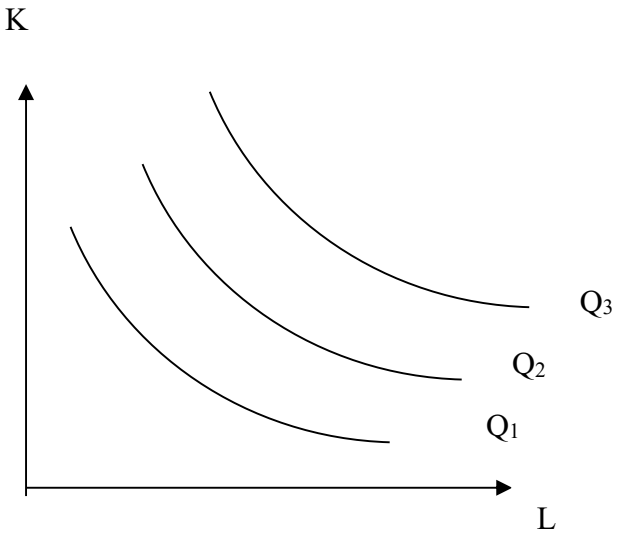
حيث L هو العمل، وK هو رأس المال.

وكلاهما يستخدم بمقادير متغيرة، ويمكن التعبير بيانيا على هذه الدالة بما يسمى بمنحنى الناتج المتساوي.

3-1- تعريف منحنى الناتج المتساوي:

تبين منحنيات الناتج المتساوي التوافيق أو التوليفات المختلفة من عوامل الإنتاج (العمل، رأس المال) التي تنتج نفس المقادير من الإنتاج(أو لها نفس حجم الإنتاج).

و المنتج ليس له منحنى ناتج متساوي واحد و إنما مجموعة من منحنيات الناتج المتساوي و التي تسمى خريطة أو شبكة منحنيات الناتج المتساوي.



3-2- خصائص منحنيات الناتج المتساوي:

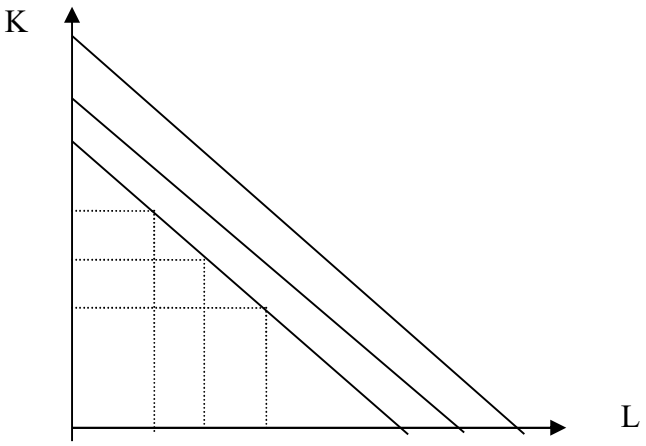
منحنيات الناتج المتساوي لها نفس خصائص منحنيات السواء و المتمثلة في:

- ✓ ميل منحنيات الناتج المتساوي سالب, فهو بالتالي يعكس ظاهرة الإحلال وهذا في المدى الملائم أو في المنطقة الاقتصادية الإنتاج.
- ✓ محدبة باتجاه نقطة الأصل, وهي الحالة الوحيدة التي يكون فيها المعدل الحدي للإحلال التقني متناقصا.
- ✓ منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع أبدا, حتى تكون كل نقطة تقع على منحنى أعلى أفضل من أي نقطة تقع على منحنى أسفل, وهو مالا يتحقق في حالة التقاطع.

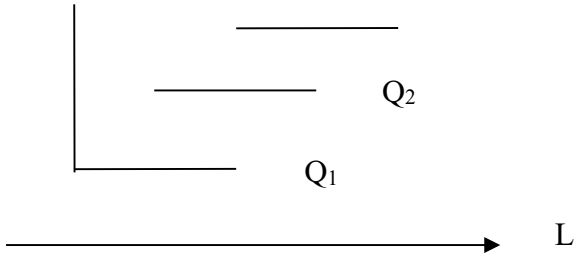
3-4- حالات استثنائية لمنحنيات الناتج المتساوي:

منحنيات الناتج المتساوي يمكن أن تأخذ أشكالا أخرى هي:

أ- منحنيات الناتج المتساوي في حالة L و K متكاملتان تماما:

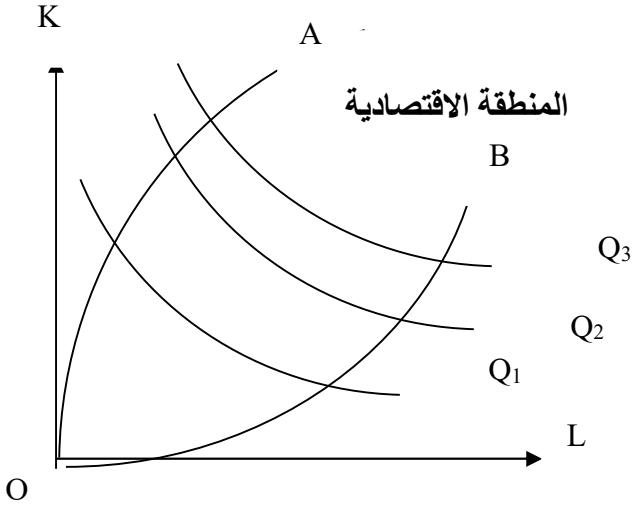


ب- منحنيات الناتج المتساوي في حالة L و K بديلتان تماما:



4- تعيين المدى الملائم أو المنطقة الاقتصادية للإنتاج:

في الحقيقة ليست كل النقاط الموجودة على نفس منحنى الناتج المتساوي تعبر عن نقاط المنطقة الاقتصادية أو النقاط الاقتصادية , بالرغم من أنها تعطي لنا نفس المستوى من الإنتاج، و السبب في ذلك أن هناك نقاط تتطلب استعمال كميات أكبر من رأس المال والعمل للحصول على مستوى الإنتاج نفسه , وبالتالي ليس من المعقول أن نختار مثل هاته النقاط , وعليه فإن المدى أو المنطقة الاقتصادية الإنتاج هي تلك المنطقة التي يكون فيها المعدل الحدي للإحلال التقني *TMST* بين عوامل الإنتاج سالبا، أي تكون هناك إمكانية الإحلال بين عوامل الإنتاج، ويمكن فصل المنطقة الاقتصادية من المنطقة غير الاقتصادية بخطوط تسمى : خطوط الحدود , وتمر خطوط الحدود بكل نقاط الإنعطاف الموجودة على كل المنحنيات الناتج المتساوي حيث إلى خارج هذه الخطوط يكون المعدل الحدي للإحلال التقني *TMST* موجبا, و إلى داخلها سالبا، و هو ما يمثله الشكل التالي:



- **خصائص المنطقة الاقتصادية:**

تتميز المنطقة الاقتصادية للإنتاج في الفترة الطويلة بالخصائص التالية:

- داخل هذه المنطقة يكون المعدل الإحلال التقني *TMST* سالبا , وهذا دليل على أن ميل كل نقطة داخل هاته المنطقة هو ميل سالب.

- قابلية الإحلال بين عوامل الإنتاج.
- الإنتاجية الحدية موجبة داخل هذه المنطقة.

5- المعدل الحدي للإحلال التقني أو الفني $TMST$:

المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST$ يقيس مدى الانخفاض في عنصر إنتاجي عند ما يزداد العنصر الآخر بوحدة واحدة, بينما يبقى مستوى الإنتاج ثابت. .بمعنى أن المعدل الحدي لإحلال التقني للعامل L محل K مقدار الكمية التي ينبغي أن يتخلى عليها المنتج من K لزيادة استخدام العامل L بوحدة واحدة، مع البقاء على نفس مستوى الإنتاج (نفس منحنى الناتج المتساوي).

و يحسب بالشكل التالي: $$TMS_{T_{(L,K)}} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{-\delta K}{\delta L}$$

- **مثال:**ليكن لدينا الجدول التالي به ثلاث منحنيات ناتج متساوي، احسب المعدل الحدي للإحلال التقني عند كل منحنى من المنحنيات الثلاثة:

I			II			III		
L	K	$TMST_{L,K}$	L	K	$TMST_{L,K}$	L	K	$TMST_{L,K}$
3	14	-	4	14	-	5.5	15	-
2	10	-4	3	11	-3	5	12	-6
3	6	4	4	8	3	5.5	9	6
4	4.5	1.5	5	6.3	1.7	6	8.3	1.4
5	3.5	1	6	5	1.3	7	7	1.3
6	3	0.5	7	4.4	0.6	8	6	1
7	2.7	0.3	8	4	0.4	9	5.6	0.4
8	3	-0.3	9	4.4	-0.4	10	6	-0.4

6- منحنى التكلفة المتساوي:

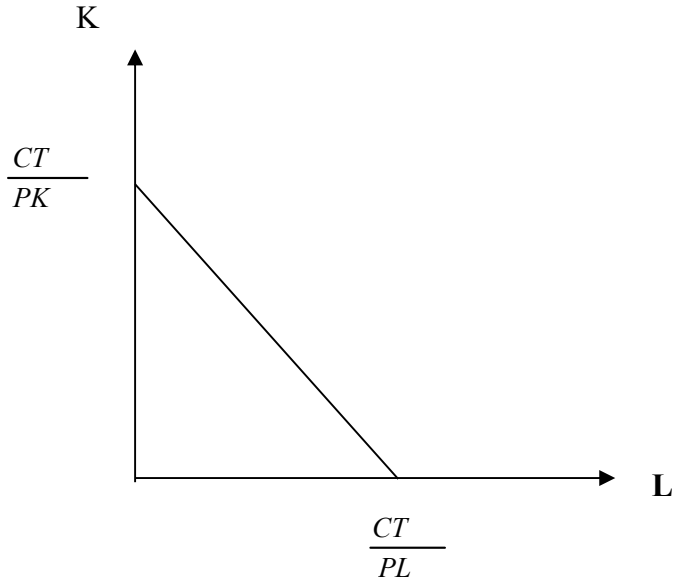
عندما يقرر المنظم القيام بالعملية الإنتاجية, فإنه يبدأ بتخصيص الميزانية اللازمة لذلك، أي مقدار ما يمكن إنفاقه للحصول على عوامل الإنتاج، حينئذ يجب أن لا يتجاوز الإنفاق على عوامل الإنتاج هذه الميزانية.

و الإنفاق الكلي على عوامل الإنتاج هو مجموع الإنفاق على عنصر العمل(أي مقدار الكمية المستعملة من العمل مضروبا في سعر الوحدة منه)، و الإنفاق على عنصر رأس المال(مقدار الكمية المستعملة من رأس المال مضروبا في سعر الوحدة منه).

فإذا رمزنا للإنفاق الكلي بالرمز: CT ، و عنصر رأس المال بالرمز K وعنصر العمل بالرمز L، حيث سعر رأس المال هو: PK، وسعر العمل هو: PL. فإننا نحصل على معادلة التكلفة من الشكل:

$$CT = L.P_L + K.P_K$$

نقوم بالتمثيل البياني و الهندسي لمعادلة التكلفة عن طريق ما يسمى بمنحنى التكلفة المتساوي،و الذي هو عبارة محل هندسي يصور مختلف إمكانيات الإنفاق على عوامل الإنتاج لدى منتج معين، وهو بصفة عامة عبارة عن خط مستقيم ميله سالب وثابت، و يمكن توضيحه بالشكل التالي:



L	K
$\frac{CT}{PL}$	0
0	$\frac{CT}{PK}$

7- توازن المنتج :

يكون المنتج في حالة توازن عندما يميل إلى استخدام و استعمال عوامل الإنتاج بالشكل الذي يسمح له بإنتاج أعظم كمية ممكنة من منتوج، في حدود الميزانية المخصصة له ويمكن إيجاد توازن المنتج بنفس الطرق التي استخدمناها في إيجاد توازن المستهلك.

7-1- إيجاد نقطة التوازن رياضيا:

عندما تتوفر دالة الإنتاج و معادلة الدخل، يمكننا أن نجد الكميات التي يمكن استخدامها من العمل و رأس المال، و التي تجعل هذه الدالة أعظم ما يمكن في حدود ميزانية الإنتاج الممكنة، أو التي تقلل ميزانية الإنتاج في حدود إنتاج معلوم، و قد نجد هذه الكميات باستعمال عدة طرق رياضية نذكر منها:

أ- طريقة شرط التوازن:

كما هو الشأن في نظرية سلوك المستهلك فإنه يمكن إيجاد كميات العمل, ورأس المال التي تحقق أعظم إنتاج ممكن وذلك بالعلاقة التالية:

$$\frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة في حالة إستخدام أكثر من عاملين إنتاجين.

ب- طريقة مضاعف لاغرانج:1) وضع دالة الهدف:

- **دالة الهدف في حالة تعظيم الإنتاج :**

$$Z = \max Q + \lambda(CT - P_L \cdot L - P_K \cdot K)$$

- **دالة الهدف في حالة تقليل التكلفة:**

$$W = P_L \cdot L + P_K .K + \lambda(Q_0 - Q)$$

2) وضع نموذج الحل:- نموذج الحل في حالة التعظيم:

$$\frac{\delta Z}{\delta L} = 0 \Leftrightarrow MP_L - P_L .\lambda = 0 \quad \rightarrow 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{MP_L}{P_L} \Leftrightarrow \lambda = \lambda$$

$$\frac{\delta Z}{\delta K} = 0 \Leftrightarrow MP_K - P_K .\lambda = 0 \quad \rightarrow 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{MP_K}{P_K} \Leftrightarrow \frac{MP_L}{P_L} = \frac{MP_K}{P_K}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \lambda} = 0 \Leftrightarrow CT - L.P_L - K.P_K = 0 \quad \rightarrow 3$$

- **نموذج الحل في حالة التقليل:**

$$\frac{\delta W}{\delta L} = 0 \Leftrightarrow P_L - MP_L .\lambda = 0 \quad \rightarrow 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{P_L}{MP_L} \Leftrightarrow \lambda = \lambda$$

$$\frac{\delta W}{\delta K} = 0 \Leftrightarrow P_K - MP_K .\lambda = 0 \quad \rightarrow 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{P_K}{MP_K} \Leftrightarrow \frac{P_L}{MP_L} = \frac{P_K}{MP_K}$$

$$\frac{\delta W}{\delta \lambda} = 0 \Leftrightarrow Q_0 - Q = 0 \quad \rightarrow 3$$

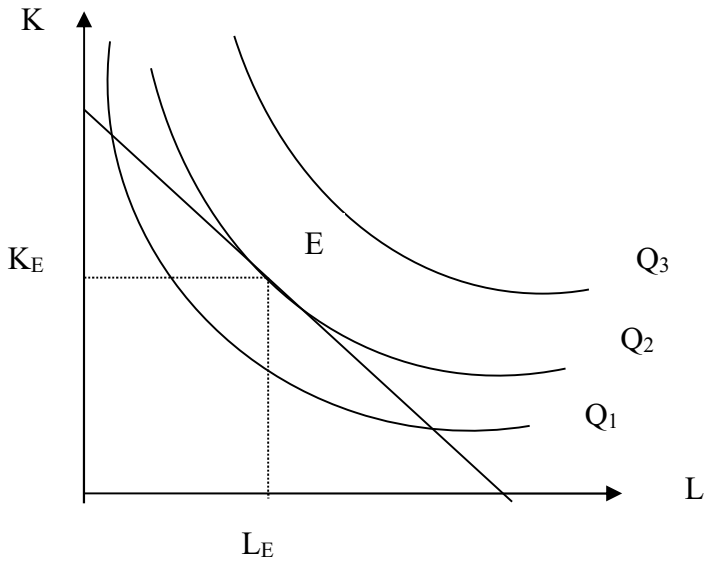
3) حل النموذج:

وبحل نموذج التعظيم و التقليل نحصل على الكميات المثلى من L و K.

7-2- إيجاد توازن المنتج هندسيا:

في شبكة المنحنيات الناتج المتساوي يتحدد توازن المنتج عند نقطة التوازن، و هي نقطة التماس بين خط التكلفة المتساوية وأعلى منحنى ناتج متساوي يمكن أن يصله هذا الخط، وتقع هذه النقطة بالضرورة داخل المنطقة الاقتصادية للإنتاج. عند إسقاط هذه النقطة عموديا و أفقيا نحصل على التوليفة المثلى من العمل ورأس المال، أي تلك الكميات المستعملة من هاذين العنصرين المتغيرين (L,K) للحصول على أقصى (أكبر) كمية من الإنتاج في حدود الميزانية المخصصة لذلك.

و يمكن تمثيل وضع التوازن هندسيا كما يلي:



إن الشكل السابق يوضح أن E هي نقطة التوازن بالنسبة لهذا المنتج وأن (L_E,K_E) هي الكميات التي يجب استخدامها من العمل ورأس المال للحصول على أقصى وأكبر إنتاج ممكن في حدود الميزانية المخصصة للإنتاج.

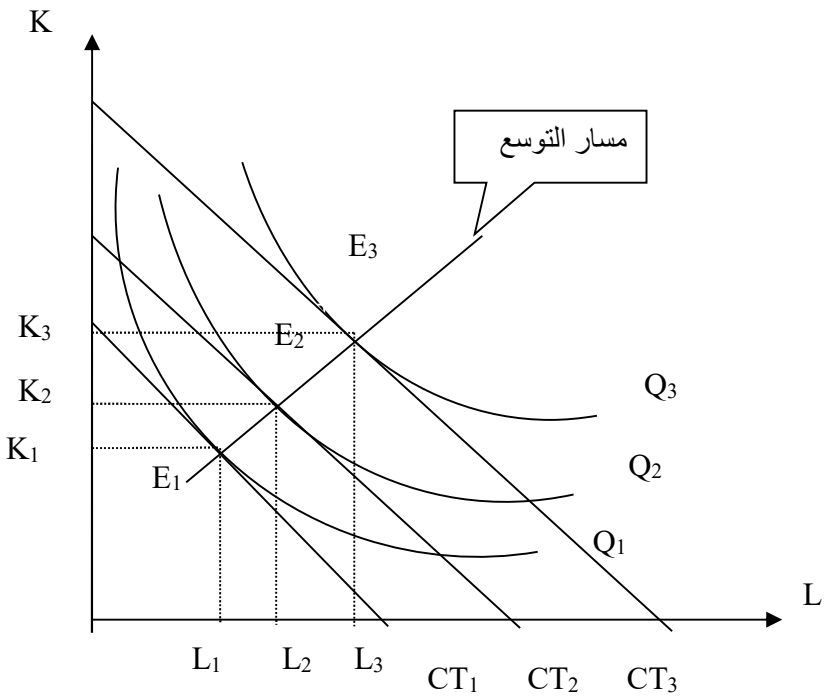
- و يمكن الحصول على توازن المنتج أيضا عندما يتساوى ميل خط التكلفة المتساوية مع ميل منحنى الناتج المتساوي:

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

8- مسار التوسع هندسيا ورياضيا:

8-1- هندسيا:

يعبر مسار التوسع عن المسلك الذي يتبعه المنتج لزيادة قدرته على الإنتاج إذا زاد من ميزانيته (الإنفاق الكلي على الإنتاج)، وبعبارة أخرى هو ذلك المنحنى الذي يصل ما بين نقاط توازن المنتج عندما يتغير الإنفاق الكلي مع ثبات أسعار عوامل الإنتاج، و يمكن توضيح الفكرة من خلال الشكل التالي:



عند ثبات أسعار عوامل الإنتاج، إذا زاد المنتج من الإنفاق الكلي (زادت ميزانية الإنتاج)،فأن منحنى التكلفة المتساوية ينتقل إلى أعلى وبشكل موازي من الوضعية CT_1 إلى CT_2، ليمس منحنى الناتج المتساوي Q_2 عند نقطة توازن جديدة E_2 هي بالضرورة اكبر من نقطة التوازنE_2 ، وهذا يعني أن المنتج يستطيع إن يحصل على كميات أكبر من K و L وبالتالي يستطيع أن يحصل على كمية أكبر من الإنتاج.

- إذا زاد المنتج مرة أخرى الإنفاق الكلي بالقدر الذي ينقل خط التكلفة المتساوية من CT_2 إلى CT_3 ليمس منحنى الناتج المتساوي في نقطة توازن جديدة E_3 هي بالضرورة اكبر من نقطة التوازنE_2 ،

عندما نصل أو نربط بين مختلف نقاط التوازن التي تحدث عندما يغير المنتج الإنفاق الكلي، نحصل على منحنى جديد يسمى: مسار التوسع.

8-2- حسابيا:

إن إيجاد معادلة مسار التوسع رياضيا يتم بعد حل نموذج التعظيم الخاص بالمنتج حيث نحصل على علاقة بين رأس المال والعمل. $K = f(L)$.

حيث تمثل كل ثنائية من هاذين العاملين توليفة توازنية عند مستويات مختلفة للإنفاق الكلي.

9- مرونة دالة الإنتاج :

نحتاج في بعض الأحيان إلى معرفة درجة التغير في الإنتاج الكلي عندما يتغير أحد عوامل الإنتاج، وتقاس هذه الظاهرة بمرونة الإنتاج. وعليه يمكن تعريف مرونة الإنتاج بالنسبة لأحد عوامل الإنتاج على أنها: درجة أو نسبة التغير في كمية الإنتاج الكلي عندما يتغير ذلك العامل الإنتاجي بنسبة معينة ويمكن حساب هذه المرونة بواسطة الصيغة التالية:

أ- مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل:

$$EL = \frac{\frac{\delta Q}{Q}}{\frac{\delta L}{L}} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q}$$

ب- مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال:

$$EK = \frac{\frac{\delta Q}{Q}}{\frac{\delta K}{K}} = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Q}$$

10-غلـة الحجم(غلة الإنتـــاج):

تعتمد الفترة الطويلة على إمكانية تغيير كل عوامل الإنتاج مرة واحدة، من هنا تبدأ فكرة غلة الحجم، والتي تعبر عن مقدار الزيادة في الإنتاج الكلي عندما تزداد كل عوامل الإنتاج بنسبة واحدة معينة.

أو بعبارة أخرى هي نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي، مقارنة بنسبة الزيادة في عوامل الإنتاج، و تأخذ ثلاث حالات هي:

أ- غلة الحجم الثابتة:

في هذه الحالة عندما تزداد عوامل الإنتاج بنسبة معينة و في نفس الوقت(10 %مثلا) فان الإنتاج الكلي يزداد بنفس النسبة (أي 10 %).

- غلة الحجم ثابتة هذا يعني أن المرونة الكلية للإنتاج: $(E = EL + EK = 1)$.

ب- غلة الحجم المتزايدة:

تكون دالة الإنتاج في هذه المرحلة عندما تزداد كل عوامل الإنتاج بنسبة معينة (10 %مثلا)، و يؤدي ذلك إلى زيادة الإنتاج الكلي بنسبة اكبر. (اكبر من 10%).

- مجموع مرونات دالة الإنتاج بالنسبة للعوامل اكبر من الواحد. $(E = EL + EK \rangle 1)$

ج- غلة الحجم المتناقصة:

قي هذه المرحلة عندما تزداد عوامل الإنتاج بنسبة معينة (10 %مثلا) فان الإنتاج الكلي يزداد بنسبة أقل من ذلك (أقل من 10%).

- مجموع مرونات دالة الإنتاج بالنسبة للعوامل اقل من الواحد. $(E = EL + EK \langle 1)$.

11- تجانس دالة الإنتاج :

تكون دالة الإنتاج متجانسة في الحالة التي تزيد فيها كل عوامل الإنتاج بنسبة معينة و يسمح لنا ذلك بمعرفة الزيادة في الإنتاج الكلي، و نقول عن دالة الإنتاج أنها متجانسة إذا تحقق ما يلي:

$$Q = f(tL, tK) = t^{\lambda} \cdot Q$$

بحيث λ تمثل درجة تجانس دالة الإنتاج.

- و هنا نميز بين ثلاث حالات هي:

✓ $(\lambda = 1) \Leftrightarrow$ دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى مما يدل على أن غلة الحجم ثابتة.

✓ $(\lambda \rangle 1) \Leftrightarrow$ دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة اكبر من الواحد مما يدل على ان غلة الحجم المتزايدة.

✓ $(\lambda \rangle 1) \Leftrightarrow$ دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة اقل من الواحد مما يدل على أن غلة الحجم المتناقصة.

12- دالة الإنتاج كوب دوغلاس :

هي شكل من أشكال دوال الإنتاج، ونستطيع القول انها دالة رياضية اقتصادية تفسر السلوك الإنتاجي وعلاقته بعوامل الإنتاج .و يمكن أن يستخدم في دراسة عملية الإنتاج على مستوى المؤسسة وفي دراسة عمليات الإنتاج على مستوى الاقتصاد ككل.

قام كل من الاقتصادي الأمريكي بول دوغلاس، وعالم الرياضيات ريشارد كوب بطرحها و اختبارها عام 1929. وكان الهدف في البداية هو التحقق فيما إذا كان التحليل الإحصائي يستطيع أن يؤكد وجود قوانين كمية للإنتاجية الحدية وتأثير تلك الإنتاجية في مستوى الإنتاج.

دالة الإنتاج كوب دوغلاس هي من الشكل:

$$Q = f(L,K) = A.L^{\alpha} \cdot K^{B}$$

حيث :L يمثل عنصر العمل.

K: هو عنصر رأس المال.

Q: تمثل مستوى الإنتاج.

α, β ثوابت تحددها التكنولوجيا..(A, α, β>0)

- دالة كوب دوغلاس دالة متجانسة من الدرجة(α+β) حيث:

$$f(tL,tK) = t^{\alpha+\beta} .Q$$

- **مثـال:** إذا كانت لدينا دالة الإنتاج من الشكل: $Q = \frac{1}{2} L^{\alpha} \cdot K^{B} \cdot T^{\gamma}$

- ما هو الشرط الواجب توفره لكي تصبح هاته الدالة، دالة دوغلاس.

- استنتج الدوال الإنتاجية المتوسطة ل K ، L و الإنتاجية الحدية.

- على منحنى من منحنيات الناتج المتساوي، عرف $TMST_{(L,K)}$ (L تحل محل K).

- ما هو حجم الإنتاج الذي تعطيه توليفة $K = 200, L = 100$, إذا اعتبرنا أن $\alpha = 0.4, \beta = 0.4 \quad \gamma = 0.2, T = 2$ ؟.

- أحسب مرونة كل عنصر من عناصر الإنتاج, و ما هي مرونة الإنتاج الكلية ؟

- قدرة زيادة الإنتاج أو نقصانه المتأتية من زيادة العمل بـ 10% و نقصان حجم رأس المال بـ 5%.

✓ **الحل:**

1-يجب توفر شرط و هو $\alpha,\beta,\gamma > 0$ حتى تكون كوب دوغلاس .

- حيث: $\alpha+\beta+\gamma = 1$ غلة الحجم ثابتة.
- $\alpha+\beta+\gamma > 1$ غلة الحجم متزايدة.
- $\alpha+\beta+\gamma < 1$ غلة الحجم متناقصة.

2- **دوال الإنتاج المتوسطة لـ:** K,L

$$MP_L = \frac{1}{2}.\alpha.L^{\alpha-1}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda}$$

$$MP_L = \frac{\alpha}{2}\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda}$$

$$MP_K = \frac{\beta}{2}\cdot L^{\alpha}\cdot K^{B-1}\cdot T^{\lambda}$$

3- **إيجاد** $TMS_{T_{(L,K)}}$ **:**

$$TMST_{(L,K)} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\frac{\alpha}{2}\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda}}{\frac{\beta}{2}\cdot L^{\alpha}\cdot K^{B-1}\cdot T^{\lambda}}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{K}{L}$$

$$donc: \quad TMST_{(L,K)} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{K}{L}$$

4- **حساب حجم الإنتاج:** الذي تعطيه التوليفة $K = 200$ ،$L = 100$ ،$T = 2$

$\gamma=0.2$ ،$= 0,4\beta$ ،$= 0,4\alpha$

$$Q = \frac{1}{2}L^{\alpha}\cdot K^{B}\cdot T^{\gamma} = \frac{1}{2}(100)^{0,4}(200)^{0,4}(2)^{0,2} = 30,17$$

4- **حساب مرونة كل عنصر من عناصر الإنتاج و مرونة الإنتاج الكلية :**

لدينا مرونة الإنتاج الكلية : $E = E_L + E_K + E_T$

$$E_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}.\frac{L}{Q} = \frac{MPL_L}{APL_L} = \frac{\frac{\alpha}{2}L^{\alpha-1}K^{B}.T^{\delta}}{\frac{1}{2}L^{\alpha-1}K^{B}.T^{\delta}} = \alpha = 0,4$$

$$E_K = \frac{\Delta Q}{\Delta K}.\frac{K}{Q} = \frac{MPL_K}{APL_K} = \frac{\frac{B}{2}L^{\alpha}K^{B-1}.T^{\delta}}{\frac{1}{2}L^{\alpha}K^{B-1}.T^{\delta}} = \beta = 0{,}4$$

$$E_T = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.\frac{T}{Q} = \frac{MPL_T}{APL_T} = \frac{\beta}{2}\cdot L^{\alpha}\cdot K^{B-1}\cdot T^{\lambda} = \delta = 0{,}2$$

$$\alpha + \beta + \delta = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1$$

مرونة الإنتاج الكلية 1

$$e = 1$$

$$*\ EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}\cdot\frac{L}{Q} = \frac{MPL}{PML}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{2}\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda}}{\frac{1}{2}\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda}}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\cdot 2 = \alpha$$

$$\Leftrightarrow EL = \alpha$$

$$*\ EL = \frac{\Delta Q}{\Delta K}\cdot\frac{K}{Q} = \frac{MPK}{PMK} = \frac{\frac{B}{2}\cdot L^{\alpha}\cdot K^{B-1}\cdot T^{\lambda}}{\frac{1}{2}\cdot L^{B-1}\cdot T^{\lambda}}$$

$$= \frac{B}{2}\cdot 2 = B$$

$$\Leftrightarrow EL = B$$

$$*\ EL = \frac{\Delta Q}{\Delta T}\cdot\frac{T}{Q} = \frac{MPT}{PMT} = \frac{\frac{\lambda}{2}\cdot L^{2}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda-1}}{\frac{1}{2}\cdot L^{2}\cdot K^{B}\cdot T^{\lambda-1}}$$

$$*\Leftrightarrow EL = \lambda$$

إذن مرونة الإنتاج الكلي هي:

$$E = EL + Ek + ET = \alpha + B + \lambda$$

$$= 0.4 + 0.4 + 0.2 = 1$$

- وهذا ما يبرهن على الشرط $donc:\ E = 1$ الخاص بدلالة كوب دوغلاس.

$$* EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{L}{\Delta L} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = EL \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

$$* EK = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{\Delta Q}{Q} \cdot \frac{K}{\Delta K} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = EK \cdot \frac{\Delta K}{K}.$$

$$donc: \ \frac{\Delta Q}{Q} = EL \cdot \frac{\Delta L}{L} + EK \cdot \frac{\Delta K}{K}.$$

$$= (0.4) \cdot (10\%) + (0.4) \cdot (05\%).$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 4\% - 2\% = 2\%$$

إذن: $\frac{\Delta Q}{Q} = 2\%$

خـلاصـة:

لحساب التغير في الإنتاج الكلي يجب حساب التغير في الإنتاج الناتج عن عنصر العمل زائد التغير في الإنتاج الناتج عن عنصر رأس المال.

مثـال2:

لدينا دالة الإنتاج التالية : $Q = 100L^{0.7} \cdot K^{0.3}$

و دالة ميزانية المنتج محددة ب: $CT = 250$ لأنفاقها على K, L

المطلــوب:

1/ إذا كانت عوامل الإنتاج أسعارها : $PL = 50, PK = 100$ فما هو حجم الإنتاج الذي يمكن أن يصل إليه هذا المنتج في حدود المعطيات المقدمة.

2/ هل هاته الدالة متجانسة و ما هي درجة تجانسها مستنتجا طبيعة دالة الحجم.

3/ ما هو معدل الإحلال الحدي التقني عند نقطة التوازن.

4/ حدد المرونة الكلية للإنتاج.

5/ أوجد العلاقة بين $TMS_{T(L,K)}$ و المرونات الجزئية.

الحـــل2:

1/ إيجاد حجم الإنتاج :

$$Q = 100L^{0.7} \cdot K^{0.3}$$

$$CT = 100L + 50K$$

$$Z = 100L^{0.7} \cdot K^{0.3} + \lambda(250 - 50L - 50K)$$

$$L'_L == 70L'^{0.3}K^{0.3} - 50\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{5}L'^{0,3} \cdot K^{0,3} \rightarrow 1$$

$$L'_K = 30K'^{0,7} \cdot L^{0,7} - 100\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{10}K'^{0,7} \cdot L^{0,7} \rightarrow 2$$

$$L'_\lambda = 2500 - 50L - 100K = 0 \rightarrow 3$$

من 1 و 2 نجد:

$$\frac{7}{5}L'^{0,3} \cdot K^{0,3} = \frac{3}{10}K'^{0,7} \cdot L^{0,7}$$

$$14L'^{0,3} \cdot K^{0;3} = 3K'^{0,7} \cdot L^{0,7}$$

$$\frac{L'^{0,3} \cdot K^{0,3}}{K'^{0,7} \cdot L^{0,7}} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{3}{14} \Leftrightarrow 3L = 14K \Leftrightarrow K = \frac{3}{14}L \rightarrow *$$

لنعوض $*$ في 3 لنجد:

$$*\ 250 - 50L - 100\left(\frac{3}{14}\right)L = 0 \Leftrightarrow 250 - 50L - \frac{300}{14}L = 0 \Leftrightarrow 250 - \frac{400}{14}L = 0$$

$$\Leftrightarrow 250 = \frac{400}{14}L \Leftrightarrow \frac{250}{\frac{400}{14}} = L$$

$$\Leftrightarrow L = 250 \cdot \frac{14}{400}$$

$$\Leftrightarrow L = 35$$

بتعويض قيمة L في $*$ نجد:

$$K = \left(\frac{3}{14}\right) \cdot (35) = 7,5$$

$$donc : K = 7,5$$

إذن: (L, K)=(35,7,5)

$$*\ Q = 100 \cdot L^{0,7} \cdot K^{0,3}$$

$$= 100(35)^{0,7} \cdot (7,5)^{0,3}$$ إذن حجم الإنتاج هو: $*\ Q = 2204,78$

$$f[(TL)\cdot(TK)] = 100(TL)^{0,7}\cdot(TK)^{0,3}$$
$$= 100T^{0,7}\cdot L^{0,7}\cdot K^{0,3}\cdot K^{0;3}$$
$$= T^{(0,7+0,3)}\cdot\underbrace{100L^{0,7}\cdot K^{0,3}}_{Q}$$
$$= T^{(1)}$$

2/لنا :

و عليه فإن الدالة المعطاة متجانسة, و درجة تجانسها هي من الدرجة الأولى إذن : فطبيعة تجانسها فهي دالة ثابتة.

3/ لإيجاد المعدل الحدي للإحلال التقني $TMS_{T_{(L,K)}}$

$$TMS_T = \frac{PL}{PK} = \frac{5\not{0}}{10\not{0}} = \frac{1}{2}$$
$$donc: TMS_T = \frac{1}{2}$$

4/ تحديد المرونة الكلية للإنتاج:

$$EL = \frac{\Delta Q}{\Delta K}\cdot\frac{L}{Q} = 70L'^{0,3}\cdot K^{0,3}\cdot\frac{\not{L}}{100\not{L}^{0,7}\cdot K^{0,3}} = \frac{70}{100} = 0,7$$
$$EL = \frac{\Delta Q}{\Delta K}\cdot\frac{K}{Q} = 30\not{K}'^{0,7}\cdot L^{0,7}\cdot\frac{\not{K}}{100L^{0,7}\cdot\not{K}^{0,3}} = \frac{30}{100} = 0,3$$
$$E = EL + EK = 0,7 + 0,3 = 1; donc: E = 1$$

5/ إيجاد العلاقة بين $TMS_{(L,K)}$ و المرونة الجزئية:

$$TMS_{(L,K)} = \frac{MPL}{MPK} \mapsto 1$$
$$EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}\cdot\frac{L}{Q} = \frac{MPL}{PML} \Leftrightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta Q} = MPL; \frac{L}{Q} = \frac{1}{PML}$$ لنا:

و عليه بالتعويض في 1 نجد: $TMST_{(L,T)} = \frac{EL\cdot MPL}{EK\cdot MPK}$