Chapitre 3

Flexion composée

Chapitre 2

Flexion composée

2.1 Généralités

Une section droite (**S**) d'une pièce était soumise à la flexion composée si les forces et les couples agissants à gauche de (**S**) pouvaient être réduits, par rapport au centre de gravité **G** de l'axe cette section (fig.2.1.a), à :

- un couple de moment M_G (moment de flexion), d'axe perpendiculaire au plan de symétrie de la section ;
- une force **N** (effort normal), perpendiculaire à (**S**), dirigée vers la droite dans le cas d'un effort de compression et vers la gauche dans le cas d'un effort de traction ;
- une force **T** (effort tranchant), portée par l'axe de symétrie de la section..

Remarques :

– Le système constitué par M_{G0} et **N** peut être remplacé par une force unique **N**, appliquée au centre de pression **C** (fig.2.1.b), distant de G_0 (centre de gravité de béton seul) d'une quantité :

$$\boxed{e_0 = M_{G0} / N}$$

– Lorsque l'excentricité e_0 de l'effort normal **N** est selon les deux directions, on parle de flexion déviée composée.

– Selon les valeurs de l'effort normal N_u et de l'excentricité e_0, la section est entièrement tendue, N_u est un effort de traction, ou entièrement comprimée, N_u est un effort de compression, ou partiellement tendue/comprimée, N_u est un effort de traction ou N_u est un effort de compression.

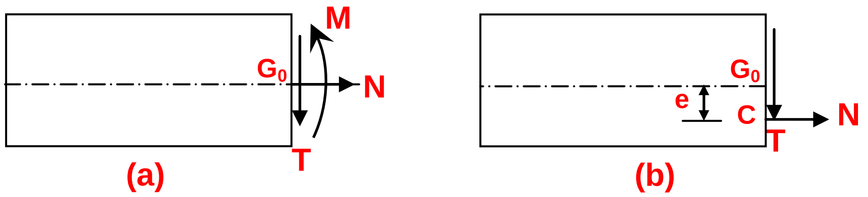

Fig. 2.1 : Section soumise à la flexion composée.

Dans le présent chapitre, on étudie uniquement les effets du moment de flexion **M_{G0}** et de l'effort **N**, puisque ceux de l'effort tranchant **T** sont étudiés au chapitre 1 (BA II).

– Lorsque la section est sollicitée en flexion composée avec compression :

- Sachant que :
  - e_{ad} = Max (2 cm, l / 250) = excentricité additionnelle
  - $e_1 = (\Sigma\gamma_j M_{jG0} / \Sigma\gamma_i N_i) + e_{ad}$ = excentricité du 1er ordre à l'E.L.U.

  avec :
  - **l_f :** longueur de flambement de la pièce (voir chapitre 3, BA I « Compression simple» ;
  - **h** : hauteur de la section droite dans le plan de flambement,
  - **l** : longueur libre de la pièce,

- on distingue deux cas :

1. Cas où l_f / h > Max (15 ; $20.e_1$/h)

Vérifier la pièce à l'état-limite ultime de stabilité de forme (ELUSF de flambement).

2. Cas où l_f / h ≤ Max (15 ; $20.e_1$/h)

Faire le calcul en flexion composée pour les sollicitations ultimes :

$N_u = \Sigma\gamma_i N_i$

$M_u = N_u (e_1 + e_2) = N_u e_0$

avec : $\boxed{e_2 = \frac{3}{10^4} l_f^2 \, (2 + \alpha.\, \Phi)}$ (excentricité forfaitaire prenant en compte les effets du second ordre)

où:

$$\begin{cases} \Phi = 2 \\ \alpha = \dfrac{M_1^L\,(G + \sum_{i \geq 1} \Psi_{2i}\,.Q_i)}{M_1(G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \Psi_{0i}\,.Q_i)} \end{cases}$$

(rapport de la déformation due au fluage sur la déformation instantanée)

M_1 et M_1^L étant évalués sans les coefficients γ (ce sont des moments de service), e_a n'intervient pas.

2.2 Calcul des sections entièrement tendues à l'E.L.U. (section rectangulaire)

Une section sera entièrement tendue si l'effort **N** est un effort de traction et si le centre d'application *"***C***"* se trouve entre les armatures (Fig. 2.2).

Dans ce cas, on a $y_u < 0$ **et** $\alpha < 0$, la droite de déformation passe par le Pivot **A**, comme indiqué sur la figure Fig. 2.2.

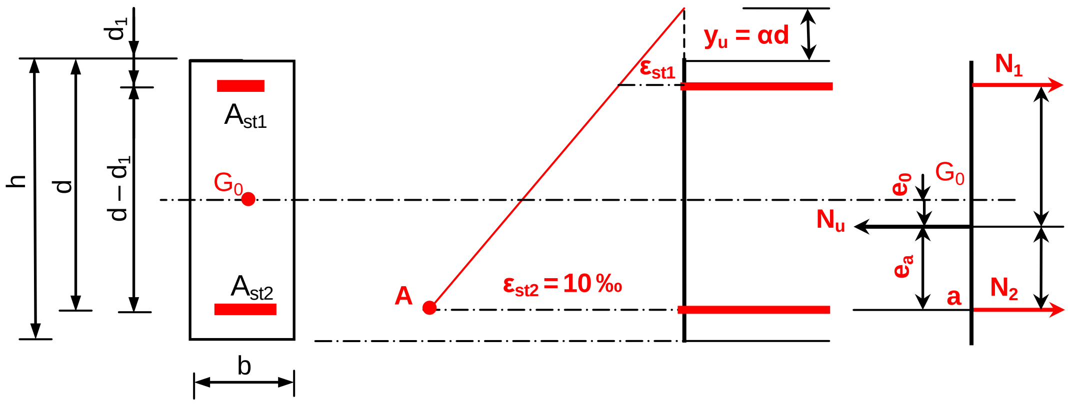

Fig. 2.2 : Droites de déformation et l'équilibre des forces en flexion composée dans le cas où la section est entièrement tendue.

On désigne :

- A_{st1} : la section des armatures supérieures, σ_{st1} leur contrainte ;
- A_{st2} : la section des armatures inférieures, σ_{st2} leur contrainte.

On a alors : $N_1 = A_{st1}\,\sigma_{st1}$, $N_2 = A_{st2}\,\sigma_{st2}$.

Pour le schéma considéré on peut écrire :

$- N_u + N_1 + N_2 = 0 \Rightarrow - N_u + A_{st1}\,\sigma_{st1} + A_{st2}\,\sigma_{st2} = 0$ …………(2.1)

En prenant pour la deuxième équation, les moments par rapport au point **a**, nous obtenons:

$- N_u\, e_a + N_1\,(d - d_1) = 0 \Rightarrow - N_u\, e_a + A_{st1}\,\sigma_{st1}\,(d - d_1) = 0$ …………(2.2)

D'où on trouve : $\boxed{A_{st1} = N_u\, e_a / (\sigma_{st1}\,(d - d_1))}$ …………(2.3)

En remplaçant l'équation (2.3) dans l'équation (2.1), on trouve :

$$\boxed{A_{st2} = \frac{N_u}{\sigma_{st2}} - \frac{A_{st1}}{\sigma_{st2}}\sigma_{st1}}$$ …………(2.4)

Du point de vue économique, on a intérêt à prendre, pour chacune des contraintes σ_{st1} et σ_{st2} la plus grande valeur possible, on prend donc celle correspondant à l'allongement maximal σ_{st} = **10 ‰**.

Donc : $\boxed{\sigma_{st1} = \sigma_{st2} = f_{su}}$, par suite :

$$\boxed{A_{st2} = \frac{N_u}{f_{su}} - \frac{A_{st1}}{f_{su}} f_{su}} \Rightarrow \boxed{A_{st2} = \frac{N_u}{f_{su}} - A_{st1}} \quad \text{............(2.5)}$$

- Ces formules sont valables pour n'importe quel type de forme de la section.

Condition de non-fragilité :

- La section minimale des armatures doit être au moins égale à:

$$\boxed{A_{st1} + A_{st2} \geq A_{min} = (B \cdot f_{t28}) / fe} \quad \text{............(2.6)}$$

où **B** est l'aire d'une section de béton (B = b x h, pour une section rectangulaire).

2.3 Calcul des sections partiellement tendues à l'E.L.U. (section rectangulaire)

2.3.1 Définition

Dans ce cas, on a **$0 \leq yu \leq h$**, **$0 \leq \alpha \leq h/d$**, et on est dans les domaines des Pivots **A** et **B**. Le diagramme de déformation est compris entre les deux diagrammes limites AK et BC, comme définie sur la Figure 2.3. Lorsque **$0 \leq yu \leq d$** les aciers tendus sont nécessaires et si **$d \leq yu \leq h$** ils ne sont plus nécessaires (du moins, ils sont comprimés).

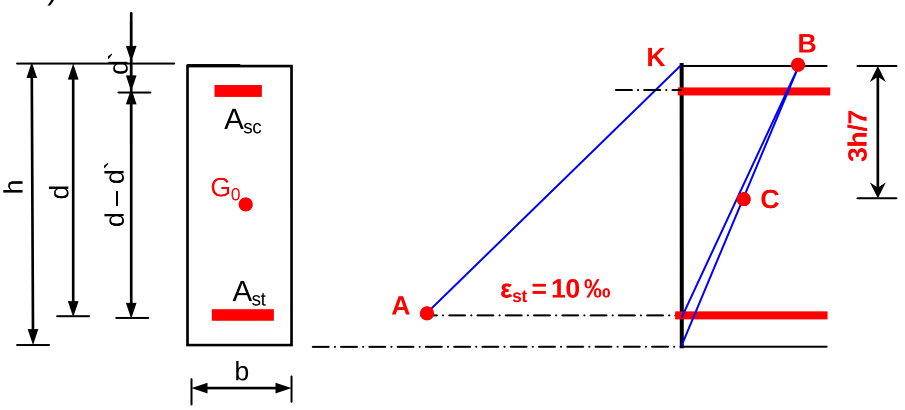

Fig. 2.3 : Droites de déformation en flexion composée dans le cas où la section est partiellement tendue/comprimée.

a) N_u est une compression (dans ce cas : $e_0 = e_1 + e_2$) :

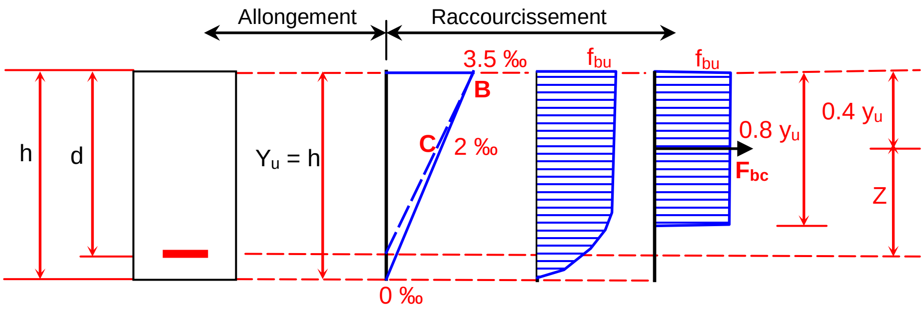

Fig. 2.4 : Principe de calcul à l'ELU de M_{BC} dans le cas d'une section rectangulaire.

- **Pour une section rectangulaire de largeur b, en l'absence d'aciers comprimés,si $y_u = h$:**

$F_{bc} = 0.8\,.\,b\,.\,h\,.\,f_{bu}$ et $Z = d - 0.4\,h$

$M_{BC} = F_{bc}\,.\,Z$

soit, en considérant les moments par rapport aux aciers tendus :

$$\boxed{M_{BC} = 0.8\,.\frac{h}{d}\left(1 - 0.4\,\frac{h}{d}\right)b\,.\,d^2.\,f_{bu}} \quad \text{.............(2.7)}$$

D'où :

$$\boxed{\mu_{BC} = \frac{M_{BC}}{b\,.\,d^2.\,f_{bu}} = 0.8\,.\frac{h}{d}\left(1 - 0.4\,\frac{h}{d}\right)} \quad \text{.............(2.8)}$$

et la section est partiellement tendue tant que $y_u \leq h$, c'est-à-dire tant que :

$$\boxed{\mu_{bu} = \frac{M_{ua}}{b\,.d^2.\,f_{bu}} \leq \mu_{BC} = 0.8\,.\frac{h}{d}\left(1 - 0.4\,\frac{h}{d}\right)}$$

avec :

M_{ua} : moment fléchissant ultime par rapport aux aciers tendus.

On remarque que l'on a au moins une nappe d'aciers tendus si : $y_u \leq d$ (Fig 2.4).

b) N_u est une traction, le centre de pression C est à l'extérieur des traces des armatures :

Dans ce cas : $e_0 = \Sigma\gamma_j M_{jG0} / \Sigma\gamma_i N_i$

2.3.2 Calcul des armatures

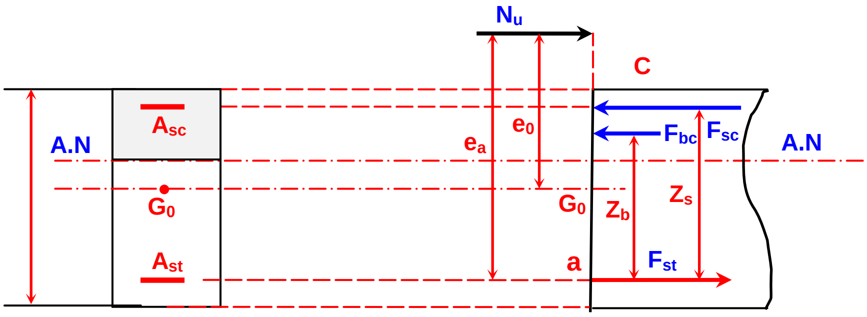

Fig. 2.5 : Principe de calcul à l'ELU des armatures d'une section rectangulaire partiellement tendue/comprimée.
.

- Pour la figure 2 .5, on a supposé que l'effort normal **N_u est un effort de compression**.
- Prenant les moments par rapport aux aciers tendus, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} M_a = N_u \,.\, e_a = F_{sc} \,.\, Z_s + F_{bc} \,.\, Z_b \\ N_u = F_{bc} + F_{sc} - F_s \end{cases}$$

et en tenant compte des sections A et A' d'armatures :

$$\begin{cases} M_a = N_u \,.\, e_a = A_{sc} \,.\, \sigma_{sc} \,.\, Z_s + F_{bc} \,.\, Z_b \\ N_u = F_{bc} + A_{sc} \,.\, \sigma_{sc} - A_{st} \,.\, \sigma_{st} \;\Leftrightarrow\; F_{bc} + A_{sc} \,.\, \sigma_{sc} - (A_{st} + \frac{N}{\sigma st})\, \sigma_{st} = 0 \end{cases}$$

- Les équations d'équilibre de la même section soumise en flexion simple au moment **M_a** et ayant mêmes déformations et munie des sections d'armatures **A_{st}*** el **A_{sc}*** s'écrivent :

$$\begin{cases} M_a = A_{st}^* \,.\, \sigma_{sc} \,.\, Z_s + F_{bc} \,.\, Z_b \\ 0 = F_{bc} + A_{sc}^* \,.\, \sigma_{sc} - A_{st}^* \,.\, \sigma_{st} \end{cases}$$

où par identification, il vient:

$$\boxed{\begin{array}{l} A_{sc} = A_{sc}^* \\ A_{st} = A_{st}^* - \dfrac{\mathbf{N_u}}{\boldsymbol{\sigma_{st}}} \end{array}}$$

- Si l'effort normal **N_u est un effort de traction**, on montrerait, de la même manière que ci-dessus, que l'on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} A_{sc} = A_{sc}^* \\ A_{st} = A_{st}^* + \dfrac{\mathbf{N_u}}{\boldsymbol{\sigma_{st}}} \end{array}}$$

Remarque :

- Si N_u est une compression, le centre de pression **C** est à l'opposé de **a** (centre de gravité des aciers tendus) par rapport à G_0.
- Si N_u est une traction, le centre de pression **C** et **a** sont du même côté par rapport à G_0.

2.4 Section en T à l'ELU

a) Cas où $M_{ua} \leq M_{tu}$:

- Table surabondante pour équilibrer M_{ua}.
- Donc le calcul se fait en section rectangulaire de largeur **b** en flexion composée soumise à (M_{ua}, N_u).

b) Cas où $M_{ua} > M_{tu}$:

- Le calcul se fait en section à table de compression (Fig. 2.6).
- Décomposition de la section :

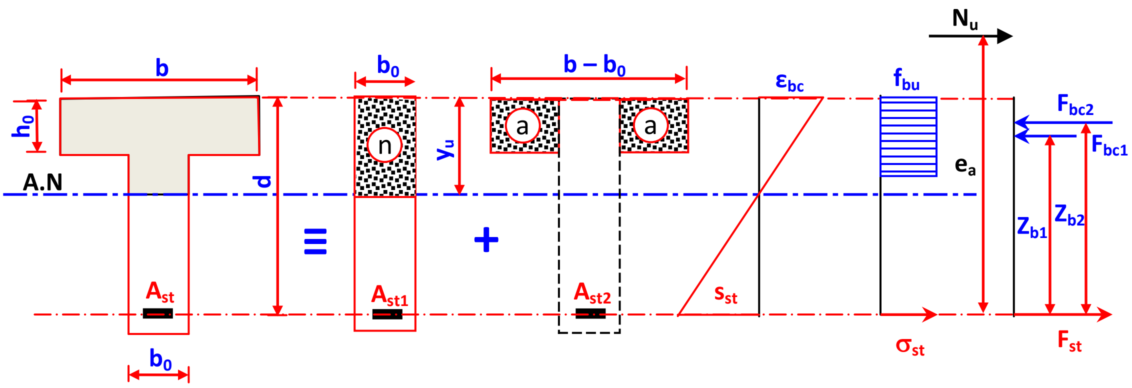

Fig. 2.6 : Principe de calcul à l'ELU d'une section en T soumise à la flexion composée, avec : $M_{ua} > M_{tu}$.

- Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} M_{ua} = F_{bc1} \cdot Z_{b1} + F_{bc2} \cdot Z_{b2} \\ N_u = F_{bc1} + F_{bc2} - F_{st} \end{cases}$$

- Avec:

$$\begin{cases} F_{bc1} = 0.8 \cdot b_0 \cdot y_u \cdot f_{bu} \quad \text{et} \quad Z_{b1} = (d - 0.4\, d) \\ F_{bc2} = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu} \quad \text{et} \quad Z_{b2} = d - (h_0/2) \\ F_{st} = A_{st} \cdot \sigma_{st} \end{cases}$$

donc : $\begin{cases} M_{ua} = 0.8 \,.\, b_0 \,.\, y_u \,.\, f_{bu} \,.\, (d - 0.4\, d) + (b - b_0) \,.\, h_0 \,.\, f_{bu} \,.\, (d - (h_0/2)) \\ N_u = 0.8 \,.\, b_0 \,.\, y_u \,.\, f_{bu} + (b - b_0) \,.\, h_0 \,.\, f_{bu} - A_{st} \,.\, \sigma_{st} \end{cases}$

et en posant :

$$\begin{cases} M_{uR} = M_{ua} - (b - b_0) \,.\, h_0 \,.\, f_{bu} \,.\, (d - (h_0/2)) \\ N_{uR} = N_u - (b - b_0) \,.\, h_0 \,.\, f_{bu} \end{cases}$$

il vient :

$$\begin{cases} M_{uR} = 0.8 \,.\, b_0 \,.\, y_u \,.\, f_{bu} \,.\, (d - 0.4\, d) \\ N_{uR} = 0.8 \,.\, b_0 \,.\, y_u \,.\, f_{bu} - A_{st} \,.\, \sigma_{st} \end{cases}$$

soit les équations d'équilibre d'une section rectangulaire **b_0 . d** soumise à M_{UR} et **N_{UR}**. Donc ça revient à calculer une section rectangulaire **b_0 . d** soumise à :

$$\boxed{\begin{array}{l} M_{uR} = M_{ua} - (b - b_0) \,.\, h_0 \,.\, f_{bu} \,.\, (d - (h_0/2)) \\ N_{uR} = N_u - (b - b_0) \,.\, h_0 \,.\, f_{bu} \end{array}}$$

- Ce qui permet de déterminer **A_{st}*** el **A_{sc}*** .
- Finalement les armatures de la section en T sont données par :

$$\boxed{\begin{array}{l} A_{sc} = A_{sc}^* \\ A_{st} = A_{st}^* + \dfrac{\mathbf{N_u R}}{\boldsymbol{\sigma_{st}}} \end{array}}$$

- **N_{UR}** est en valeur algébrique.

Condition de non-fragilité :

- Pour la section rectangulaire, la section minimale des armatures doit être au moins égale à:

$$A_{min} = 0.23\ b\ d\ \frac{f_{t28}}{f_e}\ \frac{e_0 - 0.45\ d}{e_0 - 0.185\ d}$$

2.4 Calcul des sections entièrement comprimées à l'E.L.U.

On se trouve dans cette situation si **$M_{ua} > M_{BC}$** , **N_u** étant alors un effort de compression, donc on se trouve au pivot **C**.

Le calcul manuel est pénible, même pour une section rectangulaire, car il n'est plus possible d'admettre pour la distribution des contraintes du béton le diagramme rectangulaire simplifié. Il vaut mieux, en ce cas, avoir recours à des abaques (**diagrammes d'interaction**) qui ont été établis, à l'aide d'un programme de calcul, pour des formes de section particulières.

Dans ce cours on présente l'organigramme de calcul des armatures, et qui résume la marche à suivre au pivot **C**.

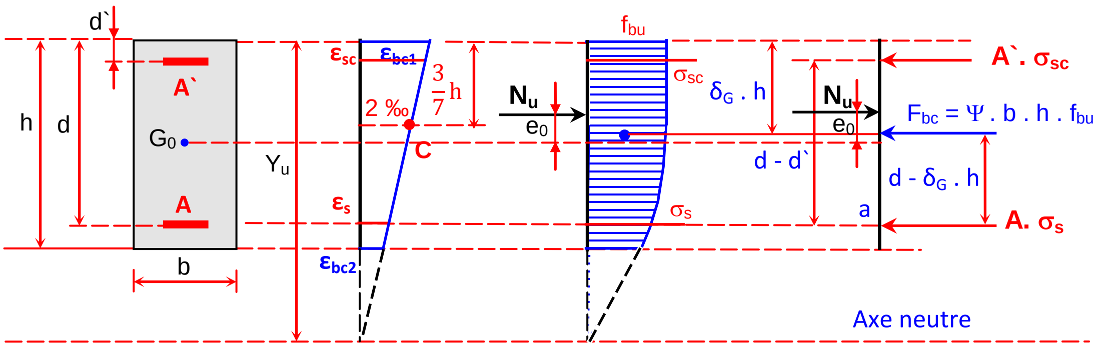

Fig. 2.7 : Principe de calcul à l'ELU d'une section rectangulaire entièrement comprimée.

Les équation d'équilibre s'écrivent (figure 2.7) :

$$N_u = \Psi \,.\, b \,.\, h \,.\, f_{bu} + A` .\, \sigma_{sc} - A .\, \sigma_s$$

$$M_{ua} = \Psi \,.\, b \,.\, h \,.\, f_{bu} \,.\, (d - \delta_G \,.\, h) + A` .\, \sigma_{sc}\, (d - d`)$$

Voir ci-après l'organigramme de calcul à l'ELU (pivot C) :

Condition de non-fragilité :

Les formules classiques de la Résistance des Matériaux ne permettent pas le dimensionnement direct. Il faut recourir aux abaques qui ont été établis pour des formes de section particulières.

2.5 Dimensionnement des sections en flexion composée par l'E.L.S.

2.5.1 Sections entièrement tendues

La section est entièrement tendue si l'effort normal à l'ELS $\mathbf{N_{ser}}$ est une traction, et le centre de pression C définit par :

$$\boxed{\mathbf{e_0 = \frac{M_{ser,G_0}}{N_{ser}}}}$$

tombe entre les traces des deux nappes d'armatures.

Le calcul se fait selon les mêmes principes de calcul que pour l'E.L.U. Le dimensionnement économique correspond à $\sigma_1 = \sigma_1 = \overline{\sigma_s}$.

2.5.2 Sections partiellement comprimée

La section est partiellement comprimée si :

$$\boxed{\mathbf{e_0 = \frac{M_{ser,G_0}}{N_{ser}}}}$$

a. **$\mathbf{N_{ser}}$ est une compression**, et que le centre de pression **C** tombe à l'extérieur du **noyau central** de la section.

On rappelle que **le noyau central** est une zone de la section telle que si le centre de pression y est situé, les contraintes de service σ_1 et σ_1 des fibres extrêmes de la section sont toutes de même signe.

Pour une section rectangulaire, la condition pour que la section soit partiellement comprimée est : $\mathbf{|e_0| \geq \frac{h}{6}}$

D'une autre manière, pour une section rectangulaire sans aciers comprimés, il faut $\mathbf{y \leq h}$, d'où :

$$\boxed{M_{ser\ a} \leq M_{ser\ lim} = \frac{1}{2}\,\overline{\sigma_{bc}}\,b.h.\left(d - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{d}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{h}{d}\right)\,b\,.\,d^2.\overline{\sigma_{bc}}}$$

avec au moins une nappe d'aciers tendus (**$y \leq d$**) si :

$$\boxed{M_{ser\,a} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) b \cdot d^2 \cdot \overline{\sigma_{bc}} = 0.333\, b \cdot d^2 \cdot \overline{\sigma_{bc}}}$$

b. **N_{ser} est une traction**, le centre de pression **C** est à l'extérieur des traces des armatures.

Détermination des armatures

La méthode pratique de calcul consiste à se ramener à la flexion simple :

- on calcule la section en flexion simple sous le moment **$M_{ser\,a} = N_{ser} \cdot e_a$** , ce qui fournit les sections A^*_{sc} et A^*_{st} (dans ce calcul, $M_{ser\,a}$ est à comparer à M_{rb});

- on prend ensuite, pour la section réelle :

$A_{sc} = A^*_{sc}$

$A_{st} = A^*_{st} - \frac{N_{ser}}{\overline{\sigma_s}} \Rightarrow$

$A_{st} < A^*_{st}$ si N_{ser} est une compression
$A_{st} > A^*_{st}$ si N_{ser} est une traction

Si l'on trouve **A** très faible ou même négatif, on doit placer au moins une section d'armatures égale à la section minimale, pour respecter la condition de non-fragilité.