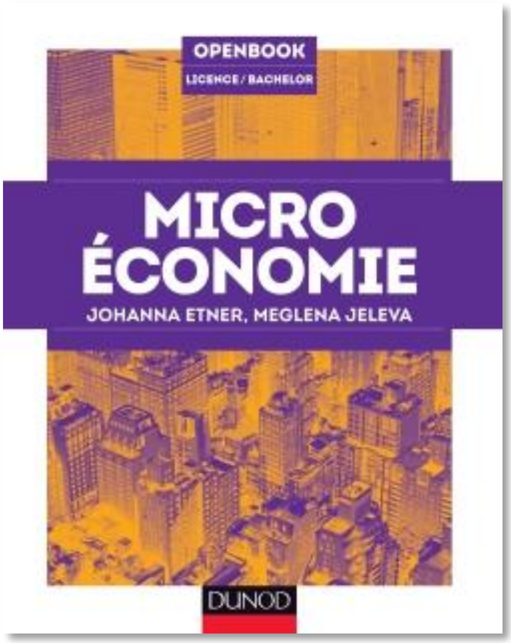
JOHANNA ETNER, MEGLENA JELEVA

MICROÉCONOMIE CORRIGÉS

Ce document contient l'intégralité des corrigés du manuel paru dans la collection « Openbook » :



CHAPITRE 1
DEMANDE ET OFFRE SUR LE MARCHÉ

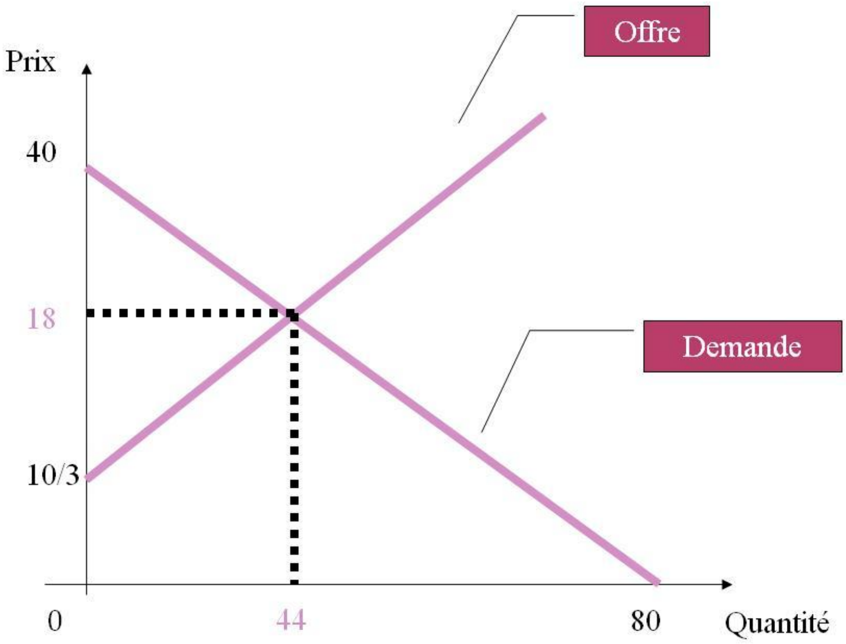
QCM

1 d. **2** b. **3** b. **4** b. **5** d. **6** c. **7** b.

EXERCICE 8 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE L'OFFRE ET LA DEMANDE

Erratum : les prix sont exprimés en centaines d'euros (et non en euros) et les quantités d'ordinateurs en milliers.

1.



2. Le prix d'équilibre est 1 800 euros et la quantité d'équilibre est 44 000 ordinateurs.

3. a. P = 1 200 euros, la quantité demandée est 56 000 ordinateurs et la quantité offerte est de 26 000 ordinateurs : il y a excès de demande.

b. P = 2 000 euros, la quantité demandée est 40 000 ordinateurs et la quantité offerte est de 50 000 ordinateurs : il y a excès d'offre.

4. Lorsque le prix des logiciels augmente, la quantité demandée diminue pour tout prix et la courbe de demande se déplace vers la gauche.

EXERCICE 9 ÉLASTICITÉ-PRIX DE LA DEMANDE

On s'intéresse à la consommation d'un bien x. Des estimations montrent que la fonction de demande pour ce bien en fonction du prix est : $x(p) = 10 - 2p$.

1. La quantité consommée de ce bien si le prix est de 1 est $x(1) = 10 - 2 = 8$.

2. La quantité de ce bien diminue avec son prix, ce n'est donc pas un bien Giffen.

3. L'élasticité prix directe de la demande pour ce bien dans le cas où $p = 2$ est :

$$\varepsilon_P^x = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x} = -2 \times \frac{p}{10 - 2p} = -2 \times \frac{1}{8} = -0{,}25$$

La demande est peu élastique.

EXERCICE 10 ÉLASTICITÉ-REVENU DE LA DEMANDE

1. $\varepsilon_R^x > 1$. Les DVD sont donc un bien (normal) de luxe.

2. Par définition, $\varepsilon_R^x = \frac{\Delta x}{\Delta R}\frac{R}{x}$ et donc $\Delta x = \varepsilon_R^x \frac{\Delta R}{R} x$. Ici, $\varepsilon_R^x = 1,2,\ R = 5000,\ x = 10,\ \Delta R =$ $5800 - 5000$ et donc $\Delta x = 1,92$.

La famille achètera donc environ 12 DVD par mois suite au changement de revenu de Mme Lepique.

EXERCICE 11 ÉLASTICITÉ-PRIX CROISÉE DE LA DEMANDE

1. La substituabilité ou la complémentarité de deux biens est déterminée à partir du signe de l'élasticité-prix croisée.

Ici $\varepsilon_{p_{bière}}^x = -0,2 < 0$. Les biens sont donc compléments car une augmentation du prix de la bière entraîne une réduction de la consommation de pizzas.

2.

$\frac{\Delta p_{bière}}{p_{bière}} = 0,02$ Par définition, $\varepsilon_{p_{bière}}^x = \frac{\Delta x}{\Delta p_{bière}}\frac{p_{bière}}{x}$ et donc $\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon_{p_{bière}}^x \frac{\Delta p_{bière}}{p_{bière}}$. Ici, $\varepsilon_{p_{bière}}^x =$ $-0,2$ et donc $\frac{\Delta x}{x} = -0,004$.

La consommation de pizza va diminuer de 0,4 %.

CHAPITRE 2
TECHNOLOGIE DE PRODUCTION

QCM

1 a. **2** 1. c. 2. b. 3. b. **3** 1. b. 2. a.

EXERCICE 4 PRODUCTIVITÉS MOYENNES, PRODUCTIVITÉS MARGINALES ET ISOQUANTES

Soient les fonctions de production suivantes :

(1) $F(L) = L^{1/4}$

(2) $F(K,L) = (2K+L)^{1/2}$

(3) $F(K,L) = K^{1/3}L^{1/3}$

1. (1) $F(L) = L^{1/4}, \quad PM_L(L) = \dfrac{L^{1/4}}{L} = L^{-3/4}, \quad Pm_L(L) = \dfrac{1}{4}L^{-3/4}$

(2) $F(K,L) = (2K+L)^{1/2}, \quad PM_L(K,L) = \dfrac{(2K+L)^{1/2}}{L}, \quad Pm_L(K,L) = \dfrac{1}{2}(2K+L)^{-1/2}$

(3) $F(K,L) = K^{1/3}L^{1/3}, \quad PM_L(K,L) = \dfrac{K^{1/3}L^{1/3}}{L} = K^{1/3}L^{-2/3}, \quad Pm_L(K,L) = \dfrac{1}{3}K^{1/3}L^{-2/3}$

2. (1) Cette fonction n'est qu'à un seul facteur. Par conséquent, il n'y a qu'une seule façon de produire y_0, en utilisant une quantité de facteur $L = y_0^4$. L'isoquante se réduit donc à un point.

(2) L'isoquante est déterminée par : $(2K+L)^{1/2} = y_0$. Dans le plan (L, K), l'équation d'une isoquante associée à cette technologie est : $K = -\dfrac{L}{2} + \dfrac{y^2_0}{2}$. L'isoquante représentée dans la Figure 1 correspond à $y_0 = 2$.

(3) L'isoquante est déterminée par : $K^{1/3}L^{1/3} = y_0$. Dans le plan (L, K), l'équation d'une isoquante associée à cette technologie est : $K = \dfrac{y^3_0}{L}$. L'isoquante représentée dans la Figure 2 correspond à $y_0 = 1$.

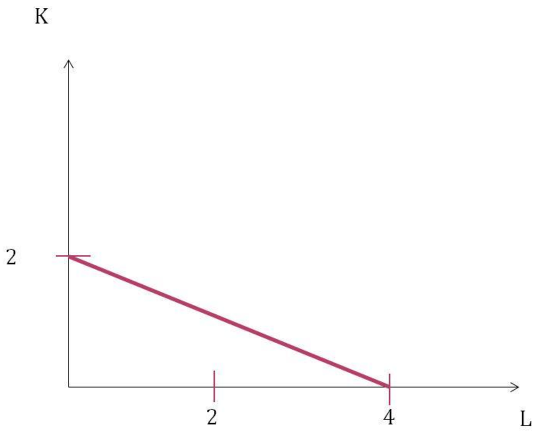


Figure 1

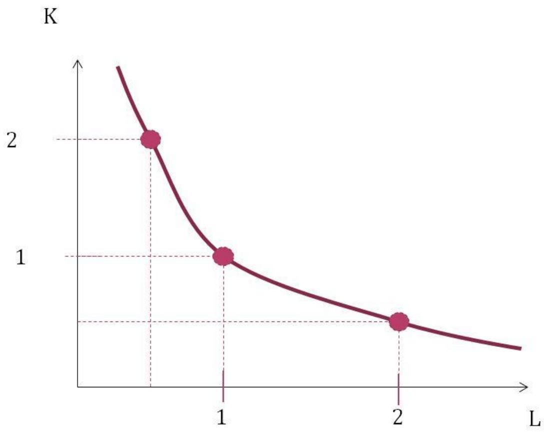


Figure 2

EXERCICE 5 RENDEMENTS D'ÉCHELLE

1. $Pm_L(L) = \frac{1}{2}L^{-1/2}, \quad Pm_L'(L) = -\frac{1}{4}L^{-3/2} < 0$: la productivité marginale du travail est positive et décroissante.

2. Pour déterminer la nature des rendements d'échelle, nous devons comparer F(δL) avec δF(L) pour δ > 1.

$F(\delta L) = (\delta L)^{1/2} = \delta^{1/2}L^{1/2} = \delta^{1/2}F(L) < \delta F(L)$ pour tout $\delta > 1$. D'après la Définition 13, les rendements d'échelle sont décroissants.

EXERCICE 6 TAUX MARGINAL DE SUBSTITUTION TECHNIQUE

Soit la fonction de production $Y = A(\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)K^{-\rho})^{-1/\rho}$

1.

$$F(\delta L, \delta K) = A\left(\alpha(\delta L)^{-\rho} + (1-\alpha)(\delta K)^{-\rho}\right)^{-1/\rho} = A(\delta^{-\rho})^{-1/\rho}\left(\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)K^{-\rho}\right)^{-1/\rho} = \delta F(L,K)$$

Les rendements d'échelle sont donc constants.

2.

$$Pm_L(L,K) = \frac{\partial F(L,K)}{\partial L} = A\alpha L^{-\rho-1}\left(\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)K^{-\rho}\right)^{-\frac{1+\rho}{\rho}}$$

$$Pm_K(L,K) = \frac{\partial F(L,K)}{\partial K} = A(1-\alpha)K^{-\rho-1}\left(\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)K^{-\rho}\right)^{-\frac{1+\rho}{\rho}}$$

3. $$TMST_{K/L}(L,K) = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \frac{\partial F(L,K)/\partial L}{\partial F(L,K)/\partial K} = \frac{Pm_L(L,K)}{Pm_K(L,K)} = \frac{\alpha L^{-\rho-1}}{(1-\alpha)K^{-\rho-1}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\left(\frac{L}{K}\right)^{-\rho-1}$$

EXERCICE 7 TECHNOLOGIE À TROIS FACTEURS COMPLÉMENTAIRES

Une compagnie aérienne organise des vols Paris-Nice. Un vol nécessite 1 avion, 2 pilotes et 4 hôtesses (ou stewards).

1. On note A, le facteur « avion », P, le facteur « pilote », H, le facteur « hôtesse ou steward ».

$F(A,P,H) = \left[min\left\{A, \frac{P}{2}, \frac{H}{4}\right\}\right]$, où [...] désigne la partie entière d'un nombre.

2. On doit représenter l'isoquante d'équation $min\left\{5, \frac{P}{2}, \frac{H}{4}\right\} = 5$ dans le plan (P, H). Pour faciliter la représentation, on ignore la partie entière. Voir Figure 1.

3. On doit représenter l'isoquante d'équation $min\left\{6, \frac{P}{2}, \frac{H}{4}\right\} = 6$ dans le plan (P, H). Voir Figure 2.

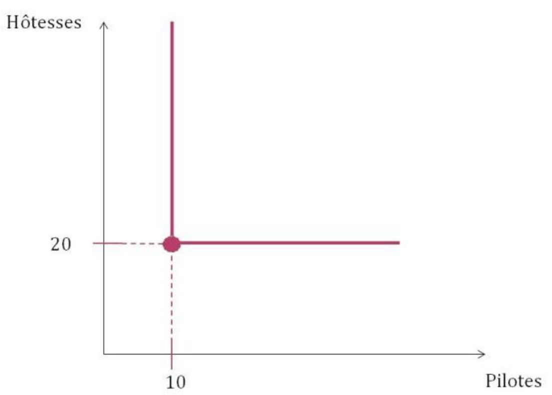


Figure 1

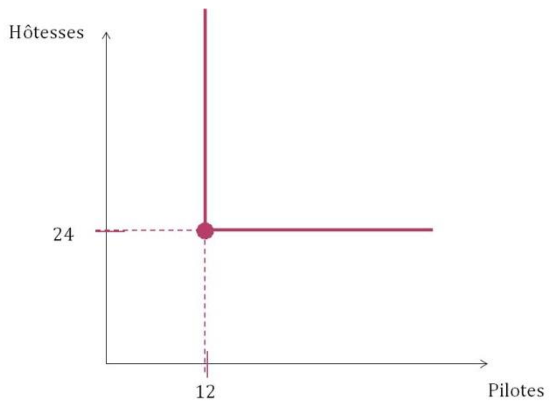


Figure 2

4. On cherche $F(2A, 2P, 2H)$. À partir de la fonction définie en **1.**, on a :

$F(2A, 2P, 2H) = \left[min\left\{2A, \frac{2P}{2}, \frac{2H}{4}\right\}\right] = \left[min\left\{2A, P, \frac{H}{2}\right\}\right] = 2\left[min\left\{A, \frac{P}{2}, \frac{H}{4}\right\}\right] = 2\, F(A,P,H)$

Les rendements sont donc constants si initialement $F(A,P,H) \geq 1$.

EXERCICE 8 TECHNOLOGIE À TROIS FACTEURS SUBSTITUABLES

1. Si on note ε^z, l'élasticité d'un facteur z, on a $\varepsilon^z = \frac{\partial Y}{\partial z} / \frac{Y}{z}$.

$\varepsilon^{L_1} = a, \varepsilon^{L_2} = b, \varepsilon^{K} = c$

$a > b > c$ implique que le facteur le plus efficace est le travail qualifié, L_1.

2.

$$TMST_{L_2 \to L_1}(L_1, L_2, K) = \frac{\partial Y}{\partial L_1} / \frac{\partial Y}{\partial L_2} = \frac{a}{b}\frac{L_2}{L_1}$$

3.

$$TMST_{K \to L_2}(L_1, L_2, K) = \frac{\partial Y}{\partial L_2} / \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{b}{c}\frac{K}{L_2}$$

$$TMST_{K \to L_1}(L_1, L_2, K) = \frac{\partial Y}{\partial L_1} / \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{a}{c}\frac{K}{L_1}$$

En accord avec l'intuition, il faut plus de capital pour remplacer une heure de travail qualifié que pour remplacer une heure de travail non qualifié.

4. On cherche à calculer $Y(3L_1, 3L_2, 3K)$ et à le comparer avec $3Y(L_1, L_2, K)$.

– a = 0 5, b = 0,3, c = 0,2 : $Y(3L_1, 3L_2, 3K) = A \times 3^{0,5 + 0,3 + 0,2} \times L_1^{0,5} L_2^{0,3} K^{0,2}$

– a = 0,5, b = 0,4, c = 0,4 : $Y(3L_1, 3L_2, 3K) = A \times 3^{0,5 + 0,4 + 0,4} \times L_1^{0,5} L_2^{0,3} K^{0,2}$

Les rendements sont constants dans le premier cas : $Y(3L_1, 3L_2, 3K) = 3Y(L_1, L_2, K)$ car 0,5 + 0,3 + 0,2 = 1.

Les rendements sont croissants dans le second cas : $Y(3L_1, 3L_2, 3K) = 3^{1,3}Y(L_1, L_2, K) > 3Y(L_1, L_2, K)$ car 0,5 + 0,4 + 0,4 = 1,3 > 1.

Soit δ un nombre réel positif avec $\delta > 1$. Nous devons comparer $Y(\delta L_1, \delta L_2, \delta K)$ et $\delta Y(L_1, L_2, K)$.

$Y(\delta L_1, \delta L_2, \delta K) = A(\delta L_1)^a(\delta L_2)^b(\delta K)^c = A\delta^{a+b+c}L_1^a L_2^b K^c$

$Y(\delta L_1, \delta L_2, \delta K) = \delta^{a+b+c}Y(L_1, L_2, K)$

– $a + b + c < 1$, rendements décroissants
– $a + b + c = 1$, rendements constants
– $a + b + c > 1$, rendements croissants

CHAPITRE 3
DEMANDE DE FACTEURS ET FONCTIONS DE COÛT

QCM

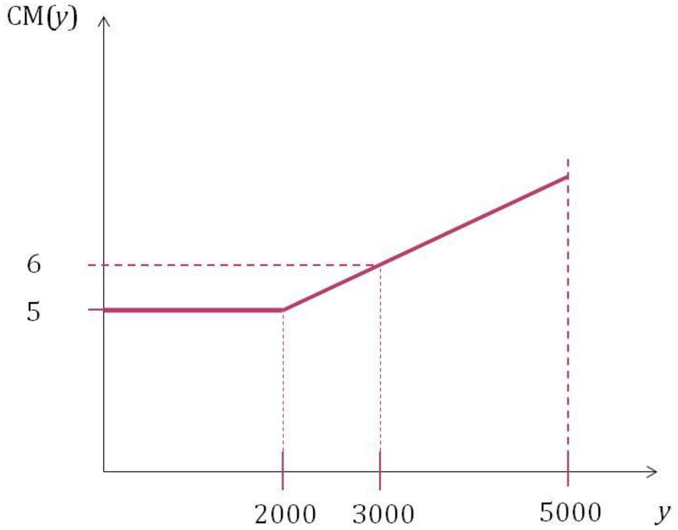
1 Faux **2** Faux **3** Faux **4** Faux **5** Faux

EXERCICE 6 COÛT MOYEN

1. Pour 2 000 épreuves, il faut utiliser uniquement l'imprimante n° 1 car son coût par copie est le plus faible. Pour 3 000 épreuves, il faut utiliser l'imprimante n° 1 pour 2 000 épreuves, et l'imprimante n° 2 pour 1 000 épreuves.

2. Soit y le nombre de copies.

CT(y)	$= 5y$	si $y \leq 2\,000$
	$= 5 \times 2\,000 + 8 \times (y - 2\,000)$	si $2\,000 < y \leq 5\,000$
CM(y)	$= 5$	si $y \leq 2\,000$
	$= 8 - \frac{6000}{y}$	si $2\,000 < y \leq 5\,000$



EXERCICE 7 COÛTS À COURT TERME ET À LONG TERME

1. La fonction de production donnée est une fonction Cobb Douglas avec $a = b = 1$: D'après l'application p. 58, σ = 1.

2. La fonction de coût de court terme $CT^{ct}(y, \overline{K})$ est la solution du problème : $\min\limits_{L} \; wL + r\overline{K}$ sous la contrainte $F(L, \overline{K}) = y$.

$\overline{K}$ étant fixé, il n'y a qu'une seule valeur de L qui permet de produire y. Il s'agit de $L = \frac{y}{2\overline{K}}$.

$$CT^{ct}(y, \overline{K}) = w\frac{y}{2\overline{K}} + r\overline{K}.$$

Application numérique : $CT^{ct}(y, 2) = \frac{y}{4} + 2.$

3. Le coût de long terme est le coût de l'entreprise lorsqu'elle peut faire varier la quantité de tous ses facteurs de production.

$CT^{lt}(y)$ est la solution du problème : $\min\limits_{K} CT^{ct}(y,\ K)$

K^{lt} doit vérifier : $\left.\frac{\partial CT^{ct}(y,\ K)}{\partial K}\right|_{K^{lt}} = 0$. Il est nécessaire de vérifier aussi la condition de second ordre : $\left.\frac{\partial^2 CT^{ct}(y,\ K)}{\partial K^2}\right|_{K^{lt}} \geq 0$.

$$\frac{\partial CT^{ct}(y,\ K)}{\partial K} = -\ w\frac{y}{2K^2} + r = 0$$

$$\frac{\partial^2 CT^{ct}(y,\ K)}{\partial K^2} = w\frac{y}{K^3} > 0$$

La condition de second ordre est vérifiée pour tout $K > 0$ et

$$K^{lt} = \sqrt{\frac{wy}{2r}}.$$

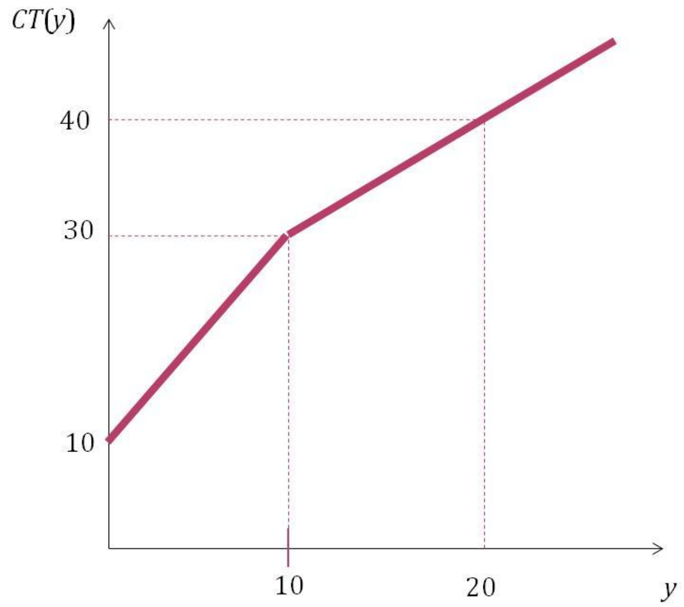
$$CT^{lt}(y) = CT^{ct}(y,\ K^{lt}) = \sqrt{2rwy}$$

4. Pour déterminer la nature des rendements d'échelle, on doit comparer $F(\delta K, \delta L)$ et $\delta F(K, L)$ pour $\delta > 1$. Ici, $F(\delta K, \delta L) = 2(\delta K)(\delta L) = \delta^2(2KL) = \delta^2 F(K,L) > \delta F(K, L)$ pour $\delta > 1$. Les rendements d'échelle sont donc croissants.

EXERCICE 8 FONCTION DE COÛT

Lorsque le niveau du capital est fixé, l'entreprise n'a pas de choix pour la quantité de travail à utiliser pour produire une quantité y donnée de produit.
Si $K = 1$, pour produire y, il faut utiliser $L_1 = 2y$, $CT_1(y) = 1 \times 2y + 10 \times 1 = 2y + 10$.
Si $K = 2$, pour produire y, il faut utiliser $L_2 = y$, $CT_2(y) = 1 \times y + 10 \times 2 = y + 20$.
Il faut déterminer, en fonction de y, combien de capital il faut utiliser pour minimiser les coûts.
On peut facilement montrer que $CT_1(y) < CT_2(y)$ pour $y < 10$. Par conséquent,

$$CT(y) = \begin{cases} 2y + 10 & \text{si } y < 10 \\ y + 20 & \text{si } y \geq 10 \end{cases}$$



EXERCICE 9 FONCTION DE COÛT À LONG TERME

La fonction de coût de long terme $CT^{lt}(y)$ est la solution du problème :

$$\min_{K} \ CT^{ct}(y,\ K)$$

K^{lt} doit vérifier : $\left.\frac{\partial CT^{ct}(y,\ K)}{\partial K}\right|_{K^{lt}} = 0$. Il est nécessaire de vérifier aussi la condition de second ordre : $\left.\frac{\partial^2 CT^{ct}(y,\ K)}{\partial K^2}\right|_{K^{lt}} \geq 0$.

Attention ! Les dérivées sont par rapport à K, et non pas par rapport à y !

$$\frac{\partial CT^{ct}(y,\ K)}{\partial K} = -\ \frac{1}{K^2}y^2 + 1 = 0$$
$$\frac{\partial^2 CT^{ct}(y,\ K)}{\partial K^2} = 2K^{-3}y^2 > 0$$

La condition de second ordre est vérifiée pour tout $K\ > 0$ et $K^{lt} = y$.

$CT^{lt}(y) = CT^{ct}(y,\ K^{lt}) = y^3 - (4 - \frac{1}{y})y^2 + \frac{49}{4}y + y = y^3 - 4y^2 + \frac{57}{4}y.$

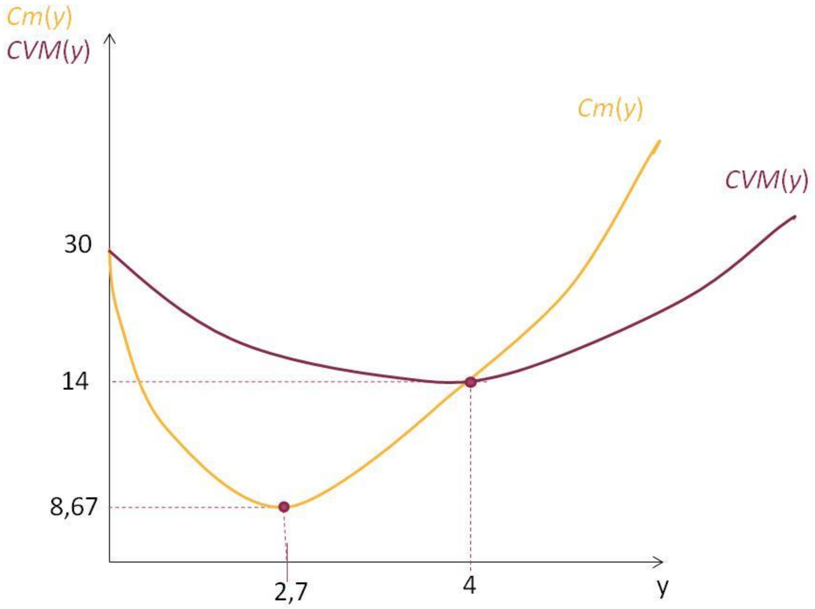
EXERCICE 10 SUJET D'EXAMEN – UNIVERSITÉ DU MAINE, 2009

1. a. $Cm(y) = 3y^2 - 16y + 30$

b. $CVM(y) = \dfrac{CV(y)}{y} = y^2 - 8y + 30$

c. Pour construire les courbes de coût marginal et de coût variable moyen, on utilise les valeurs suivantes :

$Cm(0) = CVM(0) = 30$
$Cm(4) = CVM(4) = 14$
$Cm(2{,}7) = 8{,}67$



2. a. Pour déterminer les fonctions de coût moyen et de coût marginal, il faut déterminer d'abord la fonction de coût total. Il faut donc commencer par calculer les quantités optimales de facteurs en résolvant le programme :

$$\underset{x_1, x_2}{Min}\ x_1 + x_2$$
$$s.c.\quad \sqrt{x_1\ x_2} - 1 = y$$

On laisse pour le moment de côté la contrainte $x_1 x_2 \geq 1$. Nous vérifierons si les solutions du programme ci-dessus la vérifient.

En utilisant les résultats donnés dans le Focus p. 54, nous obtenons :

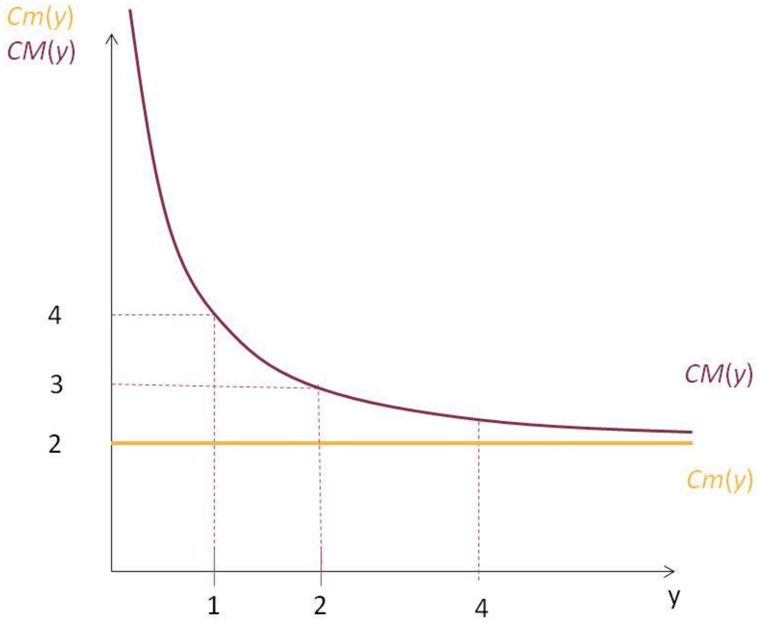
$$x_1^* = x_2^* = y + 1$$

Il est facile de vérifier que la contrainte $x_1 x_2 \geq 1$ est vérifiée.

On obtient donc :

$CT^{lt}(y) = 1 \times x_1^* + 1 \times x_2^* = 2y + 2$

$Cm^{lt}(y) = 2$ et $CM^{lt}(y) = 2 + \frac{2}{y}$

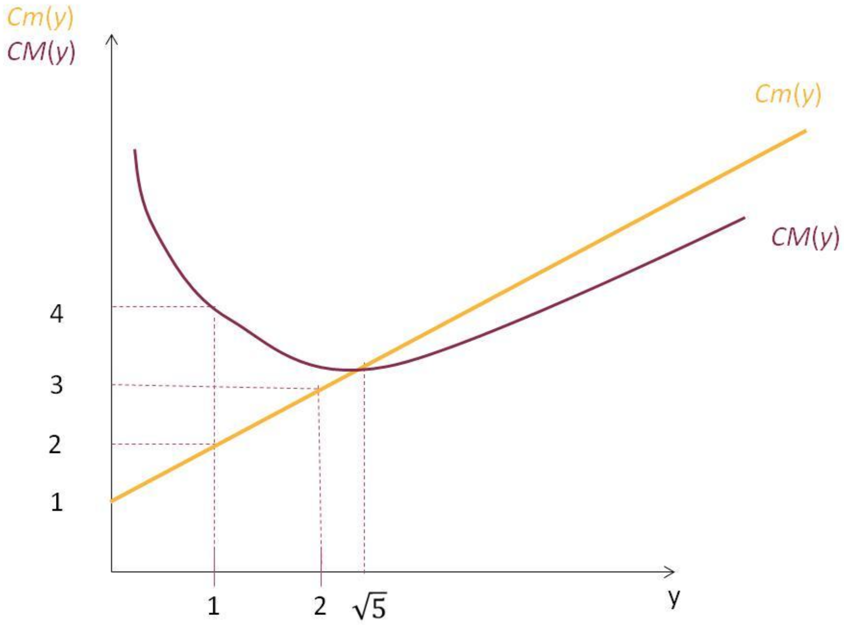


b. Si la quantité de facteur 2 est fixée, il n'y a qu'une seule quantité x_1^{ct} de facteur 1 permettant de produire une quantité y donnée. Si la quantité de facteur 2 est fixée à 2, x_1^{ct} vérifie : $\sqrt{2x_1^{ct}} - 1 = y$ et donc $x_1^{ct} = \frac{(y+1)^2}{2}$.

On obtient donc :

$CT^{ct}(y, 2) = 1 \times x_1^{ct} + 1 \times 2 = \frac{(y+1)^2}{2} + 2$

$Cm^{ct}(y) = y + 1$ et $CM^{ct}(y) = \frac{(y+1)^2}{2y} + \frac{2}{y} = \frac{y}{2} + 1 + \frac{5}{2y}$



c. D'après le résultat de la question 2.a., la demande de facteurs pour produire y = 3 est :

$$x_1^* = x_2^* = 3 + 1 = 4.$$

Si avec x_2 = 4, l'entreprise produit non pas y = 3, mais y = 4, elle doit utiliser une quantité x_1 de facteur 1 telle que :

$\sqrt{4x_1} - 1 = 4$ et donc x_1 = 6,25

Nous devons calculer le coût total de production de 4 unités de court terme, avec x_2 = 4, noté $CT^{ct}(4, 4)$, et le coût total de long terme, $CT^{lt}(4)$, calculé avec la quantité optimale des deux facteurs à partir de la formule obtenue dans 2.a.

$CT^{ct}(4, 4) = 1 \times 6{,}25 + 1 \times 4 = 10{,}25$

$CT^{lt}(4) = 2 \times 4 + 2 = 10$

Le surcoût par unité produite est: $\frac{1}{4}[CT^{ct}(4,4) - CT^{lt}(4)\ ] \quad = 0{,}062$

CHAPITRE 4
CHOIX DU PRODUCTEUR ET OFFRE CONCURRENTIELLE

QCM

1 Faux **2** Faux **3** Faux **4** Faux **5** 1. Vrai 2. Vrai

EXERCICE 6 OFFRE DE PRODUCTION

1. $C_m(y) = 8y$

2. $\pi(y) = py - (400 + 4y^2)$

Le nombre d'applications y^* à réaliser doit vérifier $\pi'(y^*) = 0$ et donc $p = 8y^*$, $y^*(p) = p/8$. La start-up a toujours intérêt à produire (à cause de ses coûts fixes) et fera des profits positifs si $p \geq \min_y CM(y)$.

Ici, $CM(y) = \frac{400}{y} + 4y$ et $\min_y CM(y) = CM(10) = 80$.

La start-up produira donc une quantité $y^* = p/8$ quel que soit p, et fera des profits strictement positifs si $p > 80$.

3. $y^*(2p) = 2p/8 = 2y^*(p)$

4. $y^*(72) = 9$, $\pi(9) = -76 < 0$. La start-up fait des pertes, mais préfère produire plutôt que d'arrêter son activité car $\pi(0) = -400 < \pi(9)$.

5. $y^*(160) = 20$, $\pi(20) = 1200 > 0$.

EXERCICE 7 OFFRE ET SEUIL DE FERMETURE

Une entreprise peut produire au maximum une quantité $y = 2$.

Sa fonction de coût total est : $CT(y) = \ln 2 - \ln(2 - y)$

1. Cette entreprise ne subit pas de coût fixe car $CT(0) = 0$.

2. $Cm(y) = \frac{1}{2-y}$, $\quad CM(y) = \frac{1}{y}\left[\ln 2 - \ln(2-y)\right] = \frac{1}{y}\ln\frac{2}{2-y}$

3. La fonction d'offre est donnée par $p = Cm(y)$ pour $p > p_F$ (seuil de fermeture). A partir de $Cm(y)$, nous obtenons $y(p) = 2 - \frac{1}{p}$ pour $p > 1/2$.

EXERCICE 8 CALCUL DE SURPLUS

La fonction de coût total d'une entreprise est : $CT(y) = 2y^2 + 15y + 450$.

1. $Cm(y) = 4y + 15$

2. La fonction d'offre de l'entreprise est donnée par $Cm(y) = p$ si $p > p_F$ (seuil de fermeture). Calculons le seuil de fermeture : $p_F = \underset{y}{Min}\, CVM(y)$.

Ici, $CVM(y) = 2y+15$, son minimum est en $y = 0$, et donc $p_F = CVM(0) = 15$.

La fonction d'offre est donc : $y(p)=\dfrac{p}{4}-\dfrac{15}{4}$ pour $p \geq 15$.

3. Si le prix du bien est de 20 euros par unité, l'offre de l'entreprise est de $y(20) = 5/4$.

Le profit $\pi(5/4) = 20 \times 5/4 - CT(5/4) = -446{,}875$.
L'entreprise fait des pertes, mais arrive à couvrir une petite partie de ses coûts fixes.

4.

$$S^P(p,y)=py-\int_0^y Cm(x)dx \quad , \quad S^P(20,\frac{5}{4})=20\times\frac{5}{4}-\int_0^{5/4}(4x+15)dx=3{,}125$$

Nous obtenons bien la relation $\pi(y) = S^P(p, y) - CF$

EXERCICE 9. OFFRE GLOBALE

1. La fonction d'offre d'une entreprise est donnée par $Cm(y) = p$ si $p > p_F$ (seuil de fermeture) avec $p_F = \underset{y}{Min}\, CVM(y)$.

Pour une entreprise de type 1, $Cm_1(y) = 20y$ et $p^1_F = 0$. La fonction d'offre est donc :
$y_1(p) = p/20$ pour tout $p \geq 0$.
Pour une entreprise de type 2, $Cm_2(y) = 12y^2 - 16y + 6$
$CVM_2(y) = 4y^2 - 8y + 6$, son minimum est atteint en $y = 1$, et donc $p^2_F = CVM_2(1) = 2$.
Pour déterminer la fonction d'offre d'une entreprise de type 2, nous devons résoudre l'équation : $12y^2 - 16y + 6 - p = 0$.
La solution est : $y=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\sqrt{3p-2}}{6}$.
La fonction d'offre d'une entreprise de type 2 est donc :

$$y_2(p)=\begin{cases}0 & \text{si } p<2\\ \dfrac{2}{3}+\dfrac{\sqrt{3p-2}}{6} & \text{si } p\geq 2\end{cases}$$

2. On note $y^G(p)$ l'offre globale.

$$y^G(p)=\begin{cases}\dfrac{p}{4} & \text{si } 0\leq p<2\\ \dfrac{p}{4}+4+\sqrt{3p-2} & \text{si } p\geq 2\end{cases}$$

EXERCICE 10 SUJET D'EXAMEN – UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES, 2008-2009

1. $F(\delta y_1,\delta y_2)=(\delta y_1)^{3/4}(\delta y_2)^{1/4}=\delta F(y_1,y_2)$, les rendements sont donc constants.

2. $TMST_{2/1}(y_1,y_2)=\left|\dfrac{dy_2}{dy_1}\right|=\dfrac{\partial F/\partial y_1}{\partial F/\partial y_2}=3\dfrac{y_2}{y_1}$

3. *Définition du sentier d'expansion* Le sentier d'expansion est une courbe dans le plan des facteurs de production (y_1, y_2) qui regroupe les combinaisons optimales de facteurs lorsque le volume de production varie, les prix des facteurs étant donnés. L'équation de cette courbe est de la forme $y_2 = f(y_1)$.

L'équation du sentier d'expansion s'obtient à partir de la caractérisation des quantités optimales de facteurs, et plus précisément de l'équation (voir Focus p. 54) :

$$TMST_{2/1}(y_1, y_2) = \frac{p_1}{p_2}$$

Dans cet exercice, l'équation ci-dessus s'écrit :

$\frac{3y_2}{y_1} = \frac{p_1}{p_2}$ ce qui, avec $p_1 = 3$ et $p_2 = 1$ donne pour l'équation du sentier d'expansion :

$$y_2 = y_1$$

4. Dans l'énoncé de cette question, il faut remplacer $c(y)$ par $CT(y)$.

À partir de l'application p. 54, nous obtenons directement les demandes de facteurs :

$y_1^* = \left(3\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/4} y$, $y_2^* = \left(\frac{1}{3}\frac{p_1}{p_2}\right)^{3/4} y$ et, avec $p_1 = 3$ et $p_2 = 1$, nous obtenons $y_1^* = y_2^* = y$ et donc $CT(y) = 4y$.

5. $\pi(y) = py - 4y = (p - 4)y$

L'offre de l'entreprise est donc nulle pour $p \leq 4$ et infinie pour $p > 4$.

CHAPITRE 5
PRÉFÉRENCES ET CHOIX DU CONSOMMATEUR

QCM

1 a. **2** b. **3** c.

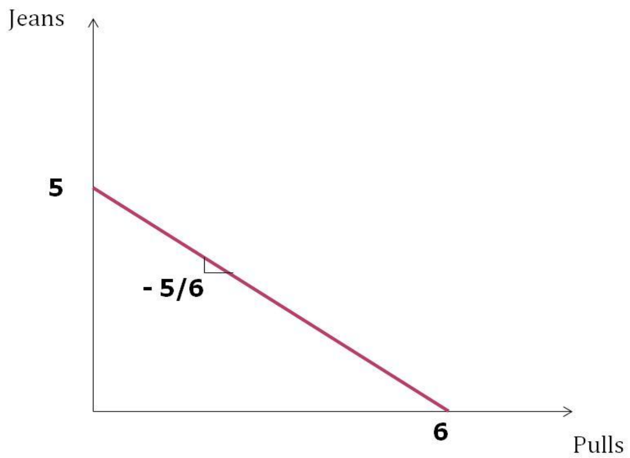
EXERCICE 4 COURBE D'INDIFFÉRENCE

Les courbes d'indifférence de Fabien sont des droites horizontales dans le plan (Salade, Fromage) car seul le fromage lui procure de la satisfaction et donc il est indifférent entre tous les paniers (S, F_0) avec F_0 fixé.

EXERCICE 5 CONTRAINTE BUDGÉTAIRE

L'ensemble budgétaire d'Aurélien est l'ensemble de tous les couples (Pulls, Jeans) qui vérifient : 75 Pulls + 90 Jeans ≤ 450. Sa droite de budget s'écrit : 75 Pulls + 90 Jeans = 450.

Pour représenter la droite de budget dans le plan (Pulls, Jeans), nous pouvons l'écrire sous la forme : $Jeans = -\frac{5}{6} Pull + 5$.



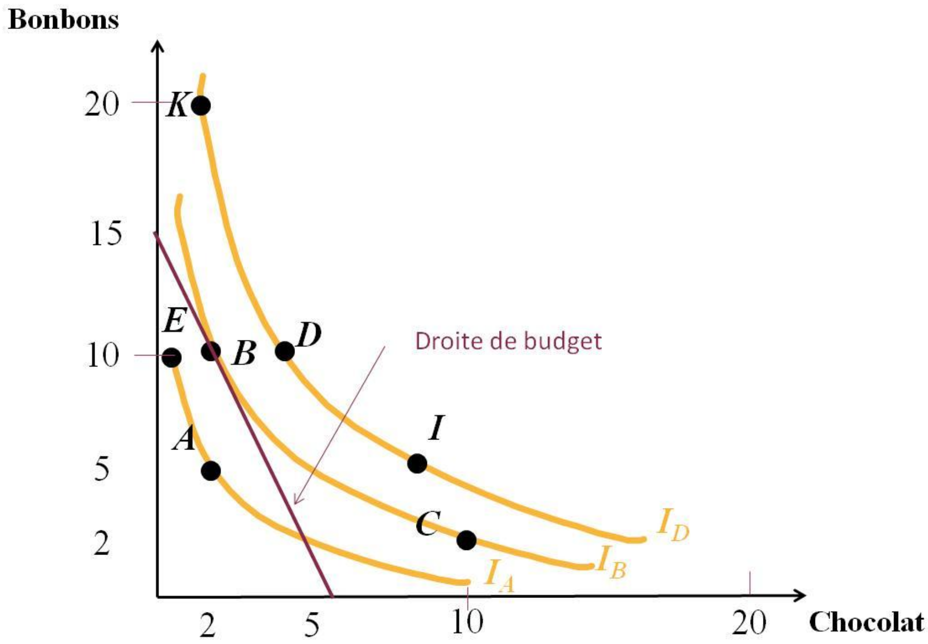
EXERCICE 6 LES AXIOMES DE LA THÉORIE DU CONSOMMATEUR

Les préférences de Nicolas ne vérifient pas les axiomes de la théorie du consommateur car elles ne peuvent pas être en même temps transitives et monotones. En effet, si elles sont transitives, cela implique que le panier (8, 48) est strictement préféré au panier (9, 48), ce qui est incompatible avec l'axiome de monotonie.

EXERCICE 7 COURBE D'INDIFFÉRENCE ET PANIER OPTIMAL

1. À partir des préférences exprimées par Pauline nous pouvons identifier trois courbes d'indifférence, que nous nommerons I_A, I_B et I_D car elles contiennent respectivement les paniers *A*, *B* et *D* : $I_A = \{A, E, F, J\}$, $I_B = \{B, L, G, C\}$, $I_D = \{K, I, D, H\}$.

Les préférences strictes exprimées par Pauline et l'axiome de transitivité nous permettent de montrer que I_D correspond au niveau de satisfaction le plus élevé, suivie de I_B et enfin de I_A. Les courbes d'indifférence et certains paniers sont représentés sur la figure.



2. L'ensemble budgétaire de Pauline est l'ensemble de tous les couples (Chocolat, Bonbons) qui vérifient : $5Ch + 2Bon \leq 30$. Sa droite de budget s'écrit : $5Ch + 2Bon = 30$. Pour représenter la droite de budget dans le plan (Chocolat, Bonbons), nous pouvons l'écrire sous la forme : $Bon = -\frac{5}{2}Ch + 15$.

3. Nous constatons sur la figure que la droite de budget de Pauline est tangente à la courbe d'indifférence I_B au point correspondant au panier *B*. Ce panier est donc le panier optimal pour Pauline.

EXERCICE 8 CONSTRUISEZ VOTRE COURBE D'INDIFFÉRENCE

On considère deux biens : les DVD (de films) et les CD de musique. Les questions suivantes vous permettront de construire une courbe d'indifférence représentant vos préférences pour ces deux biens. On a choisi (de façon arbitraire), comme panier initial, le panier composé de 15 DVD et de 20 CD.
Les questions suivantes vous permettront de trouver 4 paniers situés sur votre courbe d'indifférence passant par le panier avec 15 DVD et 20 CD. En les reliant, vous obtiendrez votre courbe d'indifférence ce qui vous permettra notamment de déterminer si les CD et DVD sont pour vous des biens substituts ou compléments.
Un panier noté (x_1, x_2) comprend x_1 DVD et x_2 CD.

1. Soient les paniers A = (15, 20) et B = (20, 15). Pour vous :
a) A $\succ$ B, b) A ~ B, c) B $\succ$ A
Si votre réponse est a), allez au numéro 1.1.
Si votre réponse est b), vous avez trouvé un point de votre courbe d'indifférence, ce point correspond au panier (20, 15), allez au numéro 2.
Si votre réponse est c), allez au numéro 1.2.

1.1. Soient les paniers A = (15, 20) et B1 = (20, 16). Pour vous :
a) A $\succ$ B1, b) A ~ B1 (B1 $\succ$ A est en général exclu car les CD n'augmentent que d'une unité)
Si votre réponse est a), allez au numéro 1.1.1.
Si votre réponse est b), vous avez trouvé un point de votre courbe d'indifférence, ce point correspond au panier (20, 16), allez au numéro 2.

1.1.1. Soient les paniers A = (15, 20) et B11 = (20, 17). Pour vous :
a) A $\succ$ B11, b) A ~ B11
Si votre réponse est a), allez au numéro 1.1.1.1.
Si votre réponse est b), vous avez trouvé un point de votre courbe d'indifférence, ce point correspond au panier (20, 17), allez au numéro 2.

1.1.1.1. Soient les paniers A = (15, 20) et B11x = (20, x). Donnez à x les valeurs 18, 19 et 20 et comparez pour chacune de ces valeurs A et B11x. La valeur de x pour laquelle vous aurez A ~ B11x vous donnera un point de votre courbe d'indifférence. Ce panier sera B11x = (20, x). Allez au numéro 2.

1.2. Soient les paniers A = (15, 20) et B2 = (20, 14). Pour vous :
a) B2 $\succ$ A, b) A ~ B2 (A $\succ$ B2 est en général exclu car les CD ne diminuent que d'une unité)
Si votre réponse est a), allez au numéro 1.2.1.
Si votre réponse est b), vous avez trouvé un point de votre courbe d'indifférence, ce point correspond au panier (20, 14), allez au numéro 2.

1.2.1 Soient les paniers A = (15, 20) et B2y = (20, y). Donnez à y toutes les valeurs entières entre 13 et 0 et comparez pour chacune de ces valeurs A et B2y. La valeur de y pour laquelle vous aurez A ~ B2y vous donnera un point de votre courbe d'indifférence. Ce panier sera B2y = (20, y). Allez au numéro 2.

2. Vous avez déjà un point de votre courbe d'indifférence passant par le panier A = (15, 20). Vous allez maintenant en trouver un deuxième.
Soient les paniers A = (15, 20) et C = (10, 25). Pour vous :
a) A $\succ$ C, b) A ~ C, c) C $\succ$ A
Si votre réponse est a), allez au numéro 2. 1.
Si votre réponse est b), vous avez trouvé un point de votre courbe d'indifférence, ce point correspond au panier (10, 25), allez au numéro 3.
Si votre réponse est c), allez au numéro 2.2.

2.1. Soient les paniers A = (15, 20) et C1 = (10, 26). Pour vous :
a) A $\succ$ C1, b) A ~ C1 (C1 $\succ$ A est en général exclu car les CD n'augmentent que d'une unité)
Si votre réponse est a), allez au numéro 2.1.1.
Si votre réponse est b), vous avez trouvé un point de votre courbe d'indifférence, ce point correspond au panier (10, 26), allez au numéro 3.

2.1.1. Soient les paniers A = (15, 20) et C11 = (10, 27). Pour vous :

a) $A \succ C11$, b) $A \sim C11$

Si votre réponse est a), allez au numéro 2.1.1.1.

Si votre réponse est b), vous avez trouvé un point de votre courbe d'indifférence, ce point correspond au panier (10, 27), allez au numéro 3.

2.1.1.1. Soient les paniers A = (15, 20) et C11z = (10, z). Donnez à z les valeurs entières supérieures à 27, c'est-à-dire 28, 29, 30, etc. et comparez pour chacune de ces valeurs A et C11z jusqu'à ce que vous arriviez à $A \sim C11z$. La valeur de z pour laquelle vous aurez $A \sim C11z$ vous donnera un point de votre courbe d'indifférence. Ce panier sera C11z = (10, z). Allez au numéro 3.

2.2. Soient les paniers A = (15, 20) et C2 = (10, 24). Pour vous :

a) $C2 \succ A$, b) $A \sim C2$ ($A \succ C2$ est en général exclu car les CD ne diminuent que d'une unité)

Si votre réponse est a), allez au numéro 2.2.1.

Si votre réponse est b), vous avez trouvé un point de votre courbe d'indifférence, ce point correspond au panier (10, 24), allez au numéro 3.

2.2.1. Soient les paniers A = (15, 20) et C2w = (10, w). Donnez à w toutes les valeurs entières entre 23 et 0 et comparez pour chacune de ces valeurs A et C2w. La valeur de w pour laquelle vous aurez $A \sim C2w$ vous donnera un point de votre courbe d'indifférence. Ce panier sera C2w = (10, w). Allez au numéro 3.

3. Vous avez maintenant deux points de votre courbe d'indifférence avec le panier A = (15, 20). Pour en trouver un troisième et un quatrième, vous pouvez suivre la même démarche que précédemment, en comparant le panier A = (15, 20) avec les paniers D = (25, 5) et E = (5, 30).

Vous avez maintenant 4 paniers qui font partie de votre courbe d'indifférence correspondant au panier (15, 20). Tracez cette courbe d'indifférence dans le repère (DVD, CD). Que pouvez-vous en déduire concernant la complémentarité ou substituabilité des DVD et CD pour vous ?

CHAPITRE 6
UTILITÉ ET FONCTION DE DEMANDE

QCM

1 a. **2** 1. Faux 2. Faux 3. Faux 4. Faux **3** b. **4** b.

EXERCICE 5 UNICITÉ DES FONCTIONS D'UTILITÉ

Rappelons que la fonction v représente les mêmes préférences que u si $v = f(u)$ avec $f' > 0$.

Ce sont ici les consommateurs A, B et D qui ont les mêmes préférences car les fonctions $f(z) = 10z + 2$ et $g(z) = 1/(10 - z)^{-1}$ sont strictement croissantes pour tout z.

EXERCICE 6 FONCTIONS DE DEMANDE

La fonction d'utilité est $u(x, y) = \text{Min}\{x, 2y\}$ $R = 100$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$.

1. Les deux biens sont compléments (voir Chapitre 5). Les quantités consommées (x^*, y^*) vont donc vérifier : $x^* = 2y^*$ et $p_1x^* + p_2y^* = R$, ce qui, ici, est équivalent à $x^* + 2y^* = 100$.

Par substitution, on obtient $y^* = 25$ et $x^* = 50$.

2. Pour donner l'équation de la courbe d'Engel, il faut résoudre le problème du consommateur pour un revenu R quelconque.

Nous obtenons $y^* = \dfrac{R}{4}$ et $x^* = \dfrac{R}{2}$. La courbe d'Engel du bien 1 a donc pour équation $x = \dfrac{R}{2}$. Il s'agit d'une droite de pente $\dfrac{1}{2}$.

3. Oui, les biens sont normaux car $\dfrac{\partial x^*}{\partial R} > 0$ et $\dfrac{\partial y^*}{\partial R} > 0$.

4. La fonction d'utilité indirecte est définie par $V(p_1, p_2, R) = u(x^*(p_1, p_2, R), y^*(p_1, p_2, R))$. Pour Daniel,

$$x^*(p_1, p_2, R) = \frac{2R}{2p_1 + p_2} \text{ et } y^*(p_1, p_2, R) = \frac{R}{2p_1 + p_2} \text{ et donc } V(p_1, p_2, R) = Min\{\frac{2R}{2p_1 + p_2}, \frac{2R}{2p_1 + p_2}\}$$

$$= \frac{2R}{2p_1 + p_2}$$

EXERCICE 7 FONCTIONS DE DEMANDE

Evanna consomme deux biens. Sa fonction d'utilité est $u(x, y) = \text{Min}\ \{x + 2y, y + 2x\}$

1. Construisons la courbe d'indifférence associée à un niveau d'utilité $u_0 = 8$.

L'équation de cette courbe est $\text{Min}\ \{x + 2y, y + 2x\} = 8$. Trois cas sont à considérer en fonction des valeurs de x et y :

- Si $x + 2y < y + 2x$, vrai si $y < x$, $\text{Min}\ \{x + 2y, y + 2x\} = x + 2y$ et l'équation de la courbe d'indifférence est : $y = -\dfrac{x}{2} + 4$;
- Si $x + 2y > y + 2x$, vrai si $y > x$, $\text{Min}\ \{x + 2y, y + 2x\} = y + 2x$ et l'équation de la courbe d'indifférence est : $y = -2x + 8$
- Si $x + 2y = y + 2x$, vrai si $y = x$, $\text{Min}\ \{x + 2y, y + 2x\} = y + 2x = x + 2y$, la courbe d'indifférence passe donc par le point $y = x$.

2. La quantité consommée des deux biens doit être égale pour des prix et un revenu quelconques. Si ce n'est pas le cas, cela signifie que la droite de budget est confondue avec une des parties d'une courbe d'indifférence. Ici, $y > x$, la droite de budget doit donc avoir une pente de – 2. De $-\frac{p_x}{p_y} = -2$ et $p_y = 0{,}5$, nous déduisons $p_x = 1$.

La contrainte budgétaire permet donc de calculer le revenu d'Evanna : $R = p_x x + p_y y = 16$.

3. Les demandes marshalliennes x^m et y^m vérifient :

$$x^m + 2y^m = y^m + 2x^m$$

$$p_x x^m + p_y y^m = R$$

On obtient donc $x^m = y^m = \dfrac{R}{p_x + p_y}$

4. Par définition, la fonction d'utilité indirecte :

$$V(p_x, p_y, R) = U(x^m, y^m) = x^m + 2y^m = y^m + 2x^m = \frac{3R}{p_x + p_y}.$$

EXERCICE 8 TAXATION ET DEMANDE

1. Pour déterminer la quantité optimale consommée de X et de Y, on résout le programme :

$$\underset{x,y}{Max}\ xy$$

$$s.c. \quad p_x x + p_y y = R$$

Les quantités optimales consommées sont : $x^1 = \dfrac{R}{2p_x}, \quad y^1 = \dfrac{R}{2p_y}$.

2. Le prix du bien *X* passe de p_x à $p_x + t$. Les quantités consommées deviennent $x^* = \dfrac{R}{2(p_x + t)}, \quad y^* = \dfrac{R}{2p_y}$. Emma consomme dans ce cas moins de bien *X*, sa consommation de bien *Y* ne change pas. La taxe collectée est $T = t \times x^* = t \times \dfrac{R}{2(p_x + t)}$.

3. Le revenu devient $R - T$, et les quantités consommées, $x^{**} = \dfrac{R-T}{2p_x}, \quad y^{**} = \dfrac{R-T}{2p_y}$.

On peut montrer que $p_x x^* + p_y y^* = R - T$.

Si x^* et y^* vérifient la contrainte sans correspondre aux quantités optimales consommées, ceci implique que $U(x^*, y^*) < U(x^{**}, y^{**})$, et donc que Emma atteint une utilité plus élevée avec la taxation directe.

4. Les prix des biens deviennent $p_x + t'$ et $p_y + t'$. Le programme permettant de déterminer les quantités consommées par Emma est :

$$\underset{x,y}{Max}\ xy$$

$$s.c. \quad (p_x + t')x + (p_y + t')y = R$$

et les consommations optimales d'Emma sont : $x^{***} = \dfrac{R}{2(p_x + t')}, \quad y^{***} = \dfrac{R}{2(p_y + t')}$.

On peut montrer que ces quantités vérifient aussi la contrainte budgétaire correspondant à la taxation directe.

5. Pour un montant total de taxe collectée identique, le meilleur des trois systèmes de taxation du point de vue d'Emma est la taxation directe, c'est-à-dire le prélèvement sur le revenu car il permet d'atteindre le niveau d'utilité le plus élevé en créant le moins de distorsions dans les quantités consommées.

EXERCICE 9 FONCTION DE DÉPENSE ET DEMANDES MARSHALLIENNES

Pour déterminer les fonctions de demande marshalliennes de Rupert, nous utilisons les relations entre dépense, utilité indirecte, demandes hicksiennes et demandes marshalliennes données dans la section 3.2.

$$x_1^h(p_1, p_2, \overline{U}) = \frac{\partial e}{\partial p_1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} p_1^{-1/2} p_2^{1/2}\right)\overline{U}$$

$$x_2^h(p_1, p_2, \overline{U}) = \frac{\partial e}{\partial p_2} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} p_1^{1/2} p_2^{-1/2}\right)\overline{U}$$

$$e(p_1, p_2, V(p_1, p_2, R)) = R \Rightarrow V(p_1, p_2, R) = R\left(\frac{1}{3}p_1 + p_1^{1/2} p_2^{1/2} + \frac{2}{3}p_2\right)^{-1}$$

$$x_1^m(p_1, p_2, R) = x_1^h(p_1, p_2, V(p_1, p_2, R)) \Rightarrow x_1^m(p_1, p_2, R) = R\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} p_1^{-1/2} p_2^{1/2}\right)\left(\frac{1}{3}p_1 + p_1^{1/2} p_2^{1/2} + \frac{2}{3}p_2\right)^{-1}$$

$$x_2^m(p_1, p_2, R) = x_2^h(p_1, p_2, V(p_1, p_2, R)) \Rightarrow x_2^m(p_1, p_2, R) = R\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} p_1^{1/2} p_2^{-1/2}\right)\left(\frac{1}{3}p_1 + p_1^{1/2} p_2^{1/2} + \frac{2}{3}p_2\right)^{-1}$$

EXERCICE 10 FONCTION D'UTILITÉ INDIRECTE

Les préférences de Michael pour les biens *X* et *Y* sont représentables par la fonction d'utilité : $u(x, y) = xy + x$.

1. Les demandes marshalliennes x^m et y^m sont solutions du problème : $\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ xy + x \\ s.c. \quad p_x x + p_y y = R \end{array}$

En résolvant par la méthode du lagrangien, nous obtenons :

$$x^m = \frac{1}{2p_x}\left(R + p_y\right), \quad y^m = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{p_y} - 1\right)$$

2. Si $p_x = 5$, $p_y = 20$ et $R = 25$, $x^m = 4{,}5$ et $y^m = 0{,}125$.

3. Oui, car leur demande augmente avec le revenu.

4. $V(p_x, p_y, R) = u(x^m, y^m) = x^m y^m + x^m = \frac{1}{4p_x p_y}\left(R + p_y\right)^2$

5. Nous devons comparer *V*(5, 20, 25) et *V*(10, 15, 25). *V*(5, 20, 25) = 5,0625 et *V*(10, 15, 25) = 2,67. Michael préfère donc la situation 1.

EXERCICE 11 SURPLUS DU CONSOMMATEUR

1. La quantité consommée est $x(2) = 10 - 2 = 8$. Pour déterminer le surplus, nous avons besoin de la fonction de demande inverse, qui est ici $p(x) = 10 - x$.

$S^c(2) = \int_0^8 (10 - t)dt - 2 \times 8 = 32$. Le surplus aurait pu aussi être calculé comme l'aire d'un triangle de hauteur 8 et de base 8.

2. Si le prix passe à 3, le surplus devient : $S^c(3) = \int_0^7 (10 - t)dt - 3 \times 7 = 24{,}5$ ce qui correspond à une perte de surplus de 7,5.

CHAPITRE 7
RISQUE ET COMPORTEMENT DU CONSOMMATEUR

QCM

1 a. **2** b. **3** b. **4** a. **5** c. **6** c.

EXERCICE 7 ÉQUIVALENCE ENTRE DEUX LOTERIES

Obi-Wan est indifférent entre A et B si et seulement si $Eu(A) = Eu(B)$.
Sa fonction d'utilité étant $u(w) = \frac{w^2}{2}$, son évaluation des deux loteries est :

$$Eu(A) = 0,75 \times \frac{2^2}{2} + 0,25 \times \frac{4^2}{2} = 3,5$$

$$Eu(B) = p \times \frac{1^2}{2} + (1-p) \times \frac{5^2}{2} = \frac{p}{2} + \frac{25(1-p)}{2} = \frac{25}{2} - 12p$$

p est solution de l'équation $\frac{25}{2} - 12p = 3,5$ et donc $p = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 8 PRIX D'UN BILLET DE LOTERIE

1. Si Han est prêt à vendre le billet pour un prix minimum de 10,25, ça signifie qu'il est indifférent entre avoir 110,25 de façon sure ou la loterie $A = (196, 1-a; 100, a)$.

   Dans le modèle d'espérance d'utilité, ceci est équivalent à : $u(110,25) = Eu(A)$

   En utilisant la fonction d'utilité $u(w) = \sqrt{w}$, l'égalité ci-dessus devient :

   $\sqrt{110,25} = (1-a)\sqrt{196} + a\sqrt{100}$et on obtient $a = \frac{5,5}{6}$.

2. On note π le prix du billet. π est solution de :

   $\sqrt{100000 + \pi} = \frac{0,5}{6}\sqrt{100096} + \frac{5,5}{6}\sqrt{100000}$ et on obtient $\pi = 7,9987$.

   Notons que l'espérance de gain du billet est $96 \times \frac{0,5}{6} = 8$.

EXERCICE 9 CHOIX DE DEUX INDIVIDUS

D'après la définition 4, la prime de risque notée Π_X associée à une loterie X pour un individu de richesse initiale W est telle que : $W + E(X) - \Pi_X \sim W + X$.
Pour un individu dont les préférences sont représentées par le modèle d'espérance d'utilité, la prime de risque est donc solution de : $u(W + EX - \Pi_X) = Eu(W + X)$.
Dans l'exercice, $EX = 37$. En prenant en compte la richesse initiale, pour une fonction d'utilité $u(\,)$, Π_X est solution de : $u(137 - \Pi_X) = Eu(100 + X)$.

Pour Ludo, Π^L_X est solution de : $\ln(137 - \Pi^L_X) = \frac{1}{3}\ln(101) + \frac{1}{3}\ln(110) + \frac{1}{3}\ln(200)$ et donc $\Pi^L_X = 6,51$.

Pour Naga, Π^N_X est solution de : $\sqrt{137-\Pi_X^N}=\frac{1}{3}\sqrt{101}+\frac{1}{3}\sqrt{110}+\frac{1}{3}\sqrt{200}$ et donc $\Pi^N_X = 3{,}37$.

La prime de risque de Ludo est plus grande que celle de Naga ce qui n'est pas surprenant car la fonction d'utilité ln$x$ correspond à plus d'aversion pour le risque que $\sqrt{x}$ car son indice d'aversion absolue pour le risque et plus grand pour tout x.

EXERCICE 10 ASSURANCE CONTRE LE VOL

Erratum : la fonction d'utilité du médecin est $u(w) = bw$ avec $a = 0{,}05$ et $b = 10$.

1. $p_1 = 1 - p_2 - p_3 = 0{,}5$. Si on note $\widetilde{W}$ la variable aléatoire associée à la richesse du médecin, $E(\widetilde{W}) = 0{,}5 \times 200\,000 + 0{,}3 \times 100\,000 + 0{,}2 \times 10\,000 = 132\,000$
$\mathrm{u}(E(\widetilde{W})) = 10x^{0{,}05\times 132000} = 18{,}03$
On note s_1, s_2 et s_3, les 3 états de la nature possibles ici, et W_i, $i = 1, 2, 3$, la richesse associée à l'état i. s_1 = « il ne se passe rien », s_2 = « cambriolage simple » et s_3 = « cambriolage complet ».
$u(W_1) = 10(200\,000)^{0,05} = 18{,}41$
$u(W_2) = 10(100\,000)^{0,05} = 17{,}78$
$u(W_3) = 10(10\,000)^{0,05} = 15{,}85$
$Eu(\widetilde{W}) = 0{,}5 \times 18{,}41 + 0{,}3 \times 17{,}78 + 0{,}2 \times 15{,}85 = 17{,}71$
2. La prime maximale Π^{max} pour une assurance complète est solution de :
$u(W_1 - \Pi^{max}) = Eu(\widetilde{W})$ et donc $\Pi^{max} = 107876{,}332$. Elle est donc supérieure à l'espérance de la perte qui est de 68 000, ce qui n'est pas surprenant car le médecin est adversaire du risque (sa fonction d'utilité est concave).
3. Si la prime est actuarielle, le médecin choisit une assurance complète (voir Focus p. 176).
D'après 3, la prime maximale que le médecin est prêt à accepter pour une couverture complète est $\Pi^{max} = 107876{,}332$. Étant donné que ici $E(L) = 68\,000$, le taux de chargement maximal est $\lambda^{max} = \frac{107876{,}332}{68000} - 1 = 0{,}586$.

EXERCICE 11 CHOIX DE PORTEFEUILLE

Nous utilisons dans cet exercice les notations et les résultats de la section 3 de ce chapitre.
1. Nous devons d'abord déterminer si Dormé investira un montant strictement positif dans l'actif risqué. Ce sera le cas si $E(R) > i$. Ici, $E(R) = 0{,}05$, $i = 0{,}04$. Le montant investi dans l'actif risqué sera donc strictement positif.
D'après le résultat p. 179, le montant a^* investi dans l'actif risqué est solution de l'équation :

$$E[(R-i)\times u'(a(R-i)+w_0(1+i))]=0$$

avec $u'(w) = e^{-\beta w}$.
En remplaçant les caractéristiques des actifs par leurs valeurs, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}(0{,}08-0{,}04)e^{-\beta[a(0{,}08-0{,}04)+w_0(1+0{,}04)]}+\frac{1}{2}(0{,}02-0{,}04)e^{-\beta[a(0{,}02-0{,}04)+w_0(1+0{,}04)]}=0$$

En simplifiant, l'expression ci-dessus devient : $0{,}04e^{-0{,}04\beta a}=0{,}02e^{0{,}02\beta a}$, ce qui donne $a^*=\frac{1}{\beta}\frac{ln2}{0{,}06}$.
Le montant investi dans l'actif risqué décroît avec β et ne dépend pas de w_0. Ce résultat était prévisible car dans cette fonction d'utilité une augmentation de β correspond à une augmentation de l'aversion au risque. Par ailleurs, il s'agit d'une fonction CARA, donc, d'après le résultat du Focus p. 182, le montant investi dans l'actif risqué ne dépend pas de la richesse.

2. Nous reprenons la même démarche que dans **1**. Ici $E(R) = 0{,}05$, l'actif B a la même espérance de gain que l'actif A, donc Dormé investira un montant strictement positif dans cet actif. a^{**} est solution de :

$$0{,}75(0{,}06-0{,}04)e^{-\beta[a(0{,}06-0{,}04)+w_0(1+0{,}04)]}+0{,}25(0{,}02-0{,}04)e^{-\beta[a(0{,}02-0{,}04)+w_0(1+0{,}04)]}=0$$

En simplifiant, l'expression ci-dessus devient : $0,75e^{-0,02\beta a} = 0,25e^{0,02\beta a}$, ce qui donne $a^{**} = \frac{1}{\beta}\frac{ln3}{0,04}$.
On a donc $a^* < a^{**}$ ce qui s'explique car l'actif B est moins risqué que l'actif A.

EXERCICE 12 SUJET D'EXAMEN – UNIVERSITÉ PARIS OUEST 2013

1. Il faut comparer l'espérance d'utilité associée à chacun des contrats :
$Eu(A) = ln(50000 - 240) = 10,81497$
$Eu(B) = 0,01 \ln(50000 - 20000 + 10000 - 120) + 0,99 \ln(50000 - 120) = 10,81514$
$Eu(B) > Eu(A)$ implique que M. Dupont préfère le contrat B. Ceci s'explique par le taux de chargement élevé de la prime d'assurance. Plus précisément, ici, $\Pi(I) = 1,2pI$ ce qui correspond à un taux de chargement de 20 %.
2. En recalculant $Eu(A)$ et $Eu(B)$ avec une richesse d'un million d'euros, on constate que le contrat préféré reste B. Ce résultat peut être obtenu sans calculer les espérances d'utilité, il s'explique par la fonction d'utilité de M Dupont.
ln$x$ est une fonction DARA (voir définition 7 et section 1.3.3.). D'après le Focus p. 177, si un individu a une fonction d'utilité DARA, sa demande d'assurance diminue lorsque son revenu augmente. Donc, si avec une richesse de 50 000 euros, M. Dupont préfère le contrat avec l'indemnité la plus faible, son choix aurait été le même avec une richesse d'un million d'euros.
3. Pour déterminer le contrat préféré par M. Dupont dans la compagnie Y, nous devons trouver le niveau de couverture γ^* qui maximise l'espérance d'utilité de M. Dupont. Notons que, pour une probabilité de sinistre p, la prime d'assurance associée à un niveau de couverture γ est : $\Pi(\gamma) = (1+\lambda)\gamma pS$.
Le niveau de couverture choisi est donc solution du programme de maximisation suivant :

$$\underset{\gamma\in[0,1]}{Max}\ pu(w-S+\gamma S-(1+\lambda)\gamma pS)+(1-p)u(w-(1+\lambda)\gamma pS)$$

La condition de premier ordre de ce programme est :

$$(1-(1+\lambda)p)u'(\underline{W})-(1+\lambda)(1-p)u'(\overline{W})=0$$

où $\underline{W} = w-(1-\gamma)S-(1+\lambda)\gamma pS, \quad \overline{W} = w-(1+\lambda)\gamma pS$

La condition de second ordre est vérifiée à cause de la concavité de la fonction d'utilité.
En prenant en compte le fait que $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = 1/x$, la condition de premier ordre s'écrit :

$$\frac{(1-(1+\lambda)p)}{(1+\lambda)(1-p)} = \frac{\underline{W}}{\overline{W}}.$$

En remplaçant les différents paramètres par leurs valeurs ($p = 0,01$, $\lambda = 0,3$, $S = 20\,000$, $w = 5\,000$), γ^* devient solution de :

$$0,7669 = \frac{30000+19740\gamma}{50000-260\gamma}$$ et on obtient $\gamma^* = 0,4185$.

4. Pour déterminer la compagnie choisie par M. Dupont, il faut comparer l'espérance d'utilité du contrat préféré dans la compagnie X (c'est-à-dire le contrat B) avec l'espérance d'utilité du contrat préféré dans la compagnie Y (le contrat correspondant à une couverture de proportion $\gamma^* = 0,4185$, contrat que nous notons C).

$$Eu(C) = 0,01 \ln(50000 - (1 - 0,4185)20000 - 260 \times 0,4185) + 0,99 \ln(50000 - 260 \times 0,4185)$$
$$= 10,814946$$

On a donc $Eu(B) > Eu(C)$, ce qui implique que M. Dupont va s'assurer chez la compagnie X. La compagnie X propose moins de choix de contrats (deux seulement), mais ses primes sont plus faibles (le taux de chargement est de 20 %). La compagnie Y propose plus de choix (toutes les proportions de couverture sont possibles), mais son taux de chargement est plus élevé (30 %). M. Dupont préfère un contrat qui diffère de son niveau de couverture « idéal », mais dont le prix est plus intéressant, plutôt que son contrat « idéal », mais à un prix bien plus élevé.

CHAPITRE 8
MARCHÉS CONCURRENTIELS

QCM

1 Faux **2** Vrai **3** Faux **4** Vrai **5** Vrai **6** Faux

EXERCICE 7 ÉQUILIBRE PARTIEL À COURT TERME

1. On commence par déterminer la fonction d'offre d'une firme de type 1.
La quantité produite y^1 doit vérifier $p = Cm(y^1)$.Pour une firme de type 1, $Cm(y) = y$ et donc $y^1(p) = p$.

La firme produit à court terme si $p \geq Min_y CVM(y)$. Pour une firme de type 1, $CVM(y) = 0,5y$ et donc $Min_y CVM(y) = 0$.

L'offre globale des firmes de type 1, notée $Q^{O1}(p)$ est donnée par $Q^{O1}(p) = 15y^1(p) = 15p$ pour tout $p \geq 0$.

2. Le seuil de rentabilité (voir chapitre 4), noté p_R vérifie $p_R = Min_y CV(y)$. Pour une firme de type 2, $CV(y) = 1,5y + 1 + \frac{1,5}{y}$.
$CV'(y) = 0$ pour $y = 1$ et donc $p_R = CV(1) = 4$.

   Etant donné que nous sommes dans un contexte de court terme, ce n'est pas le seuil de rentabilité, mais le seuil de fermeture, noté p_F, et tel que $p_F = Min_y CVM(y)$ qui détermine à partir de quel prix la firme va produire.

   Pour une firme de type 2, $CVM(y) = 1,5y + 1$ et donc $p_F = CVM(0) = 1$.

   La quantité produite y^2 doit vérifier $p = Cm(y^2)$.Pour une firme de type 2, $Cm(y) = 3y + 1$ et donc $y^2(p) = \frac{p-1}{3}$.
   L'offre globale des firmes de type 2, notée $Q^{O2}(p)$ est donnée par $Q^{O2}(p) = 15y^2(p) = 5p - 5$ pour tout $p \geq 1$.

3. On note $Q^O(p)$, l'offre globale de la branche.
$$Q^O(p) = \begin{cases} Q^{O1}(p) = 15p \text{ pour } 0 \leq p < 1 \\ Q^{O1}(p) + Q^{O2}(p) = 20p - 5 \text{ pour } p \geq 1 \end{cases}$$

4. Le prix d'équilbre p^E doit vérifier $Q^O(p^E) = Q^D(p^E)$. Ici, $p^E = 6$.

EXERCICE 8 ÉQUILIBRE PARTIEL À LONG TERME.

Le coût à long terme de chaque entreprise produisant y est : $C(y) = y^3 - 4y^2 + 8y$. De nouvelles entreprises entreront dans la branche si les profits sont positifs ; d'autres en sortiront sinon.
1. La fonction d'offre de long terme est composée de la somme des fonctions d'offre des entreprises qui sont toutes identiques ici. L'offre individuelle est obtenue à partir de l'égalité entre le prix et le coût marginal : $p = C_m(y) = 3y^2 - 8y + 8$. On en déduit que l'offre individuelle est

$y(p) = \frac{4 \pm \sqrt{3p-8}}{3}$ avec $p > 8/3$. La seule possibilité pour que l'offre soit croissante est $y(p) = \frac{4+\sqrt{3p-8}}{3}$. Nous retenons ce cas pour la suite de l'exercice.

2. Les seuils de rentabilité sont déterminés à partir des coûts moyens : $CM \quad (y) = y^2 - 4y + 8$. Nous en déduisons le seuil de rentabilité pour les prix des firmes : $\underline{p} = 4$. À long terme, le prix d'équilibre sera égal à $p^* = 4$.

La fonction de demande est $x = 2000 - 100p$. Nous en déduisons la quantité d'équilibre : $x^* = 2000 - 100 \times 4 = 1600$.

L'offre individuelle est $y(4) = \frac{4+\sqrt{12-8}}{3} = 2$. La quantité offerte agrégée à l'équilibre : $Q(4) = 2\,n$, avec n le nombre de firmes à l'équilibre. À l'équilibre, l'offre est égale à la demande : $1600 = 2\,n \Leftrightarrow n = 800$.

EXERCICE 9 ÉQUILIBRE SUR LE MARCHÉ D'UN FACTEUR DE PRODUCTION

1. Le programme d'une firme de type 1 est :

$$\begin{aligned} \max_{y,z,L} \quad & qy - wL - pz \\ s.c. \quad & y = L^{1/4} z^{1/4} \end{aligned}$$

On trouve la demande individuelle de bien z pour chaque firme de type 1 : $z_1^d = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \times \left(\frac{p}{w}\right)^{1/2}$.

On en déduit la demande globale en fonction des prix p, q, w : $Z_1^d = 16 z_1^d = 16 \left(\frac{q}{p}\right)^2 \times \left(\frac{p}{w}\right)^{1/2}$.

2. Le programme d'une firme de type 2 est :

$$\begin{aligned} \max_{z,L} \quad & pz - wL \\ s.c. \quad & z = L^{1/2} \end{aligned}$$

On trouve l'offre individuelle de bien z pour la firme de type 2 : $z_2^S = \frac{p}{2w}$.

3. L'équilibre sur le marché du bien intermédiaire est caractérisé par $Z_1^d = z_2^S$ soit :

$16 \left(\frac{q}{p}\right)^2 \times \left(\frac{p}{w}\right)^{1/2} = \frac{p}{2w}$.

Avec $q = \frac{1}{8}$ et $w = 1$, on trouve le prix d'équilibre : $p^* = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/5}$ et $z^* = \left(\frac{1}{2}\right)^{7/5}$.

EXERCICE 10 ÉQUILIBRE DANS UNE ÉCONOMIE D'ÉCHANGE

1. Les quantités souhaitées pour les deux biens par les deux consommateurs sont :

$x_A = \frac{1}{3}\frac{4p_x+2p_y}{p_x}$, $y_A = \frac{2}{3}\frac{4p_x+2p_y}{p_y}$ et $x_B = \frac{3}{4}\frac{6p_x+8p_y}{p_x}$, $y_B = \frac{1}{4}\frac{6p_x+8p_y}{p_y}$.

On en déduit les demandes nettes individuelles sur chaque marché :

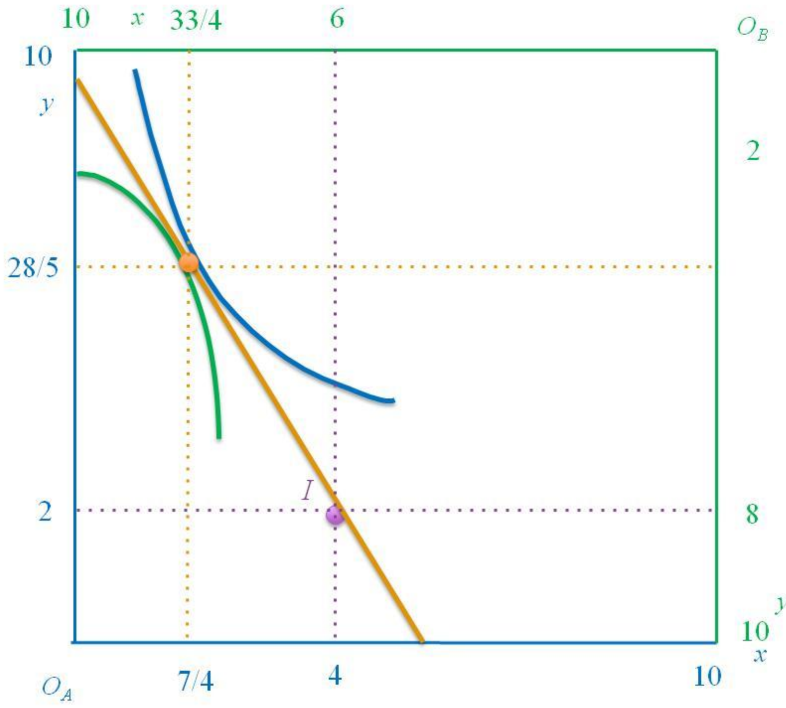
$z_A^x = \frac{1}{3}\frac{4p_x+2p_y}{p_x} - 4$, $z_A^y = \frac{2}{3}\frac{4p_x+2p_y}{p_y} - 2$ et $z_B^x = \frac{3}{4}\frac{6p_x+8p_y}{p_x} - 6$, $z_B^y = \frac{1}{4}\frac{6p_x+8p_y}{p_y} - 8$.

2. À l'équilibre, les demandes nettes agrégées sont nulles :

$$\begin{cases} z_A^x + z_B^x = \dfrac{1}{3}\dfrac{4p_x + 2p_y}{p_x} - 4 + \dfrac{3}{4}\dfrac{6p_x + 8p_y}{p_x} - 6 = 0 \\ z_A^y + z_B^y = \dfrac{2}{3}\dfrac{4p_x + 2p_y}{p_y} - 2 + \dfrac{1}{4}\dfrac{6p_x + 8p_y}{p_y} - 8 = 0 \end{cases}$$

On obtient : $\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = \frac{5}{8}$ et $x_A = \frac{7}{4}$, $y_A = \frac{28}{5}$ et $x_B = \frac{33}{4}$, $y_B = \frac{22}{5}$.

3.



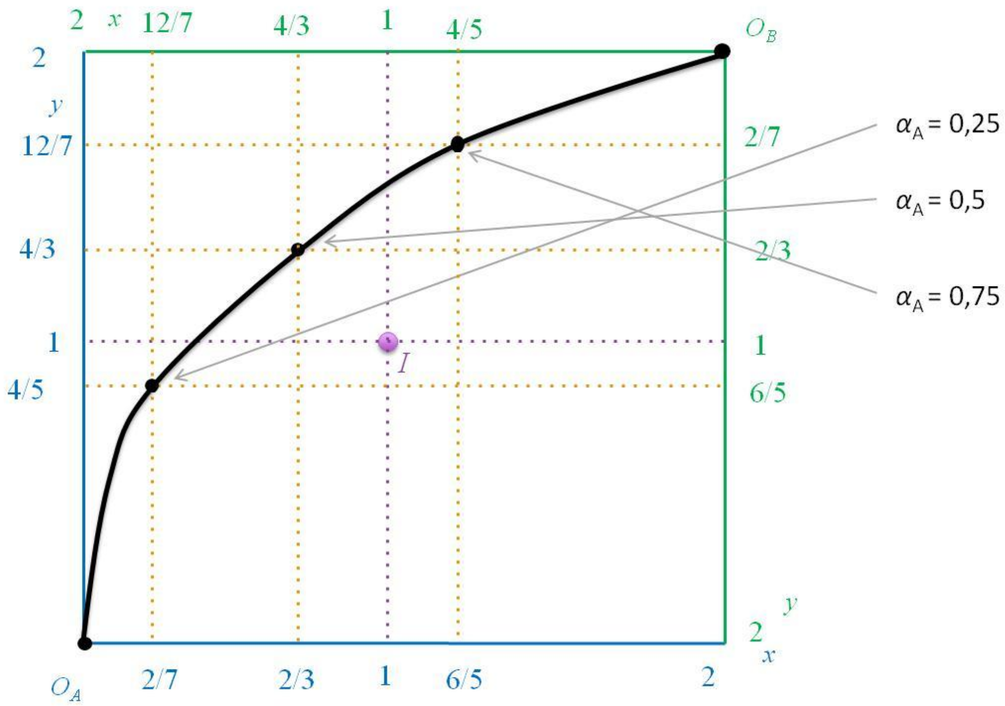
EXERCICE 11 ÉQUILIBRE ET BIEN-ÊTRE DANS UNE ÉCONOMIE D'ÉCHANGE

1. L'ensemble des états optimaux est donné par la résolution du programme :

$$\max_{x_A,y_A,x_B,y_B} \alpha_A\left(\frac{1}{3}\ln x_A + \frac{2}{3}\ln y_A\right) + \alpha_B\left(\frac{2}{3}\ln x_B + \frac{1}{3}\ln y_B\right)$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_A + x_B \leq 2 \\ y_A + y_B \leq 2 \end{cases}$$

On trouve : $x_A{}^* = 2\frac{\alpha_A}{\alpha_A+2\alpha_B}$, $x_B{}^* = 4\frac{\alpha_B}{\alpha_A+2\alpha_B}$, $y_A{}^* = 4\frac{\alpha_A}{2\alpha_A+\alpha_B}$, $y_B{}^* = 2\frac{\alpha_B}{2\alpha_A+\alpha_B}$.



2. Les quantités souhaitées pour les deux biens par les deux consommateurs sont :
$x_A = \frac{1}{3}\frac{p_x+p_y}{p_x}$, $y_A = \frac{2}{3}\frac{p_x+p_y}{p_y}$ et $x_B = \frac{2}{3}\frac{p_x+p_y}{p_x}$, $y_B = \frac{1}{3}\frac{p_x+p_y}{p_y}$.
À l'équilibre, on a :
$\begin{cases} \frac{1}{3}\frac{p_x+p_y}{p_x} + \frac{2}{3}\frac{p_x+p_y}{p_x} = 2 \\ \frac{2}{3}\frac{p_x+p_y}{p_y} + \frac{1}{3}\frac{p_x+p_y}{p_y} = 2 \end{cases}$, soit $\frac{p_x}{p_y} = 1$ et les quantités d'équilibre sont :
$x_A = \frac{2}{3}, y_A = \frac{4}{3}, x_B = \frac{4}{3}, y_B = \frac{2}{3}$.
3. On vérifie que l'allocation d'équilibre est un optimum de Pareto. Il suffit de prendre $\alpha_A = \alpha_B = 1$.

EXERCICE 12 PREMIER THÉORÈME DU BIEN-ÊTRE

Considérons un équilibre concurrentiel (p^* ; x^*). Par la définition d'un équilibre général concurrentiel (voir Définition 9), nous savons que les agents maximisent leur utilité sous contrainte donc (voir Propriété) :

$$TMS_1 = \frac{p_1}{p_2}$$
$$TMS_2 = \frac{p_1}{p_2}$$

Par ailleurs, à l'équilibre concurrentiel, tous les marchés sont soldés :

$$p^* \cdot \left(x^{*i} - \omega^i\right) = 0$$

Ainsi l'allocation concurrentielle est réalisable et sans gaspillage et les TMS des agents sont égaux entre eux. Graphiquement, l'allocation d'équilibre est donc sur la courbe des contrats. Il s'agit bien d'un optimum de Pareto.

EXERCICE 13 ÉQUILIBRE GÉNÉRAL DANS UNE ÉCONOMIE AVEC PRODUCTION

1. Le programme de la firme 1 est :

$$\max_{y_1,L} \quad p_1 y_1 - wL$$
$$s.c. \quad y_1 = L^{1/2}$$

On trouve $L_1^d = \frac{p_1{}^2}{4w^2}$, $y_1^o = \frac{p_1}{2w}$ et le profit $\pi_1 = \frac{p_1{}^2}{4w}$.
Le programme de la firme 2 est :

$$\max_{y_2,L} \quad p_2 y_2 - wL$$
$$s.c. \quad y_2 = 2L^{1/2}$$

On trouve $L_2^d = \frac{p_2{}^2}{w^2}$, $y_2^o = 2\frac{p_2}{w}$ et le profit $\pi_2 = \frac{p_2{}^2}{w}$.
2. Le programme de l'individu 1 est :

$$\max_{x_1^1,x_2^1,l^1} \quad 2\ln x_1^1 + 2\ln x_2^1 + 2\ln(1-l^1)$$
$$s.c. \quad p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 = wl^1 + R^1$$

avec $R^1 = 0{,}6\pi_1 + 0{,}5\pi_2$.
On pose le Lagrangien :
$\mathcal{L}(x_1^1, x_2^1, l^1) = 2\ln x_1^1 + 2\ln x_2^1 + 2\ln(1-l^1) + \lambda[wl^1 + R^1 - p_1x_1^1 - p_2x_2^1]$.
Les conditions d'optimalité sont alors :
$\begin{cases} \frac{2}{x_1^1} = \lambda p_1 \\ \frac{2}{x_2^1} = \lambda p_2 \text{ et } p_1x_1^1 + p_2x_2^1 = wl^1 + R^1. \\ \frac{2}{1-l^1} = \lambda w \end{cases}$

On trouve : $x_1^1 = \frac{w+R^1}{3p_1}, x_2^1 = \frac{w+R^1}{3p_2}, l^1 = \frac{2w-R^1}{3w}$.
De manière similaire, le programme de l'individu 2 est :

$$\max_{x_1^2, x_2^2, l^2} \quad 4\ln x_1^2 + 2\ln x_2^2 + 2\ln(1-l^2)$$
$$s.c. \quad p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = wl^2 + R^2$$

avec $R^2 = 0{,}4\pi_1 + 0{,}5\pi_2$.
On pose le Lagrangien :
$\mathcal{L}(x_1^2, x_2^2, l^2) = 4\ln x_1^2 + 2\ln x_2^2 + 2\ln(1-l^2) + \lambda[wl^2 + R^2 - p_1x_1^2 - p_2x_2^2]$.
Et on trouve : $x_1^2 = \frac{w+R^2}{2p_1}, x_2^2 = \frac{w+R^2}{4p_2}, l^2 = \frac{3w-R^2}{4w}$.
3. On exprime R^1 et R^2 comme des fonctions des prix :
$R^1 = 0{,}6\frac{{p_1}^2}{4w} + 0{,}5\frac{{p_2}^2}{w} = \frac{3{p_1}^2+10{p_2}^2}{20w}$ et $R^2 = 0{,}4\frac{{p_1}^2}{4w} + 0{,}5\frac{{p_2}^2}{w} = \frac{{p_1}^2+5{p_2}^2}{10w}$.
Les demandes des consommateurs s'écrivent alors :

$$x_1^1 = \frac{20w^2 + 3{p_1}^2 + 10{p_2}^2}{60wp_1}, x_2^1 = \frac{20w^2 + 3{p_1}^2 + 10{p_2}^2}{60wp_2}, l^1 = \frac{40w^2 - 3{p_1}^2 - 10{p_2}^2}{60w^2}$$
$$x_1^2 = \frac{10w^2 + {p_1}^2 + 5{p_2}^2}{20wp_1}, x_2^2 = \frac{10w^2 + {p_1}^2 + 5{p_2}^2}{40wp_2}, l^2 = \frac{330w^2 - {p_1}^2 - 5{p_2}^2}{40w^2}$$

L'équilibre est obtenu lorsque les marchés sont soldés :

$$\begin{cases} x_1^1 + x_1^2 = y_1^o \\ x_2^1 + x_2^2 = y_2^o \\ l^1 + l^2 = L_1^d + L_2^d \end{cases}, \text{soit :} \begin{cases} \frac{20w^2+3{p_1}^2+10{p_2}^2}{60wp_1} + \frac{10w^2+{p_1}^2+5{p_2}^2}{20wp_1} = \frac{p_1}{2w} \\ \frac{20w^2+3{p_1}^2+10{p_2}^2}{60wp_2} + \frac{10w^2+{p_1}^2+5{p_2}^2}{40wp_2} = 2\frac{p_2}{w} \\ \frac{40w^2-3{p_1}^2-10{p_2}^2}{60w^2} + \frac{330w^2-{p_1}^2-5{p_2}^2}{40w^2} = \frac{{p_1}^2}{4w^2} + \frac{{p_2}^2}{w^2} \end{cases}$$

D'après la loi de Walras, si deux des trois marchés sont à l'équilibre, le troisième le sera également. Considérons les deux marchés des deux biens de consommation et posons p_1=1. On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 50w^2 + 25{p_2}^2 = 21 \\ 205{p_2}^2 - 70w^2 = 9 \end{cases}$$

On obtient : p_1=1, $p_2 = \frac{2}{5}$ et $w = \sqrt{\frac{119}{350}}$.

CHAPITRE 9
MONOPOLE ET MONOPSONE

QCM

1 a. **2** c. **3** b. **4** a. **5** c.

EXERCICE 6 DÉCISIONS DU MONOPOLE AVEC COÛTS QUADRATIQUES

1. $RT(q) = (-2q + 6)q$. La recette marginale est $Rm(q) = 6 - 4q$.
2. Le monopole choisit la quantité q^M, telle que $Rm(q) = Cm(q)$, soit :
$Rm(q) = 6 - 4q = Cm(q) = q - 4$.
On trouve $q^M = 2$. Le prix est alors $p^M = 2$ et le profit $\pi^M = p^M q^M - c(q^M) = 18$.
3. Le surplus des consommateurs est $S^c(q) = \frac{(P_{max} - p) \times q}{2}$ où $P_{max} = 6$. On trouve $S^c(2) = 4$.
Si la firme se comportait comme une entreprise en concurrence parfaite, le prix serait tel que $p = Cm(q) = q - 4$ avec nécessairement $q > 4$, sinon, la firme ne produit pas. La quantité d'équilibre serait telle que $p = q - 4 = -2q + 6$, soit $q = \frac{10}{3} < 4$. La firme ne produit pas ici en situation parfaitement concurrentielle.
4. Dans cet exercice, il y a un gain à la situation de monopole.

EXERCICE 7 RÉGULATION DU MONOPOLE

1. Le monopole choisit la quantité q^M, telle que $Rm(q) = Cm(q)$, avec ici $RT(q) = (-q + 10)q$. Soit : $Rm(q) = 10 - 2q = Cm(q) = 2$.
On trouve $q^M = 4$. Le prix est alors $p^M = 6$ et le profit $\pi^M = p^M q^M - c(q^M) = 20$.
2. Si la firme se comportait comme une entreprise en concurrence parfaite, le prix serait tel que $\hat{p} = Cm(q) = 2$. La quantité d'équilibre serait telle que $2 = -q + 10$, soit $\hat{q} = 8$ et $\pi = 2 \times 8 - C(8) = 4$. On constate qu'en monopole, le prix est plus élevé, la quantité échangée est plus faible, mais le profit de la firme est plus élevé qu'en concurrence pure et parfaite.
3. Pour une firme en monopole, la seule contrainte est celle des débouchés. La firme doit prendre en compte la demande qui s'adressera à elle en fonction du prix qu'elle va fixer.
4. $S(\hat{q}) - S(q^M) = [\pi(\hat{q}) + S^c(\hat{q})] - [\pi(q^M) + S^c(q^M)]$ avec $S^c(q) = \frac{(10-p) \times q}{2}$.
On a :
$\pi(\hat{q}) = 2 \times 8 - (2 \times 8 - 4) = 4$ et $\pi(q^M) = 20$. Le gain en bien-être de la firme en monopole est de 16.
$S^c(\hat{q}) = \frac{(10-2) \times 8}{2} = 32$ et $S^c(q^M) = \frac{(10-6) \times 4}{2} = 8$. La perte de bien-être des consommateurs est de 24.
Le gain de bien-être des firmes ne suffit pas à compenser la perte de bien-être des consommateurs. Il y a une perte « sèche » pour la société. La perte de la société est égale à $S(\hat{q}) - S(q^M) = 8 > 0$.
5. Oui, imposer un prix égal au coût marginal est pertinent car ça entraîne une augmentation de la quantité échangée jusqu'à la quantité de concurrence parfaite et fait disparaître la perte sèche.
6. Voir chapitre 9, p. 226.

EXERCICE 8 MONOPOLE DISCRIMINANT

1. On cherche la demande globale à partir des demandes par groupe, $q_s = 100 - p$ et $q_j = 100 - \frac{1}{2}p$. On trouve : $Q = q_s + q_j = 100 - p + 100 - \frac{1}{2}p = 200 - \frac{3}{2}p$.
À partir de la demande globale, on déduit la demande inverse : $p = \frac{400}{3} - \frac{2}{3}Q$.
Le programme du monopole s'écrit : $\max_Q \pi(Q) = \left(\frac{400}{3} - \frac{2}{3}Q\right)Q - 0{,}5Q^2$.
On obtient : $\frac{400}{3} - \frac{4}{3}Q - Q = 0$.
La quantité choisie est : $Q = \frac{400}{7}$. Le prix unique est $p = \frac{2000}{21}$.
Et le profit vaut $\pi(Q) = \frac{2000}{21} \times \frac{400}{7} - 0{,}5 \times \left(\frac{400}{7}\right)^2 = \frac{80000}{21}$.
2. Le programme du monopole s'écrit maintenant :

$$\max_{q_s, q_j} \pi(q_s, q_j) = (100 - q_s)q_s + (200 - 2q_j)q_j - 0{,}5(q_s + q_j)^2$$

On obtient :

$$\begin{cases} 100 - 2q_s - (q_s + q_j) = 0 \\ 200 - 4q_j - (q_s + q_j) = 0 \end{cases}$$

Les quantités choisies sont : $q_s = \frac{150}{7}, q_j = \frac{250}{7}$. Les prix sont $p_s = \frac{550}{7}$ et $p_j = \frac{900}{7}$.
Et le profit vaut $\pi(q_s, q_j) = \frac{550}{7} \times \frac{150}{7} + \frac{900}{7} \times \frac{250}{7} - \frac{1}{2}\left(\frac{150}{7} + \frac{250}{7}\right)^2 = \frac{32500}{7} > \frac{80000}{21}$.
3. L'élasticité de la demande est $\varepsilon = \frac{p \times q'(p)}{q(p)}$. On obtient donc : $\varepsilon_s = \frac{p_s \times (-1)}{100 - p_s} = -\frac{11}{3}$ et $\varepsilon_j = \frac{p_j \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{100 - \frac{1}{2}p_j} = -\frac{9}{5}$. Les consommateurs Jedis sont moins sensibles au prix que les Siths.

EXERCICE 9 SUJET D'EXAMEN – JUIN 2013 L2 ÉCONOMIE-GESTION, UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE

Exercice sur 4 points.
1. $Q^C = 80, Q^L = 80$ et le profit est égal à 600.
2. $\varepsilon_C = -\frac{3}{2}$ et $\varepsilon_L = -2$. Les habitants en Comté sont moins sensibles au prix.

CHAPITRE 10
UNE INTRODUCTION À LA THÉORIE DES JEUX

QCM

1 1. Faux 2. Vrai 3. Vrai 4. Faux **2** a. **3** b.

EXERCICE 4 ÉQUILIBRE DE NASH

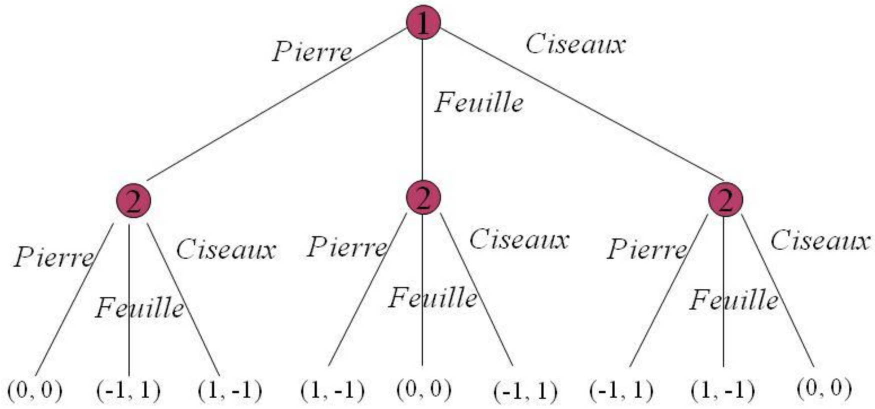
Les équilibres de Nash sont tels qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement.
1. (2, 2) et (1, 1) sont des équilibres de Nash car si un des joueurs dévie seul, il reçoit 0. (0, 0) ne correspond pas à un équilibre de Nash car les deux joueurs ont intérêt à changer de stratégie.
Il y a 2 équilibres de Nash.
2. (2, 2) n'est pas un équilibre de Nash. En effet, le joueur 1 a intérêt à dévier pour recevoir 3 à la place de 2. Il en est de même pour le joueur 2.
(0, 0) n'est pas un équilibre de Nash car les deux joueurs ont intérêt à dévier.
(1, 3) est un équilibre de Nash. En effet, si le joueur 1 dévie, il reçoit 0 à la place de 1 et si le joueur 2 dévie, il reçoit 2 à la place de 3. De même, (3, 1) est un équilibre de Nash.
Il y a 2 équilibres de Nash.
3. $(1, -1)$ n'est pas un équilibre de Nash. En effet, le joueur 2 a intérêt à dévier pour recevoir 1 à la place de – 1.
$(-1,1)$ n'est pas un équilibre de Nash. En effet, le joueur 1 a intérêt à dévier pour recevoir 1 à la place de – 1.
Il n'y a pas d'équilibre de Nash dans ce jeu.

EXERCICE 5 « PIERRE, FEUILLE, CISEAUX »

1.

		Joueur 2		
		Pierre	**Feuille**	**Ciseaux**
Joueur 1	**Pierre**	(0, 0)	(– 1, 1)	(1, – 1)
	Feuille	(1, – 1)	(0, 0)	(– 1, 1)
	Ciseaux	(– 1, 1)	(1, – 1)	(0, 0)

2.



EXERCICE 6 ÉQUILIBRE ET OPTIMUM

1. Il faut que B soit la stratégie dominante du joueur 1 et L celle du joueur 2, autrement dit que : $e \geq a; g \geq c$ et $b \geq d, f \geq h$.
2. Il faut que ni le joueur 1 ni le joueur 2 n'ait intérêt à dévier du résultat (e, f) : $e \geq a; f \geq h$.
3. Le résultat (e, f) ne doit pas être pareto-dominé, il doit maximiser le gain collectif : $e + f \geq a + b; e + f \geq g + h; e + f \geq c + d$ avec une inégalité stricte au moins.

EXERCICE 7 DILEMME DU SAMARITAIN

1. (2, 2) n'est pas un équilibre de Nash : le joueur 2 a intérêt à dévier pour recevoir 3 à la place de 2. (– 2, 3) n'est pas un équilibre de Nash : le joueur 1 a intérêt à dévier pour recevoir 1 à la place de – 2. (– 1, 1) n'est pas un équilibre de Nash : le joueur 1 a intérêt à dévier pour recevoir 2 à la place de – 1. (1,0) n'est pas un équilibre de Nash : le joueur 2 a intérêt à dévier pour recevoir 1 à la place de 0.
2. On note p, la probabilité que le gouvernement aide et choisie par lui. On note q, la probabilité que l'étudiant bloque et choisie par lui.
L'espérance de gain du gouvernement est :

$$\mu_G(p,q) = p \times (1-q) \times 2 + p \times q \times (-2) + (1-p) \times (1-q) \times (-1) + (1-p) \times q \times 1$$
$$\mu_G(p,q) = 2p - 2pq - 2pq - 1 + p + q - pq + q - pq = 3p(1-2q) - 1 + 2q$$

L'espérance de gain de l'étudiant est :

$$\mu_E(p,q) = p \times (1-q) \times 2 + p \times q \times 3 + (1-p) \times (1-q) \times 1 + (1-p) \times q \times 0$$
$$\mu_E(p,q) = 2p - 2pq + 3pq + 1 - p - q + pq = q(2p-1) + 1 + p$$

À partir des gains espérés, nous pouvons déterminer les fonctions de meilleures réponses des deux joueurs.
La fonction de meilleure réponse du gouvernement aux décisions de l'étudiant est :

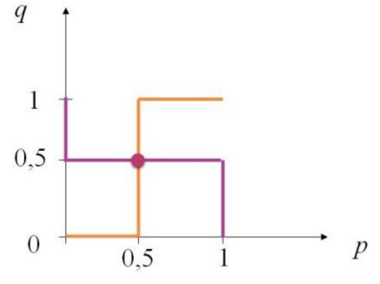
$$\begin{cases} p = 0 & \text{si } 1 - 2q < 0 \quad \text{soit } q > \dfrac{1}{2} \\ p \in [0,1] & \text{si } 1 - 2q = 0 \quad \text{soit } q = \dfrac{1}{2} \\ p = 1 & \text{si } 1 - 2q > 0 \quad \text{soit } q < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La fonction de meilleure réponse de l'étudiant aux décisions du gouvernement est :

$$\begin{cases} q = 0 & \text{si } 2p - 1 < 0 \quad \text{soit } p < \dfrac{1}{2} \\ q \in [0,1] & \text{si } 2p - 1 = 0 \quad \text{soit } p = \dfrac{1}{2} \\ q = 1 & \text{si } 2p - 1 > 0 \quad \text{soit } p > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- $p = 0$ si $q > 0{,}5$ et $q > 0{,}5$ choisie par l'étudiant si $p \geq 0{,}5$: impossible
- $p = 1$ si $q < 0{,}5$ et $q < 0{,}5$ choisie par l'étudiant choisira $p \leq 0{,}5$: impossible
- $p \in [0,1]$ si $q = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$ choisie par l'étudiant choisira $p = 0{,}5$: seule solution possible $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$.

3.



EXERCICE 8 JEU SOUS FORME EXTENSIVE

1. ((b, f), d) : résultat (5 ; 2)
2. ((a, (e, f)),d) : résultat (4 ; 4)
3. ((a, f), d) : résultat (4 ; 4)
4. ((a, e), d) : résultat (4 ; 4)

EXERCICE 9 SUJET D'EXAMEN – L2 ÉCONOMIE-GESTION UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE, JUIN 2013

1. Voir les définitions données dans le manuel.
2. (C, F, T) est l'unique équilibre de Nash. Ce n'est pas un équilibre en stratégies dominantes car seul le joueur 3 a une stratégie dominante (T). Il n'y a pas d'équilibre en stratégies dominantes dans ce jeu.

CHAPITRE 11
OLIGOPOLE

QCM

1 a. **2** b. **3** c. **4** d. **5** c.

EXERCICE 6 OLIGOPOLE À LA COURNOT

1. Pour déterminer les fonctions de réaction des deux entreprises, nous devons résoudre le programme des deux firmes et déterminer la quantité optimale (décision de la firme) en fonction de la quantité de la concurrente.

Le programme de la firme B s'écrit :

$$\max_{y_B} \pi_B = [8 - (y_S + y_B)] \times y_B - \frac{1}{2} {y_B}^2 = -\frac{3}{2} y_B^2 + [8 - y_S] \times y_B$$

et la condition d'optimalité est obtenue en dérivant le profit par rapport à y_B :

$$-3y_B + [8 - y_S] = 0$$

Nous pouvons en déduire la fonction de réaction de la firme B par rapport à la décision, y_S, de la firme S : $y_B = MR_B(y_S) = \frac{1}{3}(8 - y_S)$.

Le programme de la firme S s'écrit :

$$\max_{y_S} \pi_S = [8 - (y_S + y_B)] \times y_S - \frac{1}{4} {y_S}^2 = -\frac{5}{4} y_S^2 + [8 - y_B] \times y_S$$

et la condition d'optimalité est obtenue en dérivant le profit par rapport à y_S :

$$-\frac{5}{2} y_S + [8 - y_B] = 0$$

Nous pouvons en déduire la fonction de réaction de la firme S par rapport à la décision, y_B, de la firme B : $y_S = MR_S(y_B) = \frac{2}{5}(8 - y_B)$.

2. Pour déterminer l'équilibre, il faut résoudre le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} y_B = MR_B(y_S) = \dfrac{1}{3}(8 - y_S) \\ y_S = MR_S(y_B) = \dfrac{2}{5}(8 - y_B) \end{cases}$$

La solution de ce système est $\left({y_B}^C = \frac{24}{13}, {y_S}^C = \frac{32}{13}\right)$.

La quantité totale vendue est $y^C = {y_B}^C + {y_S}^C = \frac{56}{13}$.

Le prix est $p^C = 8 - \frac{56}{13} = \frac{48}{13}$.

Les profits sont $\pi_B = \frac{48}{13} \times \frac{24}{13} - \frac{1}{2}\left(\frac{24}{13}\right)^2 = \frac{24}{13} \times \frac{36}{13} = \frac{864}{169}$ et $\pi_S = \frac{48}{13} \times \frac{32}{13} - \frac{1}{4}\left(\frac{32}{13}\right)^2 = \frac{32}{13} \times \frac{40}{13} = \frac{1280}{169}$.

3. Voir figure 11.1 page 262.

4. Le surplus des consommateurs est $S^c(y^C) = \frac{(8 - p^C) \times q^C}{2} = \frac{\frac{56}{13} \times \frac{56}{13}}{2} = \frac{1568}{169}$ et le surplus collectif $(y^C) = S^c(y^C) + \pi_B + \pi_S = \frac{3712}{169}$.

EXERCICE 7 OLIGOPOLE À LA STACKELBERG

1. La firme S connaît la décision de la firme B, y_B, et va chercher à maximiser son profit étant donné cette information.

Le profit de la firme S est $\pi_S = [8 - (y_S + y_B)] \times y_S - \frac{1}{4} {y_S}^2$.

Nous pouvons en déduire, comme dans l'exercice précédent, la fonction de réaction de la firme S par rapport à la décision, y_B, de la firme B : $y_S = MR_S(y_B) = \frac{2}{5}(8 - y_B)$.
La firme B sait que la firme S va réagir en fonction de sa décision y_B, et va mettre sur le marché une quantité $y_S = MR_S(y_B) = \frac{2}{5}(8 - y_B)$. Elle va donc utiliser cette information pour déterminer la quantité qui maximise son profit :

$$\max_{y_B} \pi_B = [8 - (y_S + y_B)] \times y_B - \frac{1}{2}{y_B}^2$$
$$s.c.\ y_S = MR_S(y_B) = \frac{2}{5}(8 - y_B)$$

Soit $\max_{y_B} \pi_B = \left[8 - \left(\frac{2}{5}(8 - y_B) + y_B\right)\right] \times y_B - \frac{1}{2}{y_B}^2$.
Le programme de la firme leader devient :

$$\max_{y_B} \pi_B = \frac{24}{5} \times y_B - \frac{11}{10} y_B^2$$

La condition d'optimalité pour la firme A est alors :

$$\frac{24}{5} - \frac{11}{5} \times y_B = 0 \Leftrightarrow y_B^S = \frac{24}{11}$$

Nous pouvons en déduire la décision de la firme S à partir de sa fonction de réaction :
$y_S^S = \frac{2}{5}\left(8 - \frac{24}{11}\right) = \frac{128}{55}$.
Le prix d'équilibre est $p^S = \frac{192}{55}$.
Les profits sont $\pi_B = \frac{192}{55} \times \frac{24}{11} - \frac{1}{2}\left(\frac{24}{11}\right)^2 = \frac{288}{55}$ et $\pi_S = \frac{192}{55} \times \frac{128}{55} - \frac{1}{4}\left(\frac{128}{55}\right)^2 = \frac{4096}{605}$.
2. Voir figure 11.5 page 267.
3. La quantité totale est $y^S = y_B^S + y_S^S = \frac{24}{11} + \frac{128}{55} = \frac{248}{55}$.
Le surplus des consommateurs est $S^c(q^S) = \frac{\left(8 - \frac{192}{55}\right) \times \frac{248}{55}}{2} = \frac{30752}{3025}$ et le surplus collectif $(y^S) = S^c(y^S) + \pi_B + \pi_S = \frac{30752}{3025} + \frac{288}{55} + \frac{4096}{605} = \frac{32}{55} \times \left(\frac{2096}{55}\right)$.
4. $S(y^S) - S(y^C) = \frac{32}{55} \times \left(\frac{2096}{55}\right) - \frac{3712}{169} > 0$.

EXERCICE 8 CONCURRENCE ET PRIX ET CAPACITÉ DE PRODUCTION.

1. Les firmes se font concurrence en prix et les capacités de production sont illimitées.
a. La demande totale s'écrit $D(p) = 10 - p$.
Les firmes étant identiques pour les consommateurs et il semble naturel de supposer qu'elles se partagent la demande à part égale :

$$D_j(p_j, p_{-j}) = \begin{cases} 10 - p_j & \text{si } p_j < p_{-j} \\ \dfrac{10 - p}{2} & \text{si } p_j = p_{-j} = p \\ 0 & \text{si } p_j > p_{-j} \end{cases}$$

b. Le prix d'équilibre est : $p^B = 7$ (ici le prix du monopole est inférieur au coût marginal de la firme Aamusik).
La quantité d'équilibre est 3, quantité partagée par les deux firmes.
Les profits des firmes sont $\pi_A = \frac{3}{2} \times (7 - 7) = 0$ et $\pi_B = \frac{3}{2} \times (7 - 6) = \frac{3}{2}$.
2. Les capacités de production des firmes sont limitées chacune à 2.
a. La quantité que la firme BimusiK souhaite vendre est de 2 faisant un profit $\pi_B = 2 \times (7 - 6) = 2$. La demande résiduelle à la firme Aamusik sera donc de $10 - p - 2 = 8 - p$.
b. Aamusik a intérêt à fixer un prix qui maximise son profit sur la demande que lui a laissé sa concurrente.

$$\pi_A = (8 - p) \times (p - 7)$$

Le prix optimal pour Aamusik est $p = \frac{15}{2} > 7$.

c. Le profit de BimusiK est de 2 et celui de Aamusik est de $\frac{1}{4} > 0$.

d. Le comportement de Bimusik est optimal.

EXERCICE 9 DÉCISION D'UN CARTEL

1. Le programme de la firme P s'écrit :

$$\max_{y_P} \pi_P = [16 - (y_S + y_P)] \times y_P - 4y_P$$

et la condition d'optimalité est obtenue en dérivant le profit par rapport à y_P :

$$-2y_P + [12 - y_S] = 0$$

Nous pouvons en déduire la fonction de réaction de la firme P par rapport à la décision, y_S, de la firme S : $y_P = MR_P(y_S) = \frac{1}{2}(12 - y_S)$.

Le programme de la firme S s'écrit :

$$\max_{y_S} \pi_S = [16 - (y_S + y_P)] \times y_S - \frac{1}{2}{y_S}^2$$

et la condition d'optimalité est obtenue en dérivant le profit par rapport à y_S :

$$-3y_S + [16 - y_P] = 0$$

Nous pouvons en déduire la fonction de réaction de la firme S par rapport à la décision, y_P, de la firme P : $y_S = MR_S(y_P) = \frac{1}{3}(16 - y_P)$.

Pour déterminer l'équilibre, il faut résoudre le système à deux équations et deux inconnues suivant.

$$\begin{cases} y_P = MR_P(y_S) = \dfrac{1}{2}(12 - y_S). \\ y_S = MR_S(y_P) = \dfrac{1}{3}(16 - y_P) \end{cases}$$

La solution de ce système est $({y_P}^C = 4, {y_S}^C = 4)$.

La quantité totale vendue est $y = 8$.

Le prix est $p^C = 16 - 8 = 8$.

Les profits sont $\pi_P = 16$ et $\pi_S = 24$.

2. Les firmes décident de former un cartel, visant à maximiser le profit total. Le programme du cartel s'écrit :

$$\max_{y_S, y_P} [16 - (y_S + y_P)] \times (y_S + y_P) - 4y_P - \frac{1}{2}{y_S}^2$$

Les conditions d'optimalité sont :

$\begin{cases} 16 - y_S - y_P - y_S - y_P - 4 = 0 \\ 16 - y_S - y_P - y_S - y_P - y_S = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 6 - y_S - y_P = 0 \\ 16 - 3y_S - 2y_P = 0 \end{cases}$

On obtient : $y_S = 4$; $y_P = 2$.

Le prix vaut 10.

3. Les profits individuels du cartel sont $\pi_P = 12 < 16$ et $\pi_S = 32 > 24$.

La firme Pepsoda a intérêt à dévier et à proposer la quantité de Cournot. Le cartel n'est pas stable.

EXERCICE 10 SUJET D'EXAMEN – L2 MICROÉCONOMIE UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE (2013)

Le laboratoire pharmaceutique Pharma dispose, suite au dépôt d'un brevet, d'une situation de monopole sur le marché du Riathol en Lorien. Ses coûts de production sont donnés par la fonction : $CT_{PH}(Q) = 2Q^2 - 4Q$.

La demande totale de Riathol dans ce pays est représentée par la fonction : $Q = 6 - \frac{1}{2}p$.

1. La fonction de demande inverse s'écrit : $p = 12 - 2Q$.

Pharma se comporte comme un monopole. Sa fonction de profit est donnée par :

$\pi_{PH}(Q) = (12-2Q)Q - 2Q^2 + 4Q$

Il est maximum si : $\frac{\partial \pi}{\partial Q} = -2Q + 12 - 2Q - 4Q + 4 = 0$, c'est-à-dire si : $16 - 8Q = 0$.

Il en résulte que : $Q^M = 2$, $p^M = 8$ et $\pi_{PH}(Q^M) = 2 \times 8 - 2 \times 2^2 + 4 \times 2 = 16$.

Le surplus des consommateurs s'élève à : $S_C^M = \frac{(12-8) \times 2}{2} = 4$ et le surplus total à : $S_T^M = 4 + 16 = 20$.

Déterminons tout d'abord les fonctions de réaction des deux entreprises.

La fonction de profit de Pharma s'écrit :

$$\pi_{PH}(Q_{PH}, Q_{SP}) = 12 - 2(Q_{PH} + Q_{SP})Q_{PH} - 2Q_{PH}^2 + 4Q_{PH}$$

Celle-ci admet un maximum si : $\frac{\partial \pi_{PH}}{\partial Q_{PH}} = 0$ soit : $-2Q_{PH} + 12 - 2Q_{PH} - 2Q_{SP} - 4Q_{PH} + 4 = 0$.

En réaménageant les termes, nous obtenons : $16 - 8Q_{PH} - 2Q_{SP} = 0$.

La fonction de réaction de l'entreprise Pharma est donc : $Q_{PH} = 2 - \frac{1}{4}Q_{SP}$

La fonction de profit de Santé-Plus s'écrit :

$\pi_{SP}(Q_{PH}, Q_{SP}) = (12 - 2(Q_{PH} + Q_{SP})Q_{SP} - 2Q_{SP}^2 + 4Q_{SP} - 8$

Celle-ci admet un maximum si : $\frac{\partial \pi_{PH}}{\partial Q_{PH}} = 0$ soit : $-2Q_{SP} + 12 - 2Q_{PH} - 2Q_{SP} - 4Q_{SP} + 4 = 0$.

En réaménageant les termes, nous obtenons : $16 - 8Q_{SP} - 2Q_{PH} = 0$.

La fonction de réaction de l'entreprise Pharma est donc : $Q_{SP} = 2 - \frac{1}{4}Q_{PH}$.

2. Scénario 1 : le duopole de Stackelberg

a. Pharma est leader. Elle intègre donc dans sa fonction de profit la fonction de réaction de Santé-Plus, ce qui donne successivement :

$\pi_{PH}(Q_{PH}) = (12 - 2(Q_{PH} + 2 - \frac{1}{4}Q_{PH}))Q_{PH} - 2Q_{PH}^2 + 4Q_{PH}$

$\pi_{PH}(Q_{PH}) = (8 - \frac{3}{2}Q_{PH})Q_{PH} - 2Q_{PH}^2 + 4Q_{PH}$

Celle-ci admet un maximum si : $\frac{\partial \pi_{PH}}{\partial Q_{PH}} = 0$ soit $-\frac{3}{2}Q_{PH} + 8 - \frac{3}{2}Q_{PH} - 4Q_{PH} + 4 = 0$.

En réaménageant les termes nous obtenons : $12 - 7Q_{PH} = 0$.

Finalement $Q_{*PPH}^{S} = \frac{12}{7}$.

Par la fonction de réaction de l'entreprise Santé-Plus, nous obtenons :

$$Q_{SP} = 2 - \frac{1}{4} \times \frac{12}{7} \text{ et donc } Q^{S}_{\underset{*}{SSP}} = \frac{11}{7}.$$

b. La quantité totale de Riathol qui serait mise sur le marché s'élèverait à $Q^S = \frac{23}{7}$ au prix de

$$p^S = 12 - 2\frac{23}{7} = \frac{38}{7}.$$

Les profits des deux entreprises s'élèvent à :

$$\pi^S_{PH} = \frac{12}{7} \times \frac{38}{7} - 2 \times \left(\frac{12}{7}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{12}{7}\right) = \frac{456}{49} - \frac{288}{49} + \frac{336}{49} = \frac{504}{49} \approx 10{,}28$$

$$\pi^S_{SSP} = \frac{11}{7} \times \frac{38}{7} - 2 \times \left(\frac{11}{7}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{11}{7}\right) - 4 = \frac{418}{49} - \frac{242}{49} + \frac{308}{49} - \frac{196}{49} = \frac{288}{49} \approx 5{,}87$$

c. Le surplus des consommateurs se monte à :

$$S^S_C = \frac{(12 - \frac{38}{7}) \times \frac{23}{7}}{2} = \frac{(\frac{84}{7} - \frac{38}{7}) \times \frac{23}{7}}{2} = \frac{46}{7} \times \frac{23}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{529}{49} \approx 10{,}8$$

Et le surplus collectif à : $S^S_T = \frac{529}{49} + \frac{504}{49} + \frac{288}{49} + 4 = \frac{1517}{49} \approx 30{,}95$.

3. Scénario 2 : le duopole de Cournot

a. Il n'y a aucun leader. Chacune des entreprises réagit à la décision de l'autre. Aussi les quantités d'équilibre vérifient le système de deux équations à deux inconnues constitué des deux fonctions de réaction, soit :

$$\begin{cases} Q_{PH} = 2 - \frac{1}{4} Q_{SP} \\ Q_{SP} = 2 - \frac{1}{4} Q_{PH} \end{cases} \text{ Nous en déduisons : } \begin{cases} Q^C_{PH} = \frac{8}{5} \\ Q^C_{SP} = \frac{8}{5} \end{cases}$$

b. Donc $Q^C = \frac{16}{5}$ et $p^C = 12 - 2 \times \frac{16}{5} = \frac{28}{5}$.

Les profits des deux entreprises s'élèvent à :

$$\pi^C_{PH} = \frac{8}{5} \times \frac{28}{5} - 2 \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{8}{5}\right) = \frac{224}{25} - \frac{128}{25} + \frac{160}{25} = \frac{256}{25} \approx 10{,}24$$

$$\pi^C_{SP} = \frac{8}{5} \times \frac{28}{5} - 2 \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{8}{5}\right) - 4 = \frac{224}{25} - \frac{128}{25} + \frac{160}{25} - \frac{100}{25} = \frac{156}{25} \approx 6{,}24$$

c. Le surplus des consommateurs s'élève à :

$$S^C_C = \frac{(12 - \frac{28}{5}) \times \frac{16}{5}}{2} = \frac{(\frac{60}{5} - \frac{28}{5}) \times \frac{16}{5}}{2} = \frac{32}{5} \times \frac{16}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{256}{25} \approx 10{,}24$$

Et le surplus collectif à : $\frac{256}{25}+\frac{256}{25}+\frac{156}{25}+4=\frac{768}{25}\approx 30,72$

4. La fonction de profit du cartel s'écrit :

$$\pi(Q_{PH},Q_{SP})=(12-2(Q_{PH}+Q_{SP}))(Q_{PH}+Q_{SP})-2Q_{PH}^2+4Q_{PH}-2Q_{SP}^2+4Q_{SP}-4$$

Elle admet un maximum si :

$$\begin{cases}\frac{\partial\pi}{\partial Q_{PH}}=0\\ \frac{\partial\pi}{\partial Q_{SP}}=0\end{cases} \text{ c'est-à-dire si : } \begin{cases}-2(Q_{PH}+Q_{SP})+12-2(Q_{PH}+Q_{SP})-4Q_{PH}+4=0\\ -2(Q_{PH}+Q_{SP})+12-2(Q_{PH}+Q_{SP})-4Q_{SP}+4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}16-8Q_{PH}-4Q_{SP}=0\\ 16-4Q_{PH}-8Q_{SP}=0\end{cases}$$

a. Finalement, nous obtenons : $\begin{cases}Q_{PH}^{CA}=\frac{4}{3}\\ Q_{SP}^{Ca}=\frac{4}{3}\end{cases}$

b. et $p^{Ca}=12-2(\frac{4}{3}+\frac{4}{3})=\frac{20}{3}$

$$\begin{cases}\pi_{PH}^{Ca}(Q_{PH},Q_{SP})=\frac{20}{3}\times\frac{4}{3}-2\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\times\frac{4}{3}=\frac{80}{9}-\frac{32}{9}+\frac{48}{9}=\frac{96}{9}\approx 10,67\\ \pi_{SP}^{Ca}(Q_{PH},Q_{SP})=\frac{20}{3}\times\frac{4}{3}-2\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\times\frac{4}{3}-4=\frac{80}{9}-\frac{32}{9}+\frac{48}{9}-\frac{36}{9}=\frac{60}{9}\approx 6,67\end{cases}$$

d. Le surplus des consommateurs se monte à :

$$S_C^{Ca}=\frac{\left(12-\frac{20}{3}\right)\times\frac{8}{3}}{2}=\frac{\frac{16}{3}\times\frac{8}{3}}{2}=\frac{16}{3}\times\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{64}{9}=7,11$$

Et le surplus collectif à :

$$S_T^{Ca}=\frac{64}{9}+\frac{96}{9}+\frac{60}{9}+4=\frac{256}{9}\approx 28,44$$

e. Le surplus collectif, si le cartel est constitué est proche de celui qui prévaut dans une situation de concurrence entre les deux entreprises. Cependant cela se fait au détriment des consommateurs et au profit de Santé Plus. Les autorités publiques s'opposeront probablement à la constitution du cartel.

CHAPITRE 12
DIFFÉRENCIATION DES PRODUITS

QCM

1 Vrai **2** Vrai **3** Vrai **4** Vrai **5** Faux **6** Faux

EXERCICE 7 DIFFÉRENCIATION VERTICALE SUR LE MARCHÉ DES CLÉS USB

Les données du problème : $s \in [2,\ 32]$, $\theta \in [0,\ 1]$ et la distribution de θ est uniforme, $u(\theta, s, p) = \theta s - p$.

Notons A la firme Princetone et B, la firme Queenstone.

Dans cet exercice, nous utiliserons les résultats de la section 4 du chapitre. La seule différence est que les coûts de production des deux firmes sont ici différents.

1. $s_A = 8,\ s_B = 16,\ c_A = 1,\ c_B = 2$. Notons p_A et p_B les prix respectivement de la firme Princetone et Queenstone.

   Nous devons déterminer, en suivant la démarche de la section 4 :

   (a) la demande qui s'adresse à chacune des deux firmes ;

   (b) le profit de chacune des firmes ;

   (c) les fonctions de meilleure réponse ;

   (d) les prix d'équilibre.

a. Un consommateur de paramètre θ_0 choisit la firme A si $u(\theta_0, s_A, p_A) > u(\theta_0, s_B, p_B)$ ce qui est vrai pour $\theta_0 < \dfrac{p_B - p_A}{\Delta s}$ avec $\Delta s = 8$.

Les fonctions de demande s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} y_A(p_A, p_B) &= \frac{p_B - p_A}{\Delta s} - \underline{\theta} \\ y_B(p_A, p_B) &= \overline{\theta} - \frac{p_B - p_A}{\Delta s} \end{aligned}$$

ce qui, avec les paramètres du modèle, donne :

$$\begin{aligned} y_A(p_A, p_B) &= \frac{p_B - p_A}{8} \\ y_B(p_A, p_B) &= 1 - \frac{p_B - p_A}{8} \end{aligned}$$

b. Les profits des deux firmes s'écrivent

$$\pi_A(p_A, p_B) = (p_A - c_A)\left(\frac{p_B - p_A}{\Delta s} - \underline{\theta}\right)$$
$$\pi_B(p_A, p_B) = (p_B - c_B)\left(\overline{\theta} - \frac{p_B - p_A}{\Delta s}\right)$$

ce qui, avec les paramètres du modèle, donne :

$$\pi_A(p_A, p_B) = (p_A - 1)\frac{p_B - p_A}{8}$$
$$\pi_B(p_A, p_B) = (p_B - 2)\left(1 - \frac{p_B - p_A}{8}\right)$$

c. Pour déterminer les fonctions de meilleures réponses, il faut résoudre:

$$\max_{p_A} \pi_A(p_A, p_B) \text{ et } \max_{p_B} \pi_B(p_A, p_B)$$

ce qui donne les fonctions de meilleure réponse suivantes :

$$p_A = \frac{1}{2}\left[c_A + p_B - \underline{\theta}\Delta s\right]$$
$$p_B = \frac{1}{2}\left[c_B + p_A + \overline{\theta}\Delta s\right]$$

Avec les paramètres du modèle,

$$p_A = \frac{1}{2}\left[p_B + 1\right]$$
$$p_B = \frac{1}{2}\left[p_A + 10\right]$$

d. En résolvant le système d'équations ci dessus, nous obtenons,

$$p_A = 4 \text{ et } p_B = 7$$

2. Pour répondre à cette question, il suffit de remplacer $p_A = 4$ et $p_B = 7$ dans (1). Nous obtenons :

$$\pi_A(4,7) = \frac{9}{8} \quad \text{et} \quad \pi_B(4,7) = \frac{25}{8}$$

La firme qui produit le bien de meilleure qualité obtient un profit plus élevé, même si ici les coûts de production sont différents.

3. D'après les résultats de la section 4.3., les qualités choisies seront les qualités extrêmes : $s_A^* = 2$ et $s_B^* = 32$.

Si le prix de production est de $c(2)$ pour la clé USB de puissance 2, et de $c(32)$ pour la clé USB de puissance 32. En reprenant les fonctions de meilleure réponse de (2), et en résolvant le système pour des valeurs de c_A et c_B quelconques, nous obtenons :

$$p_A = 10 + \frac{2c(2) + c(32)}{3}$$
$$p_B = 20 + \frac{c(2) + 2c(32)}{3}$$

Il est facile de vérifier que pour tous $c(2)$ et $c(32)$, on a $p_B > p_A$.

EXERCICE 8 CONCURRENCE SPATIALE

On note $Ct(x,i),\ i = GB,\ GL$ le coût pour un client, situé en x si il va manger au restaurant i.
$Ct(x,GB) = p_{GB} + x,\ Ct(x,GL) = p_{GL} + D(1-x)$

1. $\widehat{x}$ vérifie $Ct(\widehat{x},GB) = Ct(\widehat{x},GL)$ ce qui donne $\widehat{x} = \frac{p_{GL}-p_{GB}+D}{1+D}$

   A cause des hypothèses sur p_{GL}, p_{GB} et D, on a bien $\widehat{x} > 0$ et $\widehat{x} < 1$.

2. Si $p_{GL} = p_{GB}$, $\widehat{x} = \frac{D}{1+D} = 1 - \frac{1}{1+D}$. Si $D = +\infty$, tous les consommateurs iront au Grand Bleu.

EXERCICE 9 CONCURRENCE MONOPOLISTIQUE

Dans cet exercice, nous utiliserons les résultats de la section 5 du chapitre. Une particularité de cet exercice est que le prix moyen n'inclut pas le prix de la firme considérée. Si toutes les firmes proposent le même prix, la demande qui s'adresse à la firme est indépendante de son prix.

1. Si $M = 1$, on a $y^d(p) = 200\,[1 - \gamma p]$
2. Le paramètre γ mesure la sensibilité de la demande qui s'adresse à l'entreprise au prix de ses concurrentes. On a en effet $\dfrac{\partial y^d(p)}{\partial \overline{p}} = 200\gamma$. C'est une mesure de la différenciation des produits sur ce marché. Plus γ est grand, plus les produits proposés par les différentes firmes sont proches et une augmentation de $\overline{p}$ augmente la demande qui s'adresse à la firme considérée.
3. $M = 5$. Nous devons déterminer :

   (a) le prix $p^1(\overline{p})$ qui maximise le profit de la firme considérée en considérant comme donnés les prix des concurrentes ;

   (b) le prix d'équilibre de court terme (où le nombre de firmes est fixé) p^{*ct} .

a. Le prix $p^1(\overline{p})$ est associé à la quantité y^d qui égalise le coût marginal et la recette marginale de la firme.

$$RT(y^d) = y^d \left[\overline{p} + \left(\frac{1}{M} - \frac{y^d}{200}\right)\frac{1}{\gamma}\right]$$

$$Rm(y^d) = Cm(y^d)$$

Pour trouver y^d il faut donc résoudre l'équation :

$$\frac{1}{M\gamma} + \overline{p} - \frac{y^d}{100\gamma} = 4$$

La solution est :

$$y^d = \frac{100}{M} + 100\gamma\overline{p} - 400\gamma$$

$p^1(\overline{p})$ est obtenu en remplacant y^d trouvé ci-dessus dans la fonction de demande inverse :

$$p^1(\overline{p}) = \frac{1}{M\gamma} + \frac{\overline{p}}{2} + 2$$

et pour $M = 5$,

$$p^1(\overline{p}) = \frac{1}{5\gamma} + \frac{\overline{p}}{2} + 2$$

b. D'après la définition 2 de la section 5.1., p^{*ct} est solution de :

$$p^{*ct} = \frac{1}{5\gamma} + \frac{p^{*ct}}{2} + 2$$

et donc

$$p^{*ct} = \frac{2}{5\gamma} + 4$$

Si $\gamma = 1$, on a $p^{*ct} = \frac{22}{5}$.

4. Pour calculer le profit de court terme, il faut d'abord calculer la demande qui s'adresse à l'entreprise si toutes ses concurrentes proposent le même prix p^{*ct} à partir de la formule $y^d(p) = 200\left[\frac{1}{M} - \gamma(p - \overline{p})\right]$, ce qui donne $y^d(p^{*ct}) = \dfrac{200}{5} = 40$.

$$\pi^{ct} = p^{*ct} \times y^d(p^{*ct}) - C(y^d(p^{*ct})) = \frac{16}{\gamma} - 20$$

5. Pour déterminer le nombre d'entreprises à long trerme, il faut calculer le profit d'une entreprise pour un nombre quelconque d'entreprises sur le marché. A long terme, des entreprises vont rentrer (ou sortir) jusqu'à annulation du profit.

$$\pi^{ct}(M) = \frac{200}{M}\left(\frac{2}{M\gamma} + 4\right) - 20 - 4\frac{200}{M} = \frac{400}{M^2\gamma} - 20$$

Le nombre d'entreprises à long terme est celui qui annule le profit ci dessus.

$$M^{lt} : \pi^{ct}(M^{lt}) = 0 \Longleftrightarrow M^{lt} = \sqrt{\frac{20}{\gamma}}$$

6. $M^{lt}(1) = \sqrt{20} = 4,47$, donc inférieur à 5.

7. Pour $\gamma = 2$, à court terme pour 5 entreprises, $p^{*ct} = 4,2$, $\pi^{ct} = p^{*ct} \times y^d(p^{*ct}) - C(y^d(p^{*ct})) = -12$.

A long terme, $M^{lt} = \sqrt{10} = 3,16$.

8. Lorsque γ augmente, la concurrence entre les firmes se renforce car leurs produits deviennent plus proches (voir 2.). A nombre de firmes donné, le profit à court terme d'une firme diminue. A long terme, le nombre de firmes sur le marché diminue lorsque γ augmente.

CHAPITRE 13
EXTERNALITÉS ET BIEN PUBLICS

QCM

1 c. **2** a. **3** c. **4** d. **5** d. **6** Vrai **7** Faux

EXERCICE 8 EXTERNALITÉ NÉGATIVE DE PRODUCTION

On normalise le salaire, w, à 1 et on notera p, le prix du bien 1 et q, le prix du bien 2.
1. Commençons par les firmes.
Le programme de la firme 1 est :

$$\max_{y_1,L_1} py_1 - L_1$$
$$\text{s.c.} \quad y_1 = \sqrt{L_1}$$

La solution est : $y_1 = \frac{p}{2}$ et $L_1 = \frac{p^2}{4}$. Le profit est $\pi_1 = \frac{p^2}{4}$.
Le programme de la firme 2 est :

$$\max_{y_2,L_2} qy_2 - L_2$$
$$\text{s.c.} \quad y_2 = L_2 - \lambda y_1$$

La seule solution possible est : $q = 1$ et $y_2 = L_2 - \lambda y_1$ avec L_2 quelconque dans $]0,1[$. Le profit est $\pi_2 = -\lambda y_1 < 0$.
L'unique consommateur offre une unité de travail et reçoit un revenu de $w \times 1 = 1$ ici.
Il maximise son utilité étant donnée sa contrainte budgétaire :

$$\max_{x_1,x_2} x_1 + \frac{1}{2}\ln x_2$$
$$\text{s.c.} \quad px_1 + qx_2 = 1$$

La solution est : $x_2 = \frac{p}{2q}$ et $x_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$.
À l'équilibre, les marchés sont soldés :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ L_1 + L_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2q} = L_2 - \lambda y_1 \\ \frac{p^2}{4} + L_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + p - 2 = 0 \\ \frac{p}{2q} = 1 - \frac{p^2}{4} - \lambda\frac{p}{2} \\ L_2 = 1 - \frac{p^2}{4} \end{cases}$$

avec $q = 1$.
Prenons la première équation, on trouve $\hat{p} = 1$.
On utilise la deuxième équation avec $\hat{p} = 1$ et $q = 1$. Pour que le marché du bien 2 soit à l'équilibre, on doit avoir :

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} - \lambda\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

On trouve : $\hat{x}_1 = \hat{y}_1 = \hat{x}_2 = \hat{y}_2 = \frac{1}{2}$, $\hat{L}_1 = \frac{1}{4}$, $\hat{L}_2 = \frac{3}{4}$.
On posera par la suite $\lambda = \frac{1}{2}$.
2. Les optima de Pareto sont obtenus en maximisant le bien-être collectif étant données les contraintes technologiques et de ressources :

$$\max_{x_1,x_2,y_1,y_2,L_1,L_2} x_1 + \frac{1}{2}\ln x_2$$
$$\text{s.c.}\quad \begin{array}{c} y_1 = \sqrt{L_1} \\ y_2 = L_2 - \dfrac{1}{2}y_1 \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ L_1 + L_2 = 1 \end{array}$$

On en déduit que $x_1 = y_1 = \sqrt{L_1}$ et $x_2 = y_2 = L_2 - \frac{1}{2}y_1 = L_2 - \frac{1}{2}\sqrt{L_1}$.
Comme $L_1 + L_2 = 1$, on peut écrire x_1, x_2 comme des fonctions de L_1 :
$x_1 = \sqrt{L_1}$ et $x_2 = 1 - L_1 - \frac{1}{2}\sqrt{L_1}$.
Le programme se réécrit plus simplement :

$$\max_{L_1} \sqrt{L_1} + \frac{1}{2}\ln\left[1 - L_1 - \frac{1}{2}\sqrt{L_1}\right]$$

On obtient la condition d'optimalité suivante :

$$\frac{1}{2\sqrt{L_1}} + \frac{1}{2}\frac{-1 - \dfrac{1}{4\sqrt{L_1}}}{1 - L_1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{L_1}} = 0$$

soit

$$L_1 + \frac{3}{2}\sqrt{L_1} - \frac{3}{4} = 0$$

La seule solution est $L_1{}^* = \frac{3}{4}\left[5 - \sqrt{21}\right]$.
On obtient :
$x_1{}^* = y_1{}^* = \frac{\sqrt{21}-3}{4}$ et $x_2{}^* = y_2{}^* = \frac{5\sqrt{21}-29}{8}$.

3. Soit t, le taux de taxe.
Le programme de la firme 1 devient :

$$\max_{y_1,L_1} (p - t)y_1 - L_1$$
$$\text{s.c.}\quad y_1 = \sqrt{L_1}$$

La solution est : $y_1 = \frac{p-t}{2}$ et $L_1 = \frac{(p-t)^2}{4}$.
Le programme de la firme 2 et celui du consommateur restent inchangés.
À l'équilibre, on a :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ L_1 + L_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{p-t}{2} \\ \dfrac{p}{2} = L_2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{p-t}{2} \\ \dfrac{(p-t)^2}{4} + L_2 = 1 \end{cases}$$

On souhaite t tel que l'équilibre coïncide avec l'optimum :
$x_1{}^* = y_1{}^* = \frac{\sqrt{21}-3}{4}$ et $x_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = y_1 = \frac{p-t}{2}$.
On doit avoir : $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}-3}{4}$, soit $p = \frac{4}{\sqrt{21}-1}$ et $\frac{p-t}{2} = \frac{\sqrt{21}-3}{4}$ avec $p = \frac{4}{\sqrt{21}-1}$.
On trouve alors $t^* = \frac{2\sqrt{21}-8}{\sqrt{21}-1} \approx 0{,}325$.

4. Le profit des deux firmes est $\pi = py_1 - L_1 + qy_2 - L_2$.
Le programme joint est :

$$\max_{y_1,L_1,y_2,L_2} py_1 - L_1 + qy_2 - L_2$$
$$\text{s.c.}\quad y_1 = \sqrt{L_1}; y_2 = L_2 - \frac{1}{2}y_1$$

Soit :

$$\max_{L_1,L_2} p\sqrt{L_1} - L_1 + \ q\left(L_2 - \frac{1}{2}\sqrt{L_1}\right) - L_2$$

Les conditions d'optimalité sont :

$$\frac{p}{2\sqrt{L_1}} - 1 \ - \frac{q}{4\sqrt{L_1}} = 0$$
$$q = 1$$

On trouve alors $L_1 = \left(\frac{p}{2} - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}(2p-1)^2$ et $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2p-1)$.

EXERCICE 9 EXTERNALITÉ POSITIVE DE PRODUCTION

1. Déterminons tout d'abord les allocations réalisables de cette économie.
(i) La firme 1 produit du bien 1 en utilisant une quantité z_1 du facteur de production : $y_1 = z_1$
(ii) La firme 2 produit du bien 2 en utilisant une quantité z_2 du facteur de production : $y_2 = y_1 z_2$
(iii) Le facteur de production est disponible en quantité limitée : $z_1 + z_2 \leq \omega$.

$$y_1 = z_1$$
$$y_2 = y_1 z_2$$
$$z_1 + z_2 \leq \omega$$
$$y_1 \geq 0 \ , \ \ y_2 \geq 0$$

D'où,

$$y_1 + \frac{y_2}{y_1} \leq \omega$$
$$y_1 \geq 0 \ , \ \ y_2 \geq 0$$

Il y a un consommateur représentatif propriétaire du facteur de production. Il consomme les quantité y_1, y_2 de chacun des deux biens et : $U(y_1, y_2) = y_1 y_2$. Les consommations optimales vérifient :

$$\max_{y_1,y_2} y_1 y_2$$
$$s.c. y_1 + \frac{y_2}{y_1} \leq \omega$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

La contrainte est saturée et le programme peut s'écrire simplement (en supposant que y_1 et y_2 sont bien positifs) :

$$\max_{y_1} y_1^2(\omega - y_1) \tag{1}$$

La condition d'optimalité (condition du second ordre est vérifiée) pour une solution intérieure, y_1^*, est :

$$2y_1^*(\omega - y_1^*) - (y_1^*)^2 = 0 \tag{2}$$

On en déduit :

$$y_1^* = \frac{2}{3}\omega, y_2^* = \frac{2}{9}\omega^2.$$

2. On pose égal à 1 le prix du facteur de production et on note p_1 et p_2, les prix des biens 1 et 2.
(i) Déterminons la valeur du prix p_1 à l'équilibre. Le programme de l'entreprise 1 est :

$$\max_{y_1,z_1} \pi_1 = p_1 y_1 - z_1$$
$$s.c. \quad y_1 = z_1$$

En utilisant la contrainte technologique, le profit s'écrit $\pi_1 = (p_1 - 1)z_1$. La seule solution possible est $p_1 = 1$ (voir chapitre 4).

(ii) Montrons que l'on a nécessairement $p_2 = \frac{1}{y_1}$ à l'équilibre.
Le programme de l'entreprise 2 est :

$$\max_{y_2,z_2} \pi_2 = p_2 y_2 - z_2$$
$$s.c. \quad y_2 = a z_2$$

En utilisant la contrainte technologique, le profit s'écrit $\pi_2 = (ap_2 - 1)z_2$. La seule solution possible est $p_2 = \frac{1}{a}$. Or, à l'équilibre, on sait que $a = y_1$. On en déduit que nécessairement, $p_2 = \frac{1}{y_1}$.

3. Déterminons l'équilibre concurrentiel de cette économie.

(i) Consommateurs :
Le programme de l'unique consommateur est :

$$\max_{x_1,x_2} x_1 x_2$$
$$s.c. p_1 x_1 + p_2 x_2 = \omega$$

On en déduit les demandes de bien 1 et bien 2 : $x_1^d = \frac{\omega}{2p_1}, x_2^d = \frac{\omega}{2p_2}$.

(ii) Firmes :
D'après la question 2, on a $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{y_1}$.

(iii) Equilibre sur les marchés :

$$x_1 = y_1 \Leftrightarrow \frac{\omega}{2p_1} = y_1$$
$$x_2 = y_2 \Leftrightarrow \frac{\omega}{2p_2} = y_2$$

avec $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{y_1}$.

$$\Rightarrow \widehat{y}_1 = \widehat{x}_1 = \frac{\omega}{2p_1} = \frac{\omega}{2}$$

et

$$\widehat{y}_2 = \widehat{x}_2 = \frac{\omega}{2p_2} = \frac{\widehat{y}_1 \omega}{2} = \frac{\omega^2}{4}$$

4. On propose de taxer le bien 2. Le prix à la consommation devient $q_2 = p_2 + t$ où t est la taxe unitaire. Les recettes fiscales sont distribuées au consommateur sous forme de transfert forfaitaire, T. Déterminons le niveau de taxe optimal.

On reprend les conditions (i) et (ii) de la question 3. en considérant le nouveau prix, q_2 pour le bien 2 et le supplément de revenu, T, pour le consommateur :

(i) Consommateur : les nouvelles demandes de bien 1 et bien 2 sont :

$$x_1^d = \frac{\omega + T}{2p_1}, x_2^d = \frac{\omega + T}{2q_2}.$$

(ii) Firmes : $p_1 = 1$ et $p_2 = \dfrac{1}{y_1}$.

(iii) L'équilibre sur les marchés vérifie maintenant :

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 &\Leftrightarrow \frac{\omega + T}{2p_1} = y_1 \\ x_2 = y_2 &\Leftrightarrow \frac{\omega + T}{2(p_2 + t)} = y_2 \end{aligned}$$

avec $x_1 = y_1 = y_1^* = \dfrac{2}{3}\omega$, $x_2 = y_2 = y_2^* = \dfrac{2}{9}\omega^2$, $p_1 = 1$, $p_2 = \dfrac{1}{y_1^*}$ et $T = ty_2^*$.

On en déduit :

$$\frac{\omega + t \times \frac{2}{9}\omega^2}{2} = \frac{2}{3}\omega \Leftrightarrow t^* = \frac{3}{2\omega}$$

EXERCICE 10 FINANCEMENT D'UN BIEN PUBLIC, PRÉFÉRENCES DIFFÉRENTES ET REVENUS IDENTIQUES

1. Caractérisons les optima de Pareto.

L'ensemble des allocations réalisables dans cette économie vérifient :
$t_i = R_i - x_i$ pour $i = 1, 2$ et $t_1 + t_2 = CT(y) = y$.
On en déduit que $y = R_1 - x_1 + R_2 - x_2$, soit :

$$y + x_1 + x_2 = 30$$

avec $y \geq, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Les optima de Pareto vérifient

(i) Condition BLS :

$$\sum_{i=1,2} \frac{\frac{\partial U_i}{\partial y}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{y}}{\frac{1}{\partial x_1}} + \frac{\frac{1}{y}}{\frac{2}{\partial x_2}} = 1 \Leftrightarrow 4x_1 + x_2 = 2y$$

(ii) Allocations réalisables : $y + x_1 + x_2 = 30$.

2. Déterminons l'optimum de Pareto avec des prélèvements identiques, c'est-à-dire $t_1 = t_2 = t$. Comme les revenus sont identiques, on a $x_1 = x_2 = x$ et les conditions (i) et (ii) deviennent : $y + 2x = 30$ et $5x = 2y$. On en déduit que :

$$x^* = 20/3, y^* = 50/3$$

3. Déterminons l'équilibre de Lindahl dans cette économie et montrons que c'est un optimum de Pareto.

Chaque consommateur *i* choisit une quantité de bien public y_i, au prix p_i qui maximise son utilité :

$$\max_{x_i, y_i} U_i(x_i, y_i)$$

$$s.c. x_i + p_i y_i = R_i$$

On obtient : $x_1 = \frac{R_1}{3}$, $y_1 = \frac{2R_1}{3p_1}$, $x_2 = \frac{2R_2}{3}$ et $y_2 = \frac{R_2}{3p_2}$.

A l'équilibre, nous devons avoir : $y = y_1 = y_2$ et $p_1 + p_2 = p = Cm(y) = 1$. On obtient alors : $p_1 = 2/3$ et $p_2 = 1/3$. On en déduit :

$$x_1 = 5, x_2 = 10, y = y_1 = y_2 = 15$$

On vérifie que ces valeurs vérifient bien les conditions d'optimalité (i) et (ii).

4. Déterminons l'équilibre de souscription.

Chaque consommateur *i* choisit une quantité de bien privé x_i et un niveau de contribution t_i qui maximisent son utilité :

$$\max_{x_i, t_i} U_i(x_i, y)$$

$$s.c. x_i + t_i = R_i$$

$$t_1 + t_2 = y$$

Soit

$$\max_{t_i} U_i(R_i - t_i, t_i + t_j)$$

On obtient : $t_1 = \frac{2R_1}{3} - \frac{t_2}{3}$, $t_2 = \frac{R_2}{3} - \frac{2t_1}{3}$ si $t_1 > 0$.

En résolvant ce système, on obtient : $t_1 = \frac{5R}{7}$, $t_2 = -\frac{R}{7} < 0$. Donc, la solution vérifie $t_2 = 0$ et $t_1 = \frac{5R}{7} = 10$.

A l'équilibre, on a : $y = 10$, $x_1 = 5$ et $x_2 = 15$. Ceci est bien une allocation réalisable mais ne vérifie pas la condition BLS.

EXERCICE 11 FINANCEMENT D'UN BIEN PUBLIC, PRÉFÉRENCES IDENTIQUES ET REVENUS DIFFÉRENTS

1. Les optima de Pareto sont solutions du programme suivant :

$$\max_{y,t_r,t_p} \alpha_r N_r[\ln(w_r - t_r) + \ln y] + \alpha_p N_p\left[\ln\left(w_p - t_p\right) + \ln y\right]$$

$$\text{s.c.} \quad N_r t_r + N_p t_p = 2y$$

On utilise la méthode de Lagrange et le programme devient :

$$\max_{y,t_r,t_p} \mathcal{L}\left(y, t_r, t_p\right) = \alpha_r N_r[\ln(w_r - t_r) + \ln y] + \alpha_p N_p\left[\ln\left(w_p - t_p\right) + \ln y\right] + \lambda\left(N_r t_r + N_p t_p - 2y\right)$$

Les conditions d'optimalité du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(y, t_r, t_p\right)}{\partial y} = \frac{\alpha_r N_r + \alpha_p N_p}{y} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(y, t_r, t_p\right)}{\partial t_r} = -\frac{\alpha_r N_r}{w_r - t_r} + \lambda N_r = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(y, t_r, t_p\right)}{\partial t_p} = -\frac{\alpha_p N_p}{w_p - t_p} + \lambda N_p = 0$$

Et

$$\lambda\left(N_r t_r + N_p t_p - 2y\right) = 0$$

On sait que $N_r = \frac{N}{4}$ et donc $N_p = \frac{3N}{4}$. De plus, on cherche l'optimum avec prélèvements identiques, $t_r = t_p = t$. On obtient alors :

$$N\left(\frac{\alpha_r}{4} + \frac{3\alpha_p}{4}\right) = 2\lambda\, y$$

$$\frac{\alpha_r}{w_r - t} = \frac{\alpha_p}{w_p - t} = \lambda$$

$$\frac{N}{4} t + \frac{3N}{4} t - 2y = 0$$

Soit :

$$N\left(\frac{\alpha_r}{4} + \frac{3\alpha_p}{4}\right) = 2\lambda\, y$$

$$\alpha_r\left(w_p - t\right) = \alpha_p(w_r - t)$$

$$Nt = 2y$$

D'où :

$$t = \frac{\alpha_r w_p - \alpha_p w_r}{\alpha_p - \alpha_r}$$

$$y = \frac{N}{2} \frac{\alpha_r w_p - \alpha_p w_r}{\alpha_p - \alpha_r}$$

A.N.

$$t = 40 \frac{\alpha_r - 3\alpha_p}{\alpha_p - \alpha_r}$$

$$y = 20N \frac{\alpha_r - 3\alpha_p}{\alpha_p - \alpha_r}$$

avec $\frac{\alpha_r}{3} < \alpha_p < \alpha_r$.

2. À l'équilibre de souscription, un individu *i* va choisir la souscription qui maximise son utilité sachant qu'elle contribuera à la production de bien public :

$$\max_{t_i} \ln(w_i - t_i) + \ln\left(\frac{N_i t_i + N_j t_j}{2}\right)$$

La condition d'optimalité s'écrit :

$$-\frac{1}{w_i - t_i} + \frac{1}{N_i t_i + N_j t_j} = 0$$

Soit :

$$t_i = w_i - N_i t_i - N_j t_j$$

À l'équilibre, on a :

$$\begin{cases} t_i = w_i - N_i t_i - N_j t_j \\ t_j = w_j - N_i t_i - N_j t_j \end{cases}$$

En sommant les contributions, on obtient :

$$\begin{cases} N_i t_i = N_i w_i - N_i\left(N_i t_i + N_j t_j\right) \\ N_j t_j = N_j w_j - N_j\left(N_i t_i + N_j t_j\right) \end{cases}$$

et ainsi $\left(N_i t_i + N_j t_j\right) = N_i w_i - N_i\left(N_i t_i + N_j t_j\right) + N_j w_j - N_j\left(N_i t_i + N_j t_j\right)$

Soit

$$\left(N_i t_i + N_j t_j\right) = N_i w_i + N_j w_j - \left(N_i + N_j\right)\left(N_i t_i + N_j t_j\right) \Leftrightarrow \left(1 + N_i + N_j\right)\left(N_i t_i + N_j t_j\right) = N_i w_i + N_j w_j$$

On pose *i*=*r* et *j*=*p* :

$$\left(1 + N\right)\left(N_r t_r + N_p t_p\right) = N_r w_r + N_p w_p$$

$$\begin{cases} t_r = w_r - \dfrac{N_r w_r + N_p w_p}{1+N} = w_r - \dfrac{N}{4}\dfrac{w_r + 3w_p}{1+N} = \dfrac{4w_r + 3Nw_r - 3Nw_p}{4(1+N)} \\ t_p = w_p - \dfrac{N_r w_r + N_p w_p}{1+N} = w_p - \dfrac{N}{4}\dfrac{w_r + 3w_p}{1+N} = \dfrac{4w_p + Nw_p - Nw_r}{4(1+N)} \end{cases}$$

A.N.

$$\begin{cases} t_r = 60\dfrac{2+N}{(1+N)} \\ t_p = 20\dfrac{2-N}{(1+N)} \end{cases}$$

et $y = \frac{60N}{(1+N)}$.

3. Le niveau optimal pour un individu *i*, t_i, est celui qui maximise son utilité sachant que cette contribution sera la même pour tous les individus :

$$\max_{t_i} \ln(w_i - t_i) + \ln\left(\frac{Nt_i}{2}\right)$$

La condition d'optimalité s'écrit :

$$-\frac{1}{w_i - t_i} + \frac{1}{t_i} = 0 \Leftrightarrow t_i = \frac{w_i}{2}$$

Comme les individus pauvres sont majoritaires, le résultat du vote sera $t_p = \frac{w_p}{2} = 20$ et $y = 20N$.

EXERCICE 11*BIS* FINANCEMENT D'UN BIEN PUBLIC, PRÉFÉRENCES IDENTIQUES ET REVENUS DIFFÉRENTS

À la question 1, on remplace « avec des prélèvements identiques » par « avec des **poids** identiques ».

1. Les optima de Pareto sont solutions du programme suivant :

$$\max_{y,t_r,t_p} \alpha_r N_r[\ln(w_r - t_r) + \ln y] + \alpha_p N_p\left[\ln\left(w_p - t_p\right) + \ln y\right]$$

$$\text{s.c.} \quad N_r t_r + N_p t_p = 2y$$

On utilise la méthode de Lagrange et le programme devient :

$$\max_{y,t_r,t_p} \mathcal{L}\left(y, t_r, t_p\right) = \alpha_r N_r[\ln(w_r - t_r) + \ln y] + \alpha_p N_p\left[\ln\left(w_p - t_p\right) + \ln y\right] + \lambda\left(N_r t_r + N_p t_p - 2y\right)$$

Les conditions d'optimalité du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(y, t_r, t_p\right)}{\partial y} = \frac{\alpha_r N_r + \alpha_p N_p}{y} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}\left(y, t_r, t_p\right)}{\partial t_r} = -\frac{\alpha_r N_r}{w_r - t_r} + \lambda N_r = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y, t_r, t_p)}{\partial t_p} = -\frac{\alpha_p N_p}{w_p - t_p} + \lambda N_p = 0$$

Et

$$\lambda(N_r t_r + N_p t_p - 2y) = 0$$

On sait que $N_r = \frac{N}{4}$ et donc $N_p = \frac{3N}{4}$.

Si les prélèvements sont différents et que l'on accorde le même poids à chaque catégorie, $\alpha_p = \alpha_r$, on obtient l'optimum suivant :

$$\frac{N_r + N_p}{y} = \frac{N}{y} = 2\lambda$$

$$\frac{1}{w_r - t_r} = \frac{1}{w_p - t_p} = \lambda$$

Et

$$N_r t_r + N_p t_p - 2y = 0$$

On peut exprimer t_p et y en fonction de t_r :

$$t_p = w_p - w_r + t_r$$

$$y = \frac{N}{2}(w_r - t_r)$$

En utilisant la contrainte de ressources, on obtient :

$$N_r t_r + N_p(w_p - w_r + t_r) - N(w_r - t_r) = 0$$

Soit

$$2Nt_r = -N_p(w_p - w_r) + Nw_r$$

On trouve $t_r = 90, t_p = 10$ et $y = 30\ N$.

2. À l'équilibre de souscription, un individu i va choisir la souscription qui maximise son utilité sachant qu'elle contribuera à la production de bien public :

$$\max_{t_i} \ln(w_i - t_i) + \ln\left(\frac{N_i t_i + N_j t_j}{2}\right)$$

La condition d'optimalité s'écrit :

$$-\frac{1}{w_i - t_i} + \frac{1}{N_i t_i + N_j t_j} = 0$$

Soit :

$$t_i = w_i - N_i t_i - N_j t_j$$

À l'équilibre, on a :

$$\begin{cases} t_i = w_i - N_i t_i - N_j t_j \\ t_j = w_j - N_i t_i - N_j t_j \end{cases}$$

En sommant les contributions, on obtient :

$$\begin{cases} N_i t_i = N_i w_i - N_i(N_i t_i + N_j t_j) \\ N_j t_j = N_j w_j - N_j(N_i t_i + N_j t_j) \end{cases}$$

et ainsi $(N_i t_i + N_j t_j) = N_i w_i - N_i(N_i t_i + N_j t_j) + N_j w_j - N_j(N_i t_i + N_j t_j)$

Soit

$$(N_i t_i + N_j t_j) = N_i w_i + N_j w_j - (N_i + N_j)(N_i t_i + N_j t_j) \Leftrightarrow (1 + N_i + N_j)(N_i t_i + N_j t_j) = N_i w_i + N_j w_j$$

On pose i=r et j=p :

$$(1 + N)(N_r t_r + N_p t_p) = N_r w_r + N_p w_p$$

$$\begin{cases} t_r = w_r - \dfrac{N_r w_r + N_p w_p}{1 + N} = w_r - \dfrac{N}{4}\dfrac{w_r + 3w_p}{1 + N} = \dfrac{4w_r + 3Nw_r - 3Nw_p}{4(1 + N)} \\ t_p = w_p - \dfrac{N_r w_r + N_p w_p}{1 + N} = w_p - \dfrac{N}{4}\dfrac{w_r + 3w_p}{1 + N} = \dfrac{4w_p + Nw_p - Nw_r}{4(1 + N)} \end{cases}$$

A.N.

$$\begin{cases} t_r = 60\dfrac{2+N}{(1+N)} \\ t_p = 20\dfrac{2-N}{(1+N)} \end{cases}$$

et $y = \frac{60N}{(1+N)}$.

3. Le niveau optimal pour un individu *i*, t_i, est celui qui maximise son utilité sachant que cette contribution sera la même pour tous les individus :

$$\max_{t_i} \ln(w_i - t_i) + \ln\left(\frac{Nt_i}{2}\right)$$

La condition d'optimalité s'écrit :

$$-\frac{1}{w_i - t_i} + \frac{1}{t_i} = 0 \Leftrightarrow t_i = \frac{w_i}{2}$$

Comme les individus pauvres sont majoritaires, le résultat du vote sera $t_p = \frac{w_p}{2} = 20$ et $y = 20N$.