

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie



---

# RÉGULATION INDUSTRIELLE

*Licence : Conception Mécanique, Énergétique*

*Master : Conception Mécanique et Productique*

---

**Dr. Lakhdar SEDIRA** <sup>1</sup>

**Dr. Kamel MEFTAH** <sup>2</sup>

Département de Génie Mécanique

Faculté des Sciences et de la Technologie

<sup>1</sup> Laboratoire de Génie Mécanique, LGM

<sup>2</sup> Laboratoire de Génie Énergétique et Matériaux, LGEM

---





# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>v</b>
<b>1 Généralités sur les systèmes asservis</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction	1
1.2 Les systèmes de commande	1
1.2.1 Définitions	1
1.2.2 Signaux d'entrée	2
1.2.3 Signal de sortie	2
1.2.4 Classification du système de commande	2
1.2.5 Schéma fonctionnel d'un système asservi (en B.F)	4
1.3 Exemple : Chauffage d'immeuble	5
1.4 Exercices	6
<b>2 Systèmes linéaires et équations différentielles</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction	9
2.2 Équations différentielles	9
2.3 Equations différentielles aux dérivées partielles et Equations différentielles ordinaires	10
2.4 Équations différentielles dépendantes du temps et indépendantes du temps	10
2.5 Equations différentielles linéaires et non linéaires	11
2.6 Linéarité et superposition	11
2.6.1 Principe de superposition	12
2.6.2 Principe de permanence	12
2.7 Résolution d'une équation différentielle	13
2.8 Exercices	16
<b>3 Transformation de Laplace</b>	<b>21</b>
3.1 Introduction	21
3.2 Définition	21
3.3 Propriétés de la transformation de Laplace	21
3.4 L'inversion de la transformée de Laplace	23

3.5	Application de la T.L. à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants	24
3.6	Décomposition de la transformée de Laplace en éléments simples	24
3.7	Détermination des inverses par utilisation du développement en éléments simples	26
<b>4</b>	<b>La fonction de transfert</b>	<b>29</b>
4.1	Définition	29
4.2	Propriétés de la fonction de transfert	29
4.3	Algèbre des schémas fonctionnels	30
4.3.1	Établissement des schémas fonctionnels en utilisant les fonctions de transfert.	30
4.4	Exercices	33
<b>5</b>	<b>Stabilité</b>	<b>37</b>
5.1	Définition	37
5.2	Critères de stabilité	38
5.2.1	Critère de Hurwitz	39
5.2.2	Exemples	40
<b>6</b>	<b>Critères graphiques de stabilité</b>	<b>41</b>
6.1	Critère de Nyquist	41
6.1.1	Introduction	41
6.1.2	Théorème de Cauchy	42
6.1.3	Procédure du critère de Nyquist	43
6.2	Lieu de Bode	45
6.3	Diagramme de Black-Nichols	47
6.4	Marge de Gain, Marge de phase	48
<b>7</b>	<b>Précision des systèmes asservis</b>	<b>51</b>
7.1	Généralités	51
7.1.1	Notions de classe d'un système asservi	51
7.1.2	Définition	51
7.2	Erreur statique	52
7.2.1	Erreur statique en réponse à un signal d'entrée canonique	52
7.2.2	Erreur statique en réponse à un signal de perturbation canonique	53
7.3	Erreur dynamique	53
7.3.1	Remarques	53
7.4	Précision dynamique d'un système du premier ordre à retour unitaire	54
7.4.1	Précision dynamique d'un système du deuxième ordre à retour unitaire	55

<b>8 Correction des systèmes asservis</b>	<b>57</b>
8.1 Généralités	57
8.1.1 Rappel	57
8.1.2 Dilemme Stabilité-Précision	58
8.1.3 Notion sur le correcteur	58
8.2 Les correcteurs spécifiques P, PI, PD et PID	58
8.2.1 Les lois de commande	58
8.2.2 La correction	59
8.3 Correction classique	59
8.3.1 Correction cascade ou série	59
8.3.2 Correction parallèle	61
<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>



# Introduction générale

Ce support de cours est dispensé à la faculté des Sciences et de la Technologie de l'université de Mohamed Khider- Biskra. Il s'adresse particulièrement aux étudiants du premier et deuxième cycles du département de Génie Mécanique (Construction mécanique, Énergétique, Conception Mécanique et productique, Génie Climatique,...etc). le cours a pour but principal de présenter avec une approche simple et très pratique des fondements de l'automatique linéaire que nous appellerons souvent la régulation automatique. Cette démarche consiste à étudier les systèmes linéaires types les plus importants (premier et deuxième ordre, ...) qui seront traités par des exemples physiques variés (thermique, mécanique et électrique). Le contenu de ce support est dévisé en huit chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la définition des termes du titre de programme envisagé et aux caractéristiques générales des systèmes linéaires et invariants. La symbolisation normalisée des boucles de régulation dans l'industrie sera aussi présentée afin de permettre à l'étudiant de lire les schémas de régulation présentés dans l'industrie comme on lit un dessin de mécanique. Il est souhaitable de comparer le signal de sortie d'un système de commande au signal d'entrée : un exemple d'un chauffage d'immeuble montre l'intérêt de la structure à boucle.

Le deuxième chapitre a pour but la modélisation de systèmes réels sous forme d'équations différentielles. c'est à dire le modèle mathématique, nécessaire pour la réalisation de la commande. C'est pourquoi, il nous a semblé utile d'y étaler dans une large place les différents types des équations différentielles qui reflètent le comportement réel des systèmes. Nous présentons les techniques de résolution ainsi que les principes de superposition et de permanence liées généralement à la simplification de l'étude des systèmes.

La résolution de l'équation différentielle dans le domaine temporelle n'offre pas assez d'informations sur le comportement du système dans des éventuels situations critiques, c'est pourquoi, dans le troisième chapitre nous développerons un outil mathématique classique mais mais inévitable en régulation qui est la transformée de Laplace avec surtout ses applications pour la résolution des équations différentielles.

A noter que dans l'analyse des systèmes linéaires types. On insistera surtout à l'analyse temporelle des systèmes (analyse indicelle et impulsionnelle). L'analyse fréquentielle, qui est plutôt une approche d'électroniciens, n'a pas un grand sens physique et pratique dans les processus énergétiques. En effet les perturbations de débit, température ou de pression varient en pratique plus sous forme d'un échelon

ou d'une rampe que d'une sinusoïde.

L'outil mathématique de l'analyse des systèmes traités dans le chapitre précédent servira dans le quatrième chapitre à introduire la notion de la fonction de transfert et ces propriétés. L'établissement des schémas fonctionnels en utilisant les fonctions de transfert sera étudié dans la fin de ce chapitre.

Le cinquième chapitre propose la théorie de la stabilité des systèmes avec une approche algébrique. deux critères de stabilité à savoir : critère de Routh et celui de Hurwitz seront présentés afin d'évaluer le phénomène de stabilité pour des systèmes d'ordre inférieur.

Une fois un signal est retardé de quelques seconds quelque part dans la boucle du système, Ce qui fait difficile d'évaluer la stabilité du système, l'utilisation des critères graphiques devient nécessaire. En se basant sur la théorie de Cauchy, les critères de Nyquist, de Bode et celui de Black-Nichols sont illustrés dans le chapitre six afin de présenter la fonction de transfert dans des plans complexes. Les notions de *la marge de gain* et de *la marge phase* sont par conséquent définies.

Le chapitre sept est consacré à la précision des systèmes asservis. Vu la réponse du système, deux types d'erreur seront distinguées. l'erreur statique et l'erreur dynamiques seront définies en premier lieu en réponse à un signal d'entrée canonique d'une part, et à un signal d'entrée de perturbation canonique d'autre part. L'erreur dynamique est montré dans ce chapitre pour les cas des systèmes du premier et de deuxième ordre.

Comme il sera montré dans les chapitres précédents, les conditions imposées par la précision et la stabilité sont généralement contradictoires. Le dilemme stabilité- précision sera traité dans le huitième chapitre. Les différents types de correcteurs seront l'objet des deux parties principales de ce chapitre. Cependant, le premier paragraphe porte sur les correcteurs spécifiques : Proportionnel, Intégrateur et dérivateur, et le dernier sur la correction classique : cascade ou série et la correction parallèle.

Malgré tout le soin apporté à la rédaction, l'auteur est conscient des imperfections qui peuvent encore subsister dans ce polycopié. Aussi, l'auteur est reconnaissant par avance des remarques que pourront lui adresser les lecteurs et les étudiants pour la perfection de ce support de cours.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes asservis

### 1.1 Introduction

### 1.2 Les systèmes de commande

#### 1.2.1 Définitions

- Un système est un assemblage, un ensemble ou une collection d'objets reliés ou branchés les uns aux autres de façon à former une entité ou un tout.
- Le mot asservir est en général pris dans le sens de régler, diriger ou commander.
- L'asservissement est un ensemble mathématiques et une technique de raisonnement qui concernant la prise de décision et la commande des systèmes.
- Un système de commande est une combinaison d'éléments physiques, chimiques ou biologiques, etc ; associés les uns aux autres de façon à former une entité unique et agissant en tout que telle, dans le but de s'autocommander ou s'autorégler ou commander et régler un autre système.

#### Exemples

- Le système suivant constitué par un miroir pouvant pivoter sur l'une de ses extrémités et pouvant être relevé ou abaissé au moyen d'une vis à l'autre extrémité est un système de commande, grâce à la vis, on peut régler à volonté la direction du rayon réfléchi, figure 1.1.

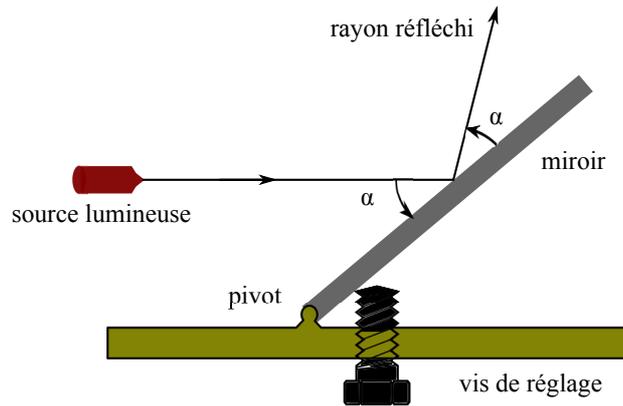


FIGURE 1.1 –

- Un automobiliste sur une route dirige sa voiture d'après la position de la chaussée par rapport à des repères liés à la voiture (capot, bord du par-brise), lorsque il aborde un virage, sa position change par rapport à un repère, le conducteur tourne le volant pour corriger l'écart. Il effectue alors une régulation de la position de la route par rapport à son véhicule.
- Un appareil de chauffage à thermostat, on règle la température de référence ou désirée de la pièce, quand la température de la pièce est inférieure à celle désirée, le fourneau fournit de la chaleur, jusqu'à ce que la température de l'enceinte devienne égale à la grandeur de référence, alors le fourneau s'éteint automatiquement.

### 1.2.2 Signaux d'entrée

Ce sont les signaux d'excitation du système, ils agissent sur son état mais ils y sont indépendants, ces grandeurs peuvent être de deux types.

- Grandeur commandable : Elle est appliquée à partir d'une source d'énergie externe, afin de provoquer une réponse spécifique du système.
- Grandeur non commandable : C'est une grandeur indésirable appelée parasite ou perturbation, elle nuit au bien fonctionnement du système et fausse sa réponse.

### 1.2.3 Signal de sortie

C'est la réponse effective élaborée par le système évoluant à partir de son état initial sous l'action des signaux d'entrée.

### 1.2.4 Classification du système de commande

Suivant la relation qui existe entre le signal de commande et le signal de sortie on distingue deux catégories générales : Les systèmes en boucles ouvertes et les systèmes en boucles fermées.

- Un système en boucle ouverte est un système où le signal de commande est indépendant du signal de sortie.
- Un système en boucle fermée est un système où le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre de signal de sortie.

### Système de commande en boucle ouverte (B.O)

- Des systèmes en général simple et facile d'emploi. Car présente peu d'éléments.
- Le phénomène d'instabilité n'est pas gênant.
- faibles performances.
- Il ne réagit pas à la perturbation.

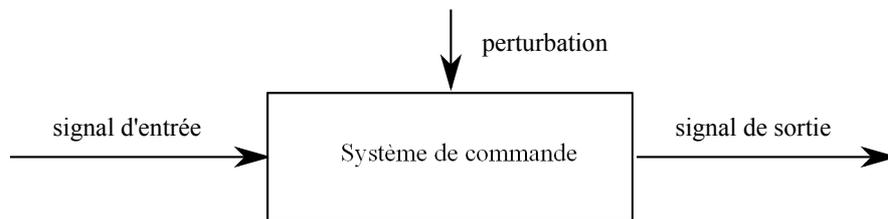


FIGURE 1.2 –

### Exemples

- L'exemple de miroir : C'est un système de commande en boucle ouverte, il n'y a pas de relation de retour.
- La rotation de volant d'une voiture pour le braquage de roues avant est un exemple de système en boucle ouverte.

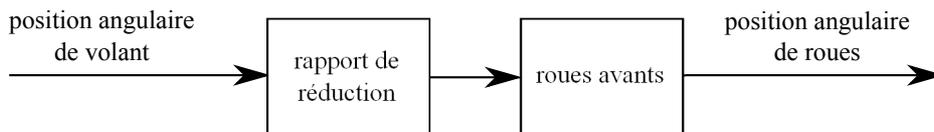


FIGURE 1.3 –

- Pour le même système, on peut introduire un dispositif d'amplification de puissance qui permet à partir d'une dépense en énergie minimale à l'entrée, de commander des phénomènes mettent en jeu d'une grande puissance à la sortie, c'est l'exemple d'une direction assisté d'un véhicule.

### Système de commande en boucle fermée (B.F)

Le fait d'établir une liaison entre la sortie et l'entrée est appelée action de retour, chaîne de retour ou plus simplement retour.

Le retour est la propriété par laquelle, dans un système de commande, le signal de sortie est comparé dans chaque instant au signal d'entrée d'une manière à former le signal de commande approprié et réduire la sensibilité de celui-ci aux perturbations.

### Caractéristiques de retour

- Une plus grande précision.
- Tendance à l'oscillation ou à l'instabilité.

Exemple : Le fourneau et le thermostat est un système en boucle fermée.

Cependant parmi les systèmes en boucle fermée on distingue le système régulateur dont la consigne demeure constante ou varie lentement durant une longue période et le système qui fonctionne en suiveur ou en poursuite dont la tâche consiste à faire suivre le signal d'entrée variable à chaque instant. Exemple : Radar d'une cible mobile.

### 1.2.5 Schéma fonctionnel d'un système asservi (en B.F)

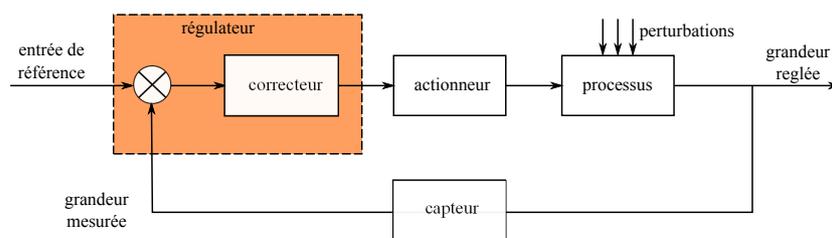


FIGURE 1.4 –

- **Le processus** : est soumis aux excitations constituées par l'entrée de référence et les perturbations, il y répond par une grandeur qui lui est propre (appelée grandeur réglée).
- **Le capteur** : donne une image utilisable de la grandeur réglée, la nature de cette mesure est le plus souvent électrique.
- **Le régulateur** : est composé de deux parties.
  - Le comparateur** : qui reçoit l'information de référence et la grandeur mesurée dont il fait la différence  $\epsilon$  appelée **écart** ou **erreur** ;
  - Le correcteur** : dont le rôle sera d'éliminer cet écart, quelles que soient les perturbations, et d'amener le processus à réagir le plus rapidement, quelques soient les variations de l'entrée de référence ou les perturbations. C'est l'organe intelligent du système asservi.
- **L'actionneur** : reçoit du régulateur la grandeur réglante et l'amplifie en puissance, c'est le **muscle** de la chaîne qui va piloter l'évolution du processus (par exemple : moteur, vérin, vanne, etc)
- **Les flèches** : indiquent le sens dans le quel l'information ou le signal se transmet.

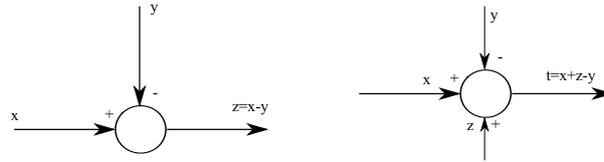


FIGURE 1.5 –

### 1.3 Exemple : Chauffage d'immeuble

La figure (1.6) représente le processus sans réglage automatique.

$\theta$  : la température à l'intérieur de la chambre.

$T$  : la température de l'eau chaude envoyé dans les radiateurs.

$\theta_e$  : la température extérieure. Pour obtenir  $\theta$ , il faut régler  $T$  à une valeur précise.

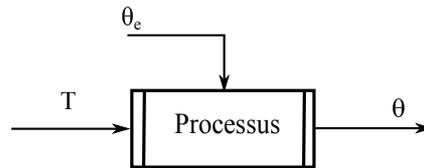


FIGURE 1.6 –

La figure (1.7) représente une première tentative de réglage automatique de  $T$ , du fait de l'influence de  $\theta_e$  sur la température désirée  $\theta$  il convient de varier  $T$  en fonction de  $\theta_e$  d'une sorte  $T = a(\theta_0 - \theta_e)$ .

En vue de définir les paramètres  $\theta_0$  et  $a$ , le chauffagiste pocèdra à des essais.

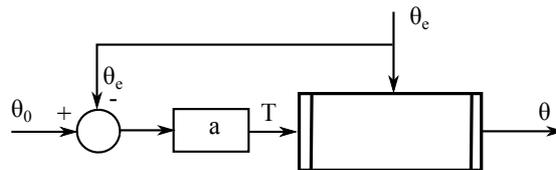


FIGURE 1.7 –

En effet, la température dans l'immeuble peut s'élever (pénétration) du soleil) sans que  $T$  ne soit réduite puisque elle ne dépend que de  $\theta_e$ . Donc, il y aura surchauffe.

Pour cela, il faut comparer  $\theta$  à une consigne  $\theta_c$  à l'aide d'une boucle d'asservissement.

Alors :  $\theta_0 = P(\theta_c - \theta)$ .

$\theta_c$  : température affichée sur le thermostat, Figure(1.8).

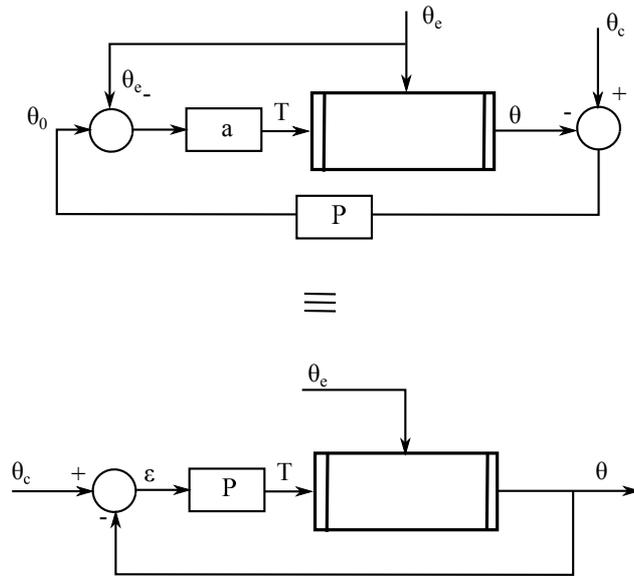


FIGURE 1.8 –

On peut déduire :

- $\theta_e$  n'est plus mesurée.
- $T = f(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = \theta_c - \theta$ .

## 1.4 Exercices

**Exercice 1 :** Tracer le schéma fonctionnel de l'équation suivante :

$$x_3 = a_1x_1 + a_2x_2 - 5$$

**Solution 1 :**

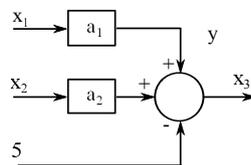


FIGURE 1.9 –

**Exercice 2 :** Tracer le schéma fonctionnel en B.O et en B.F qui correspondent au réseau diviseur de tension, Figure (1.10).

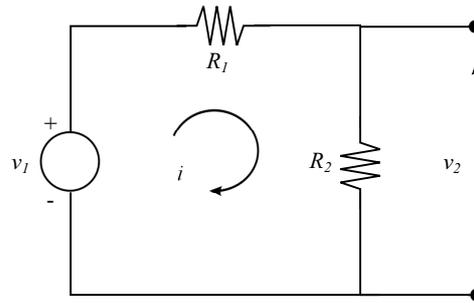


FIGURE 1.10 –

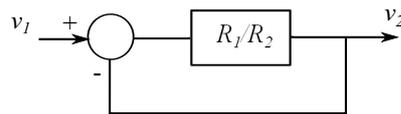
**Solution 2 :**

– Boucle fermée :  $v_2(R_1 + R_2) = v_1 R_2 \Rightarrow v_2 R_1 = R_2(v_1 - v_2)$

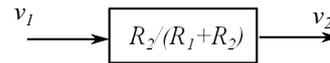
$v_2 = \frac{R_2}{R_1}(v_1 - v_2)$  le schéma fonctionnel se traduit dans ce cas par la figure (1.11a)

– Boucle ouverte : d'après la loi de Kirchoff, on peut écrire :

$v_2 = R_2 i$ ; d'autre part  $i = v_1 / (R_1 + R_2)$ , on obtient :  $v_2 = R_2 / (R_1 + R_2) v_1$ , dont le schéma fonctionnel est illustré sur la figure (1.8b)



(a)



(b)

FIGURE 1.11 –



# Chapitre 2

## Systemes linéaires et équations différentielles

### 2.1 Introduction

L'étude des systèmes asservis nécessite la description de la structure des systèmes et de ses constituants. Les schémas fonctionnels à leurs seuls ne suffisent pas, il est indispensable de décrire mathématiquement les relations qui caractérisent le système et ses éléments entre eux. Un système asservi est régi par un ensemble d'équations mathématiques. La solution de ces équations représente le comportement du système.

**Exemples :**

$$\vec{F} = m \vec{\gamma} , \quad \text{figure 2.1.(a)}$$

$$v = R i , \quad \text{figure 2.1.(b)}$$

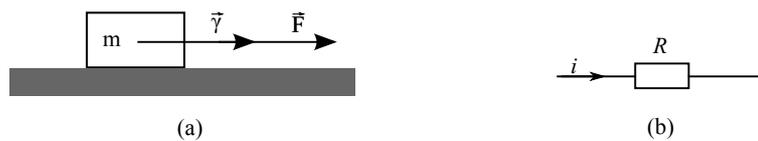


FIGURE 2.1 –

### 2.2 Équations différentielles

Les équations différentielles constituent un type d'équations qui ont de nombreuses applications dans la description des lois physiques.

On appelle équation différentielle n'importe quelle égalité algébrique qui comporte soit des différentielles soit des dérivées. On utilise beaucoup les équations différentielles pour lier les taux de variation des variables aux autres paramètres. **Exemples :**

- La loi de Newton :  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ .
- La loi de Kirchoff :  $v = R \frac{dq}{dt}$ .
- L'équation de la chaleur à une dimension :  $\frac{\partial T}{\partial x} = K \frac{\partial T}{\partial t}$

## 2.3 Equations différentielles aux dérivées partielles et Equations différentielles ordinaires

- On appelle équation différentielle aux dérivées partielles une égalité portant sur une variable dépendante et deux variables indépendantes au moins ; ainsi que sur les dérivées de la variable dépendante par rapport aux variables indépendantes.

**Exemple :**

$\frac{\partial T}{\partial x} = K \frac{\partial T}{\partial t}$ , est une équation aux dérivées partielles.  $T(x, t)$  est la variable dépendante, la distance  $x$  et le temps  $t$  sont des variables indépendantes.

- On appelle équation différentielle ordinaire, une égalité portant sur une variable dépendante au moins ; une variable indépendante, et une dérivée au moins des variables dépendantes par rapport à la variable indépendante. **Exemples :**

$f(t) = m \frac{dv}{dt}$ , est une équation différentielle ordinaire. La force  $f(t)$  et la vitesse  $v(t)$  sont des variables dépendantes, le temps  $t$  est la variable indépendante.

$v(t) = R \frac{dq}{dt}$ , est une équation différentielle ordinaire. La tension  $v(t)$ , la charge  $q(t)$  sont les variables dépendantes, le temps  $t$  est la variable indépendante.

- On appelle équation différentielle ordinaire, une équation de la forme :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = x(t) \quad (2.1)$$

où les  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  sont des constantes, le temps est la variable indépendante.

## 2.4 Équations différentielles dépendantes du temps et indépendantes du temps

- On appelle équation différentielle dépendante du temps, une équation différentielle où l'un au moins des termes dépend explicitement de la variable indépendante  $t$ .

**Exemple :**

$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = x$ , où  $x(t)$  et  $y(t)$  sont les variables dépendantes, c'est une équation différentielle dépendante du temps, puisque le terme  $t^2 \frac{d^2 y}{dt^2}$  dépend explicitement du temps par le coefficient  $t^2$ .

- On appelle équation différentielle indépendante du temps, une équation différentielle où aucun terme ne dépend explicitement de la variable indépendante  $t$  (le temps). Cette définition implique que le processus (système) décrit par équation différentielle indépendante du temps ne varie pas avec le temps.

**Exemple :**

L'expression (2.2) est une équation différentielle indépendante du temps, puisque elle ne dépend de  $t$  qu'implicitement par les variables liées  $x$  et  $y$  et leurs dérivées.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x}{dt^i} \quad (2.2)$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes.

## 2.5 Equations différentielles linéaires et non linéaires

- On appelle terme d'une équation différentielle ordinaire, un produit ou un quotient de fonction explicite de la variable indépendante  $t$ , et de fonction des variables dépendantes et de leurs dérivées.

**Exemple :**

$(\frac{5}{\cos t} (\frac{d^2 y}{dt^2}))$  est un terme du premier degré dans la variable dépendante  $y$ , tandis que  $2xy^3 (\frac{dy}{dt})$  est du cinquième degré dans les variables dépendantes  $x$  et  $y$ .

- On dit qu'un terme est linéaire s'il est du premier degré dans les variables dépendantes et leurs dérivées.
- On dit qu'une équation différentielle est linéaire si elle consiste en une somme de termes linéaires.

**Exemples :**

- 1) Les termes  $(\frac{dy}{dt})^3$ ,  $x \frac{dy}{dt}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos y$ , sont des termes non linéaires.
- 2)  $\frac{\partial T}{\partial x} = K \frac{\partial T}{\partial t}$ , ( $T = f(x, t)$ ) est une équation différentielle aux dérivées partielles linéaires car  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial t}$  sont du premier degré.
- 3) N'importe quelle équation différentielle ordinaire de la forme :  $\sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i(t) \frac{d^i x}{dt^i}$  où les coefficients  $a_i(t)$  et  $b_i(t)$  ne dépendent que de la variable  $t$  est une équation différentielle linéaire.

## 2.6 Linéarité et superposition

Cependant la notion de linéarité s'étend aux systèmes physiques qu'on peut classer en systèmes linéaires d'une part et en système non linéaires d'autre part. De plus, parmi les systèmes linéaires, on trouve les systèmes linéaires invariants et les systèmes linéaires variants. La première classification est basée sur le principe de superposition, la seconde sur le principe de permanence.

### 2.6.1 Principe de superposition

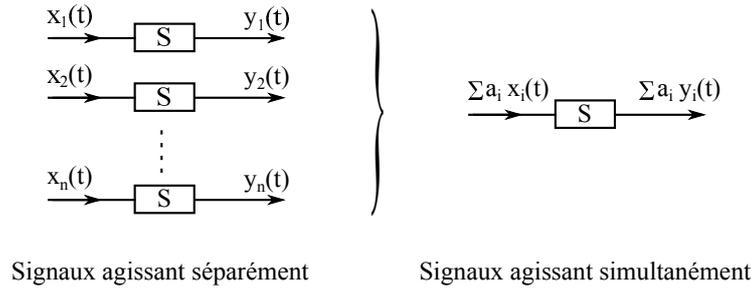


FIGURE 2.2 –

Si  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  sont les réponses d'un système aux signaux d'entrée  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  agissant séparément. La réponse de ce système à toute combinaison linéaire de ces signaux d'entrée,  $\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)$  (agissant simultanément) est la même combinaison linéaire des signaux de sortie  $\sum_{i=1}^n a_i y_i(t)$ , les  $a_i$  sont des constantes, figure 2.2.

Les systèmes qui satisfont le principe de superposition sont dits linéaires. Les notions de linéarité et de superposition sont donc équivalentes.

#### Exemples :

1) Un dérivateur de la forme :  $y(t) = \frac{dx}{dt}$  est un système linéaire car si on a :

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1'(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \rightarrow y_n(t) = x_n'(t) \end{array} \right\} \sum a_i x_i(t) \rightarrow y(t) = (\sum a_i x_i(t))'$$

$$\text{on aura alors : } y(t) = \sum a_i x_i'(t) \Rightarrow y(t) = \sum a_i y_i'(t)$$

2) Un quadrateur  $y(t) = x^2$  n'est pas un système linéaire, car si on a

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \rightarrow y_n(t) = x_n^2(t) \end{array} \right\} \sum a_i x_i(t) \rightarrow y(t) = (\sum a_i x_i(t))^2$$

$$\text{alors : } y(t) \neq \sum a_i x_i^2(t) \Rightarrow y(t) \neq \sum a_i y_i^2(t)$$

### 2.6.2 Principe de permanence

Si  $y(t)$  est la réponse d'un système à un signal  $s(t)$  agissant à l'instant  $t$ , la réponse de ce système au même signal mais différé de  $\tau$  sera sa réponse initiale différée d'autant, c-à-d  $y(t - \tau)$ , figure 2.3.

Les systèmes qui satisfont le principe de permanence sont dits invariants, figure 2.3.

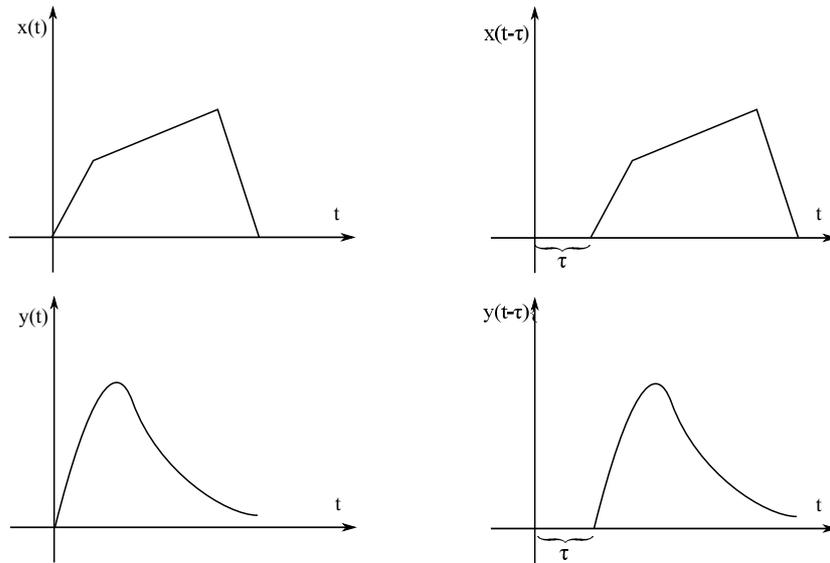


FIGURE 2.3 –

**Remarque :** Le grand intérêt des systèmes linéaires invariants réside dans la simplicité de leurs études mathématiques ; en outre ils constituent une excellente approximation pour de nombreux systèmes physiques qui, en toute rigueur ne sont ni exactement linéaires, ni exactement invariants.

## 2.7 Résolution d'une équation différentielle

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes

On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fonction  $y(t)$  vérifiant cette équation. Pour l'obtenir, on doit préciser deux points.

- 1) l'intervalle de temps ou l'on désire prendre la solution.
- 2) l'ensemble des  $n$  conditions initiales portant sur  $y(t)$  et ses  $n - 1$  premières dérivées, c-à-d  $y(0), \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}; \dots, \left. \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right|_{t=0}$

### La réponse totale

La réponse totale d'un système physique régit par une équation différentielle peut être décomposée en :

$$y_T(t) = y_L(t) + y_F(t) \tag{2.3}$$

$y_L(t)$  : est la réponse libre,

$y_F(t)$  : est la réponse forcée.

**a) Réponse libre :** est par définition la réponse à des conditions initiales définies (C.I  $\neq 0$ ), le signal

d'entrée étant nul :  $x(t) = 0$ .

En conséquence, c'est la solution de l'équation différentielle sans second membre :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0 \quad (2.4)$$

Son expression s'obtient à partir des racines de l'équation caractéristique :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i = 0 \quad (2.5)$$

• Si les racines de cette équation sont distinctes, alors

$$y_1 = e^{D_1 t}, \quad y_2 = e^{D_2 t}, \quad \dots, y_n = e^{D_n t}$$

et la réponse libre s'écrit :

$$y_L(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{D_i t} \quad (2.6)$$

$A_i$  se calculent à partir des conditions initiales connues.

• Si les racines sont multiples, alors à chaque racine  $D_j$  de multiplicité  $n_j$  correspondent  $n_j$  modes ( $e^{D_j t}, t e^{D_j t}, \dots, t^{n_j-1} e^{D_j t}$ )

**b) Réponse forcée :** un système est en régime forcé quand il est soumis, à partir de son état d'équilibre à un signal d'entrée, le signal  $x(t)$  est donc appliqué à l'instant  $t_0$  (tels que  $y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = 0$ ), sa réponse forcée s'écrit de la forme générale :

$$y_F(t) = \int_{t_0}^t g(t-t') e(t') dt' \quad (2.7)$$

En posant

$$e(t) = \sum_{k=0}^r b_k x^k(t)$$

Où  $g(t)$  est la combinaison linéaire  $\sum_{i=1}^n c_i y_i(t)$  c-à-d que  $g(t)$  est une réponse libre de l'équation différentielle avec les conditions initiales suivantes :

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad \dots, \quad g^{(n-2)}(0) = 0, \quad g^{(n-1)}(0) = 1/a_n.$$

### Réponse permanente

On appelle réponse permanente la partie de la réponse totale qui ne tend pas vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

### Réponse transitoire

C'est la partie de la réponse totale qui disparaît quand  $t$  tend vers l'infini.

### Les signaux élémentaires

On utilise pour l'étude des systèmes asservis des fonctions particulières d'entrée, les fonctions généralement utilisées sont :

a) **Fonction échelon unité** : (Figures 2.4 et 2.5)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

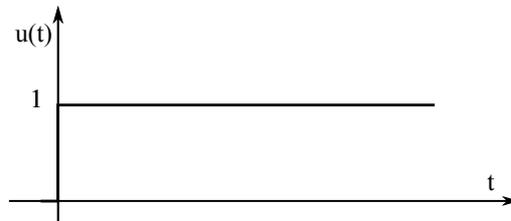


FIGURE 2.4 –

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

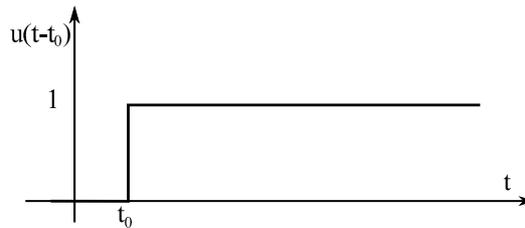


FIGURE 2.5 –

Si le système est excité par un échelon unité, on dit que la réponse obtenue est une réponse indicielle.

b) **Fonction pente (rampe) unité** : ((Figures 2.6 et 2.7)

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

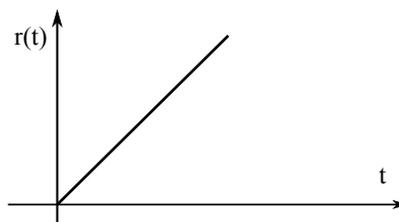


FIGURE 2.6 –

$$r(t - t_0) = \begin{cases} t - t_0 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

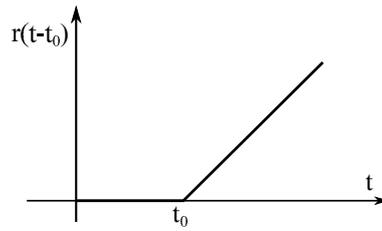


FIGURE 2.7 –

**b) Fonction impulsion unité : (Impulsion de Dirac) (Figure 2.8)**

Elle est définie par :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \frac{1}{\Delta t} & t = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} \delta(t) dt = 1$$

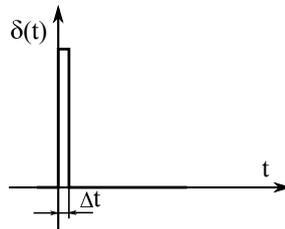


FIGURE 2.8 –

On dit que la réponse est impulsionnelle lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac.

## 2.8 Exercices

**Exercice 1 :** Considérons les équations suivantes :

1)  $y = a_1 x_1 - a_2 x_2 + 10$

2)  $y = a_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}$

3)  $y = \int x_1 dt$

4)  $y = \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} + x_1$

Où  $y$  : signal de sortie,

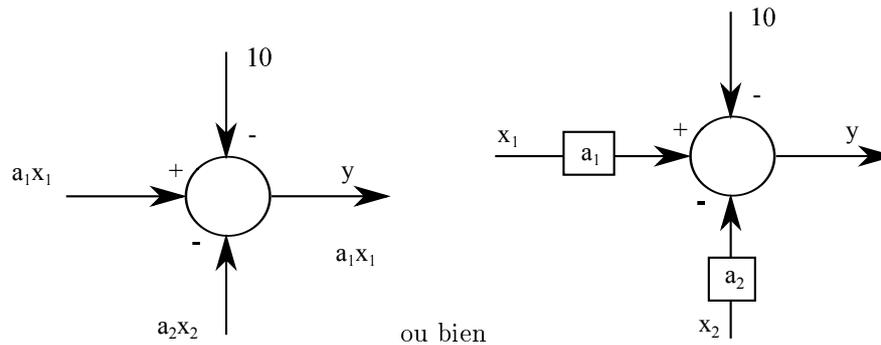
$x_1, x_2$  : signaux d'entrées,

$a_1, a_2$  : constantes.

- Tracez les schémas fonctionnels représentant ces fonctions.

**Solution :**

1)



ou bien  
FIGURE 2.9 –

2)

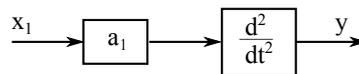


FIGURE 2.10 –

3)

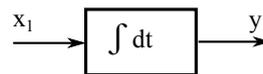


FIGURE 2.11 –

4)

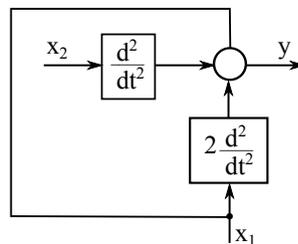


FIGURE 2.12 –

**Exercice 2 :** Classifier les équations différentielles suivantes en équations ordinaires et équations aux dérivées partielles. Quelles sont les variables indépendantes et les variables dépendantes ?

- 1)  $\frac{dy}{dt} + y = x + \frac{dx}{dt}$
- 2)  $\frac{\partial z}{\partial x} + x = \frac{\partial z}{\partial y} + y$

**Solution**

- 1) Equation différentielle ordinaire ;  $x, y$  : variables dépendantes,  $t$  : variable indépendante.
- 2) Equation différentielle aux dérivées partielles,  $z$  : variable dépendante,  $x, y$  : variables indépendantes.

**Exercice 3 :**

Soit un système du premier ordre décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = Kx(t), \quad \tau > 0 \quad (*)$$

A l'instant  $t_0$  où le signal  $x(t)$  est appliqué, la valeur de  $y$  est  $y_0$

- 1) Trouvez la réponse totale du système.
- 2) Calculez sa réponse pour un signal d'entrée  $x(t) = \cos \omega t$

**Solution :**

- 1) La réponse totale :

$$y_T = y_L + y_F$$

$y_L(t)$  (réponse libre)

pour  $x(t) = 0$ , l'équation (\*)  $\Rightarrow \tau D + 1 = 0 \Rightarrow D = -1/\tau$

donc  $y_1(t) = e^{-1/\tau t}$

$y_L(t) = A_1 e^{-1/\tau t}$ ,  $A_1$  se calcule à l'instant  $t_0$  :  $y(t_0) = y_0 \Rightarrow A_1 e^{-t_0/\tau} = y_0 \Rightarrow A_1 = y_0 e^{t_0/\tau}$

On aura :

$$y_L(t) = y_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$$

$y_F(t)$  (réponse forcée)

$y_F(t) = \int_{t_0}^t g(t-t') e(t') dt'$ ; avec  $e(t') = Kx(t')$

on a :  $g(t) = \sum_{i=0}^n c_i y_i(t) = c_1 y_1(t) = c_1 e^{-t/\tau}$

$$g(0) = \frac{1}{\tau} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\tau}$$

$$g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow g(t-t') = \frac{1}{\tau} e^{-(t-t')/\tau}$$

la réponse forcée peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} y_F(t) &= \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} e^{-(t-t')/\tau} Kx(t') dt' \\ &= \frac{K}{\tau} \int_{t_0}^t x(t') e^{-(t-t')/\tau} dt' \end{aligned}$$

Alors :

$$y_T(t) = \frac{K}{\tau} \int_{t_0}^t x(t') e^{-(t-t')/\tau} dt' + y_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$$

**2) Application :**

On a  $x(t') = \cos \omega t' = \Re [e^{i\omega t'}]$

$$\begin{aligned} y_F(t) &= \frac{K}{\tau} \int_{t_0}^t e^{-(t-t')/\tau} \cdot \Re [e^{i\omega t'}] dt' \\ &= \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot \Re \left[ \int_{t_0}^t e^{(i\omega + \frac{1}{\tau})t'} dt' \right] \\ &= \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot \Re \left[ \frac{\tau}{1 + i\tau\omega} e^{i\omega t'} \cdot e^{t'/\tau} \right]_{t_0}^t \\ &= \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot \Re \left[ \frac{\tau \cdot e^{t'/\tau}}{1 + i\tau\omega} (\cos \omega t' + i \sin \omega t') \right]_{t_0}^t \quad (\text{en multipliant par le conjugué de } 1 + i\tau\omega) \\ &= \frac{K \cdot e^{-t/\tau}}{1 + \omega^2 \tau^2} \left[ e^{t'/\tau} \cdot (\cos \omega t' + \tau\omega \sin \omega t') \right]_{t_0}^t \end{aligned}$$

$$y_F(t) = \underbrace{\frac{K}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos \omega t + \tau \omega \sin \omega t)}_{\text{régime permanent}} - \underbrace{\frac{K \cdot e^{-(t-t_0)/\tau}}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos \omega t_0 + \tau \omega \sin \omega t_0)}_{\text{régime transitoire}}$$

Pour  $t \gg t_0 + \tau$  la réponse forcée tend vers le régime permanent, c-à-d

$$y_p(t) = \frac{K}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos \omega t + \tau \omega \sin \omega t). \text{ Posant } \tan \phi = -\omega \tau, \text{ on aura finalement :}$$

$$y_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

**Exercice 4 :** Quelle est la réponse forcée ( $t > 0$ ) du système régi par l'équation différentielle  $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x' + x$  au signal d'entrée  $x(t) = 1$  (échelon unité) appliqué à l'instant  $t = 0$  ?

**Solution :**

$$\frac{1}{4}D^2 + D + 1 = 0 \quad \Rightarrow \text{une racine double } D_1 = D_2 = -2$$

donc

$$g(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}.$$

En utilisant les conditions  $g(0) = 0$  et  $g'(0) = 4$ , on obtient  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 4$

la substitution de  $g(t - t')$  dans l'expression de la réponse forcée nous permet d'écrire :  $y_F(t) = \int_0^t 4(t - t') \cdot e^{-2(t-t')} dt' = - \int_t^0 4\theta e^{-2\theta} d\theta$

la réponse forcée est :

$$y_F(t) = 1 - (1 + 2t) e^{-2t}$$

**Exercice supplémentaire :**

Trouvez la réponse libre du système décrit par l'équation différentielle :

$$y'' + \omega_0^2 y = 0, \text{ avec les conditions initiales } y(0) = 0, y' = 1$$

**Solution :**  $y_L(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$



# Chapitre 3

## Transformation de Laplace

### 3.1 Introduction

La transformée de Laplace (TL) est une technique très employée en asservissement pour transformer une fonction dépend du temps en une fonction dépend d'une variable complexe. Elle permet de transformer des équations différentielles d'ordre quelconque dans le domaine du temps en des équations algébriques de même ordre dans le domaine complexe.

### 3.2 Définition

Soit  $f(t)$  une fonction de la variable réelle  $t$  définie pour  $t > 0$ , nulle pour  $t < 0$ . On appelle transformation de Laplace de  $f(t)$  la fonction :

$$F(S) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-St} dt \quad (3.1)$$

$S$  : variable complexe ( $S = \sigma + j\omega$ ).

**Exemple :**  $f(t) = e^{-2t}$

La transformée de Laplace est :

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \int_0^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{-St} dt = \int_0^{\infty} e^{-(S+2)t} dt \Rightarrow \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{-1}{S+2} e^{-(S+2)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$\text{donc } \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{S+2}.$$

### 3.3 Propriétés de la transformation de Laplace

1. Si  $\mathcal{L}[f(t)] = F(S)$  alors

$$\mathcal{L}[kf(t)] = k F(S) \quad (k : \text{constante}) \quad (3.2)$$

**Exemple :**

$$f(t) = e^{-2t}, \text{ sachant que } F(S) = \frac{1}{S+2}$$

$$\mathcal{L}[3e^{-2t}] = \frac{3}{S+2} = 3F(S)$$

2.

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (3.3)$$

**Exemple :**

$$\mathcal{L}[e^{-2t} + e^{-t}] = \int_0^\infty (e^{-2t} + e^{-t}) \cdot e^{-St} dt = \int_0^\infty e^{-2t} \cdot e^{-St} dt + \int_0^\infty e^{-t} \cdot e^{-St} dt = \frac{1}{S+2} + \frac{1}{S+1} = \mathcal{L}[e^{-2t}] + \mathcal{L}[e^{-t}]$$

3.

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = S F(S) - f(0) \quad (3.4)$$

**Exemple**

$$f(t) = e^{-2t} \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{d e^{-2t}}{dt}\right] = S \frac{1}{S+2} - 1 = -2 \frac{1}{S+2} = \mathcal{L}[-2 e^{-2t}]$$

En général,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = S^n F(S) - \sum_{i=0}^{n-1} S^{n-1-i} \frac{d^i f(0)}{dt^i} \quad (3.5)$$

4.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(S)}{S} \quad (3.6)$$

**Exemple**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-2t}\right] = \frac{1}{S} \frac{1}{S+2} = \frac{1}{S(S+2)}$$

5. le cas général, on aura :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int \dots \int f(t) dt \dots d\tau\right] = \frac{F(S)}{S^n} \quad (3.7)$$

6. La valeur initiale  $f(0)$  de la fonction  $f(t)$  dont  $\mathcal{L}[f(t)] = F(S)$  est :

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{S \rightarrow \infty} S F(S); \quad t > 0 \quad (3.8)$$

**Exemple**

$$f(t) = e^{-2t}$$

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-2t} = \lim_{S \rightarrow \infty} S \left(\frac{1}{S+2}\right) = 1$$

7. La valeur finale  $f(\infty)$  de la fonction  $f(t)$  est :

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{S \rightarrow 0} S F(S) \quad (3.9)$$

**Exemple**

$$f(t) = e^{-2t}$$

$$f(\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-2t} = \lim_{S \rightarrow 0} S \left( \frac{1}{S+2} \right) = 0$$

8.  $\mathcal{L} \left[ f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = a F(a \cdot S)$

**Exemple**

Etant donné  $\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{S+1}$ ,  $a = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{L} \left[ f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = \mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2}S+1} \right]$$

9. Transformée de Laplace de la fonction échelon unité :

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{S} \tag{3.10}$$

10. Transformée de Laplace de la fonction impulsion de Dirac :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \tag{3.11}$$

11. Transformée de Laplace de la fonction pente unité :

$$\mathcal{L}[r(t)] = \frac{1}{S^2} \tag{3.12}$$

12.

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{S+a} \tag{3.13}$$

13.

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{S^2+1}; \quad \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{S^2+\omega^2} \tag{3.14}$$

14.

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{S}{S^2+1}; \quad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{S}{S^2+\omega^2} \tag{3.15}$$

15.

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(S+a)^2+\omega^2} \tag{3.16}$$

16.

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{S+a}{(S+a)^2+\omega^2} \tag{3.17}$$

### 3.4 L'inversion de la transformée de Laplace

Soit donnée la transformée  $F(S)$ , le passage de cette fonction à la fonction  $f(t)$  c'est l'inversion de transformation de Laplace, on la note :  $\mathcal{L}^{-1}F(S)$ , telle que :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = f(t) \tag{3.18}$$

### 3.5 Application de la T.L. à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants

L'application de la T.L. à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants est de la plus grande importance des problèmes portant sur les systèmes de commande linéaires.

Considérons les équations à coefficients constants de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x}{dt^i}; \quad a_n = 1, \quad m \leq n \quad (3.19)$$

$x$  : signal d'entrée,  $y$  : signal de sortie.

Les conditions aux limites sont :  $x_0^k = \left. \frac{d^k x}{dt^k} \right|_{t=0}$ ,  $y_0^k = \left. \frac{d^k y}{dt^k} \right|_{t=0}$ . La transformée de Laplace de l'équation 3.19 est :

$$\sum_{i=0}^n \left[ a_i \left( S^i Y(S) - \sum_{k=0}^{i-1} S^{i-1-k} y_0^k \right) \right] = \sum_{i=0}^m \left[ b_i \left( S^i X(S) - \sum_{k=0}^{i-1} S^{i-1-k} x_0^k \right) \right]$$

qui peut s'écrire

$$Y(S) = \left[ \frac{\sum_{i=0}^m b_i S^i}{\sum_{i=0}^n a_i S^i} \right] X(S) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i S^{i-1-k} x_0^k - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i S^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^n a_i S^i}$$

On peut déduire :

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\sum_{i=0}^m b_i S^i}{\sum_{i=0}^n a_i S^i} X(S) - \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^{i-1} b_i S^{i-1-k} x_0^k}{\sum_{i=0}^n a_i S^i} \right]}_{\text{Réponse forcée}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i S^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^n a_i S^i} \right]}_{\text{Réponse libre}} \quad (3.20)$$

### 3.6 Décomposition de la transformée de Laplace en éléments simples

les transformées de Laplace des équations différentielles sont souvent représentées sous forme de quotient de deux polynômes en  $S$ . La décomposition de ce quotient en éléments simples nous permet de trouver rapidement la transformation inverse de Laplace.

Soit :  $F(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i S^i}{\sum_{i=0}^n a_i S^i}$   $a_n = 1$ ;  $n \geq m$

Le polynôme  $\sum_{i=0}^n a_i S^i$  possède  $n$  racines, les racines peuvent être uniques ou multiples.

- Si le polynôme possède  $n_1$  racines égales à  $P_1$ ,
- Si le polynôme possède  $n_2$  racines égales à  $P_2$ ,
- ⋮

– Si le polynôme possède  $n_r$  racines égales à  $P_r$ ,

Alors :

$$\sum_{i=0}^n a_i S^i = \prod_{i=1}^r (S - P_i)^{n_i}; \quad \sum_{i=0}^r n_i = n \quad (3.21)$$

**Exemple 3.6.1**  $S^2 + 3S + 2 = (S + 1)(S + 2)$

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = 1 \rightarrow P_1 = -1 \\ n_2 = 1 \rightarrow P_2 = -2 \end{array} \right\} r = 2 \text{ et } \sum n_i = 2 = n$$

**Exemple 3.6.2**  $S^3 - 5S^2 + 8S - 4 = (S - 2)^2(S - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = 2 \rightarrow P_1 = 2 \\ n_2 = 1 \rightarrow P_2 = 1 \end{array} \right\} r = 2 \text{ et } \sum n_i = 3 = n$$

Nous pouvons mettre

$$F(s) = \sum_{i=0}^m b_i S^i / \prod_{i=1}^r (S - P_i)^{n_i} \quad (3.22)$$

Le développement en éléments simples est :

$$F(S) = b_n + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(S - P_i)^k} \quad (3.23)$$

où

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{d^{n_i - k}}{dS^{n_i - k}} [(S - P_i)^{n_i} \cdot F(S)]_{S=P_i} \quad (3.24)$$

Les coefficients  $C_{ik}$ ,  $i = 1, r$  sont les résidus de  $F(S)$  en  $P_i$

– Si il n'existe pas des racines multiples :

$$F(S) = b_n + \sum_{i=1}^r \frac{C_{i1}}{S - P_i}; \quad C_{i1} = (S - P_i) \cdot F(S)|_{S=P_i} \quad (3.25)$$

**Exemple 3.6.3**

$$F(S) = \frac{2S + 1}{S^2 - 4S + 3}$$

on peut écrire  $F(S) = \frac{2S + 1}{(S - 1)(S - 3)}$

ou sous la forme  $F(S) = \frac{C_{11}}{S - 1} + \frac{C_{21}}{S - 3}$

avec

$$\begin{aligned} C_{11} &= (S - 1) \cdot F(S)|_{S=1} = \frac{-3}{2} \\ C_{21} &= (S - 3) \cdot F(S)|_{S=3} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

on peut écrire finalement :

$$F(S) = \frac{-3}{2} \left( \frac{1}{S - 1} \right) + \frac{7}{2} \left( \frac{1}{S - 3} \right)$$

**Exemple 3.6.4**

$$F(S) = \frac{1}{(S+1)^2(S+2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = 2 \longrightarrow P_1 = -1 \\ n_2 = 1 \longrightarrow P_2 = -2 \end{array} \right\} r = 2 \text{ et } \sum n_i = 3 = n$$

on peut écrire  $F(S) = b_3 + \frac{C_{11}}{S+1} + \frac{C_{12}}{(S+1)^2} + \frac{C_{21}}{S+2}$ ;  $b_3 = 0$

avec :

$$C_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dS^{2-1}} [(S+1)^2 \cdot F(S)]_{S=-1} = \frac{-1}{(S+2)^2} \Big|_{S=-1} = -1$$

$$C_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{2-2}}{dS^{2-2}} [(S+1)^2 \cdot F(S)]_{S=-1} = \frac{1}{S+2} \Big|_{S=-1} = 1$$

$$C_{21} = \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dS^{1-1}} [(S+2)^1 \cdot F(S)]_{S=-2} = \frac{1}{(S+1)^2} \Big|_{S=-2} = 1$$

donc :  $F(S) = \frac{-1}{S+1} + \frac{1}{(S+1)^2} + \frac{1}{S+2}$

### 3.7 Détermination des inverses par utilisation du développement en éléments simples

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{i=0}^m b_i S^i / \sum_{i=0}^n a_i S^i \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ b_n + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(S-P_i)^k} \right] \tag{3.26}$$

$$= b_n \delta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(k-1)!} t^{(k-1)} e^{P_i t} \tag{3.27}$$

**Exemple 3.7.1**  $F(S) = \frac{S^2 + 2S + 2}{(S+1)(S+2)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(S)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ 1 + \frac{1}{S+1} - \frac{2}{S+2} \right] = \mathcal{L}^{-1}[1] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{S+1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{S+2} \right] \\ \Rightarrow f(t) &= \delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t} \end{aligned}$$

**Exemple 3.7.2**  $\frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 6y = \frac{d^2 x}{dt^2} - x$

avec :  $y(0) = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0$ ;  $\frac{d^2 y}{dt^2} \Big|_{t=0} = 1$

- Trouvez  $Y(S)$

$$S^3 Y(S) - S^2 y(0) - S y'(0) - y''(0) + 3 [S^2 Y(S) - S y(0) - y'(0)] - [S Y(S) - y(0)] + 6 Y(S) = S^3 X(S) - S x(0) - x'(0) - X(S)$$

$$Y(S) [S^3 + 3S^2 - S + 6] - 1 = (S^2 - 1) X(S)$$

$$Y(S) = \frac{S^2 - 1}{S^3 + 3S^2 - S + 6} X(S) + \frac{1}{S^3 + 3S^2 - S + 6}$$

**Exemple 3.7.3**  $F(S) = \frac{-1}{S+1} + \frac{1}{(S+1)^2} + \frac{1}{S+2}$   
 $\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{S+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S+2}\right]$   
 $f(t) = -e^{-t} + t e^{-t} + e^{-2t}$

## Exercices

**Exercice 3.7.1** Calculer les fonctions des transformées de Laplace suivantes

-  $F(S) = \frac{5}{S^2+4} + \frac{20S}{S^2+9}$

-  $F(S) = \frac{7}{S^2+10S+41}$

-  $F(S) = \frac{S+3}{S^2+2S+10}$

-  $F(S) = \frac{4S+4}{S^2-7S+12}$

-  $F(S) = \frac{S^2+7S+10}{S^3+7S^2+15S+9}$

**Exercice 3.7.2** 1) Trouvez la transformée de Laplace de :

-  $f(t) = e^{-t} + \cos t$

-  $\mathcal{L}\left[\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right]$

-  $f(t) = 2 \sin(\omega t - 30)$

2) Trouvez la valeur finale et initiale ( $f(\infty)$  et  $f(0)$ ) de  $f(t) = e^{-t} + \cos t$

**Exercice 3.7.3** Si  $f(t)$  a pour transformée  $F(S)$ , trouvez alors la transformée  $F'(S)$

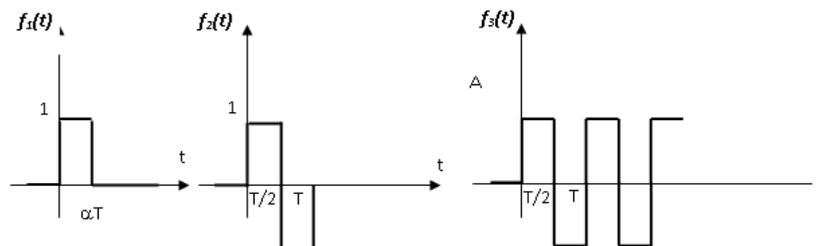
**Exercice 3.7.4** Si  $f(t) \rightarrow F(S)$ , calculez la transformée  $F(t - t_0)$

**Exercice 3.7.5** Résolution l'équation différentielle suivante, en utilisant la méthode de La Laplace.

$$y'' + 9y' + 20y = 1$$

$$y(0) = 1; y'(0) = 5$$

**Exercice 3.7.6** Rechercher en décomposant en éléments simples les transformées des fonctions suivantes :





# Chapitre 4

## La fonction de transfert

### 4.1 Définition

Nous appelons fonction de transfert ou (transmittance) du système, le rapport des transformées de Laplace de la grandeur de sortie et la grandeur d'entrée du système, lorsque les conditions initiales sont nulles. On la note  $W$ ,  $P$ ,  $F$ .

$$W(S) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S^1 + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S^1 + a_0} \quad (4.1)$$

$n$  : degré du dénominateur est appelé l'ordre du système.

Pôles : racines du dénominateur.

Zéros : racines du numérateur.

**Exemple 4.1.1**  $\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{dx}{dt} + x$ , avec des conditions initiales nulles.

$$(S + 2)Y(S) = (S + 1)X(S)$$

$$\Rightarrow W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{S + 1}{S + 2}$$

Les zéros :  $S = -1$  ; les pôles :  $S = -2$

**Exemple 4.1.2**  $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 5y = x$

$$S^2Y(S) - 4SY(S) + 5Y(S) = X(S) \Rightarrow W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{S^2 - 4S + 5}$$

Il n'y a plus de zéros ; deux pôles :  $S_1 = 2 - j$  ;  $S_2 = 2 + j$

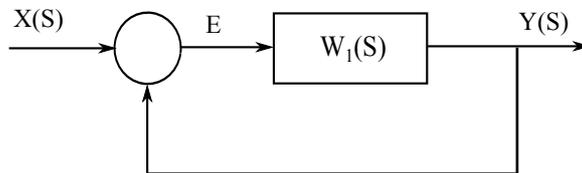
### 4.2 Propriétés de la fonction de transfert

1. Une fonction de transfert est définie pour un système linéaire et invariant.
2. La fonction de transfert est indépendante de la nature de l'entrée.
3. La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse à l'impulsion.

4. On peut obtenir l'équation différentielle du système à partir de la fonction de transfert en remplaçant la variable  $S$  par l'opérateur différentiel  $D$  défini par :  $\frac{D}{dt}$ .
5. L'équation caractéristique du système s'obtient en égalant à zéro le dénominateur de la fonction de transfert du système, par conséquent, on peut évaluer la stabilité du système.
6. On peut définir à une constante près, la fonction de transfert du système par la donnée de ses pôles et de ses zéros, cette constante, généralement notée  $K$ , s'appelle le facteur de gain du système (x : pôle, o zéro).

### 4.3 Algèbre des schémas fonctionnels

Considérons un schéma fonctionnel avec retour unitaire :



La transmittance de la chaîne ouverte est :

$$W_1(S) = \frac{Y(S)}{E(S)}.$$

La transmittance de la chaîne fermée avec retour unitaire est :

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}; \quad W(S) = \frac{W_1(S) \cdot E(S)}{Y(S) + E(S)}$$

On remplace  $Y(S)$  par  $W_1(S) \cdot E(S)$ , on obtient

$$W(S) = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S)} \quad (4.2)$$

Si le retour est positif, on aura donc :

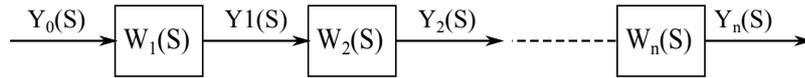
$$W(S) = \frac{W_1(S)}{1 - W_1(S)} \quad (4.3)$$

\*) Considérons un schéma fonctionnel avec retour non unitaire. Dans ce cas  $E(S) = X(S) - W_2(S) \cdot Y(S)$ . L'expression de la transmittance du système s'écrit :

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{W_1(S)}{1 \pm W_1(S) \cdot W_2(S)} \quad (4.4)$$

#### 4.3.1 Établissement des schémas fonctionnels en utilisant les fonctions de transfert.

##### 1) Montage en série



D'après le schéma, on a :

$$Y_1(S) = W_1(S)Y_0(S), \quad Y_2(S) = W_2(S)Y_1(S), \quad \dots, \quad Y_n(S) = W_n(S)Y_{n-1}(S)$$

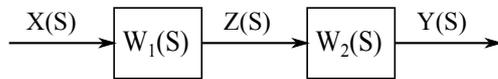
$$W(S) = \frac{Y_n(S)}{Y_0(S)} = \frac{W_n(S)W_{n-1}(S)W_{n-2}(S)\dots W_1(S)Y_0(S)}{Y_0(S)}$$

On obtient :

$$W(S) = \prod_{i=1}^n W_i(S) \tag{4.5}$$

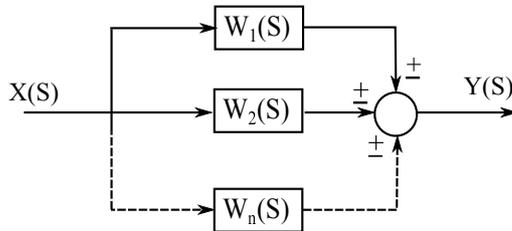
**Exemple 4.3.1**  $W_1(S) = \frac{Z(S)}{X(S)}$ ;  $W_2(S) = \frac{Y(S)}{Z(S)} \Rightarrow \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{W_2(S) \cdot W_1(S) \cdot X(S)}{X(S)}$

On a donc :  $W(S) = W_1(S) \cdot W_2(S)$



1) Montage en parallèle

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \sum_{i=1}^n \pm W_i(S) \tag{4.6}$$

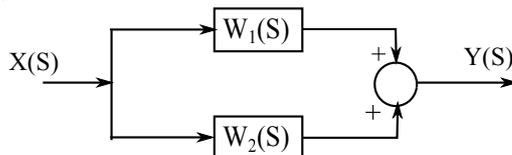


**Exemple 4.3.2**  $Y(S) = Y_1 + Y_2(S)$

Avec  $Y_1(S) = W_1(S) \cdot X(S)$  et  $Y_2(S) = W_2(S) \cdot X(S)$

Alors, on peut écrire :  $Y(S) = X(S)(W_1(S) + W_2(S))$

$$\Rightarrow W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = W_1(S) + W_2(S)$$

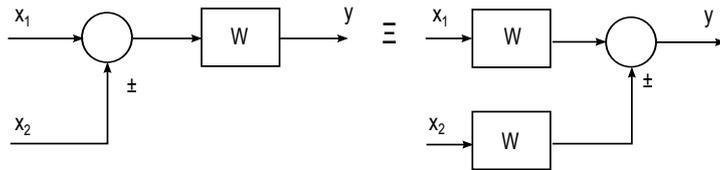


**Remarques**

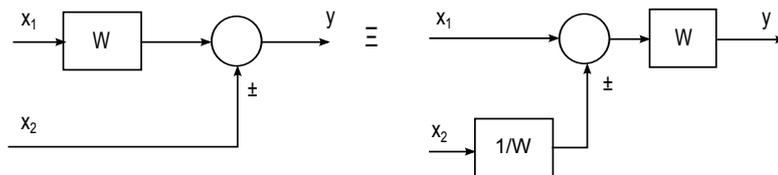
\* Lors de l'établissement de schéma fonctionnel, il est parfois nécessaire de procéder au déplacement des comparateurs et des points de dérivation.

**1) Déplacement d'un comparateur**

En déplaçant un comparateur dans le même sens de direction du signal (en aval), il faut ajouter un élément dont la fonction de transfert est égale à celle de l'élément à travers lequel le comparateur a été déplacé.



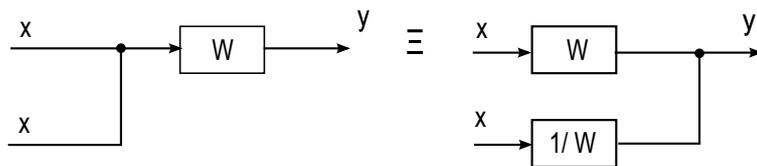
\* Si le déplacement est en amont, il faut ajouter un élément comme le cas précédent dont la fonction de transfert est égale à l'inverse.



**2) Déplacement d'un point de dérivation**

En déplaçant un point de dérivation, il faut ajouter aussi un autre élément.

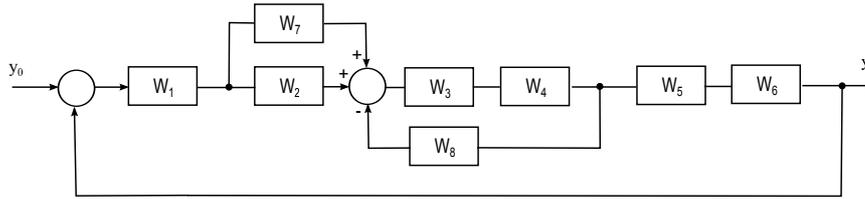
\* Si le point de dérivation est déplacé dans le sens de direction du signal de la chaîne d'action, on ajoute un élément dont la fonction de transfert est égale à l'inverse de la Fonction de transfert de l'élément à travers lequel le point de dérivation a été déplacé.



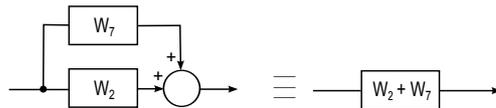
\* Dans le cas contraire (en amont), la fonction de transfert est égale à la fonction de transfert de l'élément à travers lequel le point a été déplacé.



**Exemple 4.3.3** En utilisant les règles précédentes de disposition des éléments. On peut reproduire un schéma fonctionnel à contour multiple en un schéma à contour simple.



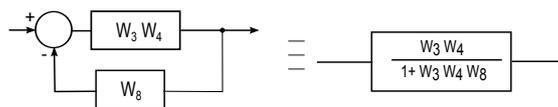
**Etape 1**



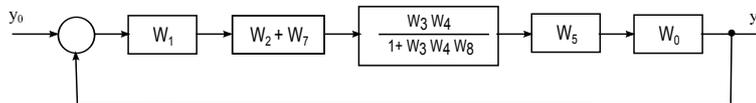
**Etape 2**



**Etape 3**



**Etape 4**



Avec

$$W_0 = W_1 W_5 W_6 (W_2 + W_7) \frac{W_3 W_4}{1 + W_3 W_4 W_8}$$

On aura finalement :

$$W_F = \frac{W_0}{1 + W_0}$$

## 4.4 Exercices

**Exercice 4.4.1** Simplifier le schéma fonctionnel illustré sur la figure (??) sous forme canonique. - Ramener le système représenté par le schéma fonctionnel, figure (??) à un système à retour unitaire.

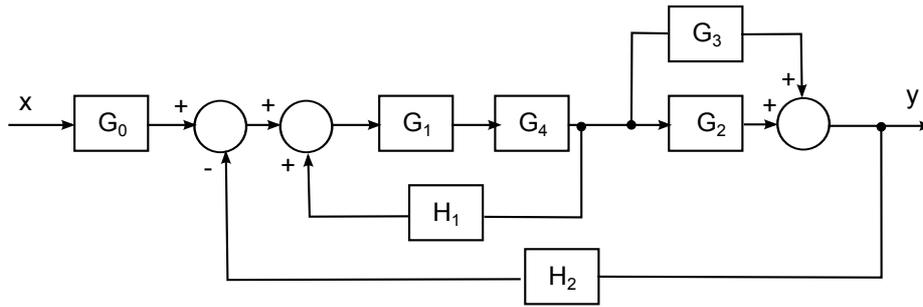


FIGURE 4.1 –

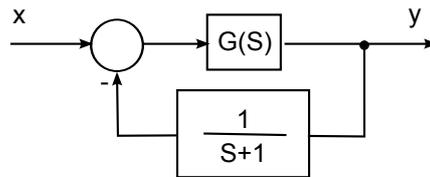


FIGURE 4.2 –

**Exemple 4.4.2** Soit le système représenté par le schéma fonctionnel ; Figure (4.3)

1. Donner la fonction de transfert en  $X(S)$  et  $Y(S)$ .
2. On donne ;  $H_1(S) = \frac{1}{S+1}$  ;  $H_2(S) = 50$  ;  $H_3(S) = \frac{1}{1+20S}$  ;  $H_4(S) = 1$ .  
- Calculer la valeur finale lorsque  $x(t)$  est un Échelon unité.

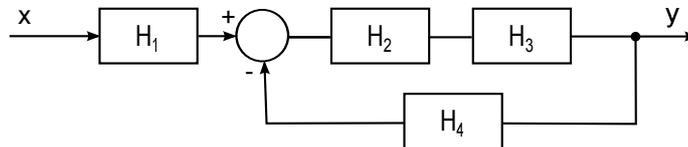


FIGURE 4.3 –

**Exemple 4.4.3** Soit l'exemple d'un four électrique. L'entrée de commande est la puissance électrique  $P(t)$ , la sortie observée est la température du four  $\theta(t)$ . ( $\theta$  représente la température au dessus de l'ambiante).

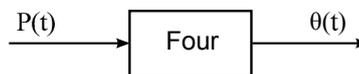


FIGURE 4.4 –

1. Écrivez le bilan énergétique de l'installation pendant un temps  $dt$ .  
On donne ( $C$  : pouvoir calorifique du four, l'énergie perdue par rayonnement vaut  $K\theta dt$ ).
2. En utilisant la fonction de transfert, trouvez la réponse du système à l'échelon unité, à l'impulsion de Dirac.

**Exemple 4.4.4** On applique une impulsion à l'entrée d'un système, et on observe pour signal de sortie la fonction  $e^{-2t}$ .

- Trouvez la fonction de transfert du système.



# Chapitre 5

## Stabilité

### 5.1 Définition

lorsque un processus, lui même stable est contrôlé par une boucle d'asservissement, il peut arriver que le système bouclé ne soit pas stable, il est donc indispensable de bien connaitre les conditions d'une bonne stabilité avant de refermer la boucle.

- On dit q'un système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini  $\infty$ .

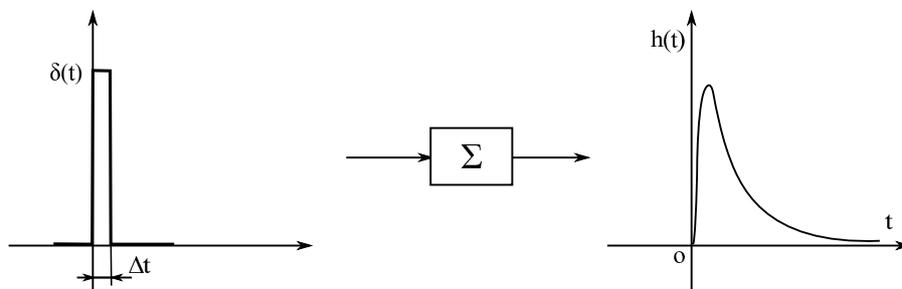


FIGURE 5.1 –

- Un système est dans un état d'équilibre stable si, écarté de cet état, il tend à y revenir, éventuellement en oscillant avec une amplitude décroissante. Il en résulte, qu'en l'absence de signal d'entrée le signal de sortie d'un système stable tend vers zéro quelles que soient les conditions initiales, d'autre part, que l'application d'un signal bornée donne lieu à un signal de sortie borné.

Conclusion : Un système n'est stable que si la partie réelle des racines de son équation caractéristiques est négative, c-à-d si les racines sont situées dans le demi plan gauche, si des racines sont sur l'axe des imaginaires, le système est marginalement stable.

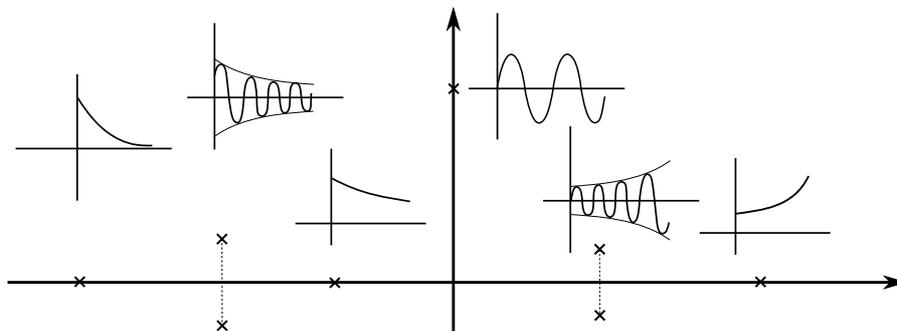


FIGURE 5.2 –

## 5.2 Critères de stabilité

Une fois élaboré le modèle d'un système, on sait que la partie réelle de toutes les racines de l'équation caractéristique doit être négative pour que le système soit stable, mais il n'est pas toujours possible de calculer ces racines dès que l'ordre de l'équation est supérieur à deux, heureusement il y a des critères qui donnent la réponse sans exiger la résolution de l'équation.

### Critère de Routh

Ce critère est fondé sur l'examen des termes déduits directement des coefficients de l'équation, il s'énonce ainsi : la partie réelle des racines de l'équation est négative (le système est stable) si les  $n + 1$  termes de la première colonne du tableau (appelé série de Routh) ont le même signe.

On pose	$S^n$	{	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$
	$S^{n-1}$		$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$
	.	{	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\dots$
	.		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$\dots$
On détermine	.		$N_1$	$N_2$	$N_3$	$\dots$
	$S^0$		$C_1$	$C_2$	$C_3$	$\dots$

on analyse

TABLE 5.1 – Tableau de Routh

- si le signe des termes de la série est différent, le nombre des racines à partie réelle positive est égal au nombre de changement de signe.
- Rappelons la condition nécessaire mais non suffisante : (tous les coefficients  $a_i$  doivent exister et avoir le même signe, supposé positif).

### Calculs

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$A_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \dots \\
B_1 &= \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1} \\
B_2 &= \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1} \\
B_3 &= \dots
\end{aligned}$$

**Exemple :**

L'équation caractéristique d'un système asservi est :  $S^3 + 3S^2 + 2S + K = 0$

1)  $K > 0$

2) Le tableau :

$$\begin{array}{c|ccc}
S^3 & 1 & 2 & 0 \\
S^2 & 3 & K & 0 \\
S^1 & \frac{6-K}{3} & 0 & 0 \\
S^0 & K & 0 & 0
\end{array}$$

TABLE 5.2 – Tableau de Routh(exemple)

Conditions :

$$\frac{6-K}{3} > 0 \text{ et } K > 0 \Rightarrow 0 < K < 6$$

**5.2.1 Critère de Hurwitz**

On définit les déterminants d'Hurwitz associés à l'équation caractéristiques comme suit :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \begin{vmatrix} a_0 \\ 0 \end{vmatrix} & \dots & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \begin{vmatrix} a_1 \\ a_0 \end{vmatrix} & \dots & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & 0 \\
0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_0
\end{vmatrix} \quad (5.1)$$

$$\text{Avec } \Delta_1 = a_{n-1}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \dots$$

**Énoncé du critère**

Les racines de l'équation caractéristiques sont à partie réelle négative à la condition nécessaire et suffisante que :

- Les coefficients  $a_i$  ( $i = 0, n$ ) soient tous positifs.

– Les déterminants d’Hurwitz  $\Delta_i$  soient positifs.

### 5.2.2 Exemples

**Exemple 5.2.1**  $a_3S^3 + a_2S^2 + a_1S + a_0 = 0$

$$\Delta_1 = a_2 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_1 - a_0a_3 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0$$

**Application :**  $S^3 - 3S^2 - 3S + 8 = 0 \Rightarrow$  Système instable.

**Exemple 5.2.2 Critère de Routh : quelques particularités**

$$F(S) = \frac{1}{S^4 + 3S^3 + 2S^2 + 6S + 1}$$

Tous les coefficients de  $D(S)$  étant présents et de même signe positif. La décision de stabilité ne

peut être prise qu’après examen du tableau de Routh.

$S^4$	1	2	1
$S^3$	3	6	0
$S^2$	0	1	0
$S^1$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$S^0$	-	-	-

# Chapitre 6

## Critères graphiques de stabilité

### 6.1 Critère de Nyquist

#### 6.1.1 Introduction

Les méthodes qu'on a déjà utilisées ne conviennent souvent pas parce que, quand un signal est retardé de  $T$  seconds quelque part dans la boucle du système, des termes exponentiels de la forme  $e^{-TS}$  apparaissent dans l'équation caractéristique. Ce qu'il fait difficile d'évaluer la stabilité.

#### Procédure

$G(S) \rightarrow G(j\omega)$  (FTBO)

- Module :  $|G(j\omega)|$

- Argument :  $\arg[G(j\omega)]$

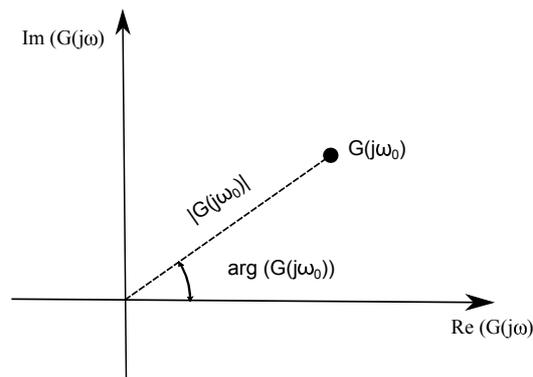


FIGURE 6.1 –

#### Exemple

$$G(S) = \frac{1}{1 + \tau S} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}; \text{Arg}(G(j\omega)) = -\arctan(\omega\tau)$$

$$\omega = 0 \Rightarrow |G(0)| = 1; \varphi(0) = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G(\infty)| = 0; \varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow |G(\frac{1}{\tau})| = \frac{1}{\sqrt{2}}; \varphi(\frac{1}{\tau}) = -\frac{\pi}{4}$$

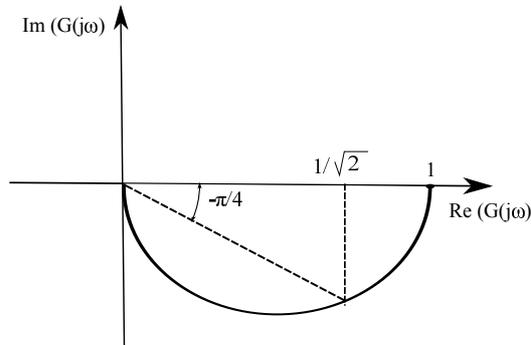


FIGURE 6.2 –

### 6.1.2 Théorème de Cauchy

Soit un contour fermé  $C$ , qui entoure les  $Z$  zéros et les  $P$  pôles (à l'intérieur de  $C$ ), soit  $\Sigma$  un contour fermé décrit par  $Q$  d'affixe  $V(S)$ . Si  $M$  parcourt  $C$  une fois dans un sens donné, le point  $Q$  fait  $Z - P$  tours autour du point  $O$  dans le sens des aiguilles d'une montre.

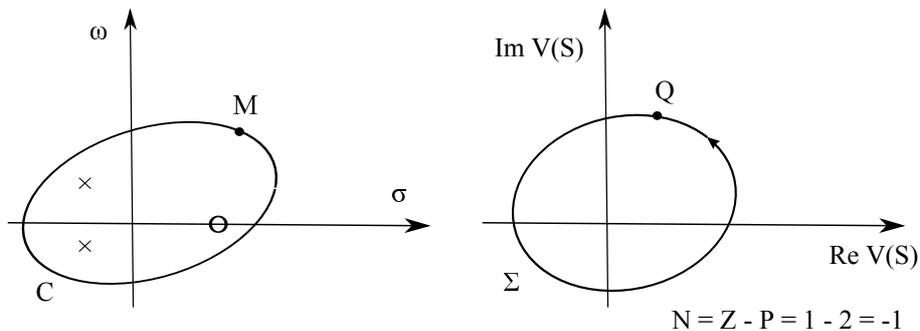


FIGURE 6.3 –

#### Exemple

$W_F = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$ ; Pour que le système soit stable, il faut que l'équation  $1 + W_1 W_2 = 0$  ne possède aucune racines positives.

Étant donné  $V(S) = 1 + W_1(S)W_2(S)$ .

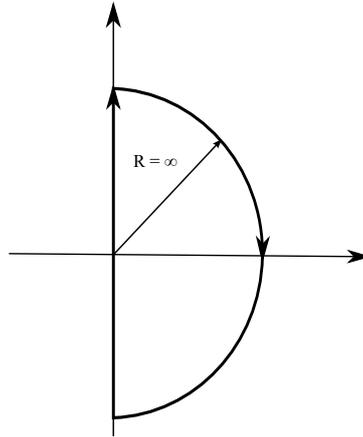


FIGURE 6.4 –

$$\Rightarrow Z = N + P \Rightarrow N = -P$$

**Remarque**

$V(S)$  encercle  $N$  fois l'origine revient à dire que  $G(S) = W_1(S)W_2(S)$  encercle  $N$  fois le point  $(-1, 0)$ .

**6.1.3 Procédure du critère de Nyquist**

- Tracer le lieu de Nyquist de  $G(j\omega) \equiv FTBO$ .
- Tracer la symétrie par rapport à l'axe réel.
- Si  $FTBO$  de la forme  $G(S) = \frac{A(S)}{S^\alpha B(S)}$ ; pour compléter le lieu de Nyquist, on ajoute des demis-cercles (demi-tours) selon le nombre  $\alpha$  (dans le sens horloges si  $\alpha > 1$ , dans le sens trigonométriques si  $\alpha < 0$ ).

Le critère de Nyquist permet de déterminer le nombre de racines de l'équation caractéristique. C-à-d le nombre de pôles en boucle fermée à partie réelle positive à partir du lieu de Nyquist en boucle ouverte.

$$\text{FTBO : } G(S) = W_1(S)W_2(S) = K \frac{N(S)}{D(S)}$$

$$\text{FTBF : } W(S) = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)}$$

L'équation caractéristique :  $1 + W_1(S)W_2(S)$

$$\text{Donc } 1 + W_1(S)W_2(S) = \frac{D(S) + KN(S)}{D(S)}$$

On peut préciser que :

- Les pôles de FTBF égalent les zéros de l'équation caractéristique, soit  $Z$  le nombre de zéros de l'équation caractéristique à partie réelle positive.

- Les pôles de l'équation caractéristique égalent les pôles de FTBO, soit  $P$  le nombre de pôles de FTBO à partie réelle positive.
- On dit lieu de Nyquist complet le lieu composé du tracé de Nyquist de FTBO et leur symétrie par rapport à l'axe réel et les demi-tours au tour de l'origine.
- Un système dont la transmittance  $KF(S)$  de la boucle à  $P$  pôles dans le demi-plan droit est stable si,  $M(S)$  parcourt le contour de Nyquist, la courbe  $KF(S)$  tourne  $P$  fois autour du point  $(-1)$  dans le sens trigonométrique.

**Exemple 1**

$$G(S) = \frac{1}{S(S+1)} = W_1(S)W_2(S) = FTBO$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}; \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\omega \quad \omega = 0$$

$$G(0) = \infty \angle -\pi/2$$

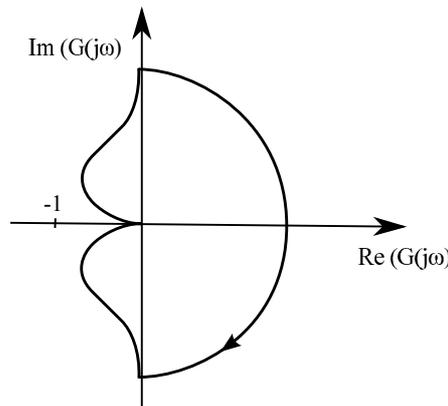


FIGURE 6.5 -

$$\omega = \infty \quad G(\infty) = 0 \angle -\pi$$

$$Z = P + N$$

$P = 0; N = 0 \Rightarrow Z = 0$ ; donc le système est stable.

**Exemple 2**

$$G(S) = \frac{K}{S(S+1)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega\omega^2+1}; \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan\omega$$

$$\omega = 0 \quad G(0) = \infty \angle -\pi/2$$

$$\omega = \infty \quad G(\infty) = 0 \angle -3\pi/2$$

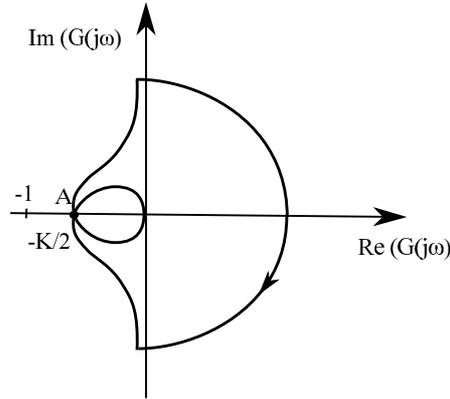


FIGURE 6.6 –

$$\phi(\omega_A) = -\pi = -\pi/2 - 2 \arctan \omega_A \quad \Rightarrow \quad \omega_A = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ s}$$

$$|G(j\omega_A)| = \frac{K}{\omega_A(1 + \omega_A^2)} = \frac{K}{2}$$

On a pour  $P = 0$  les trois cas suivants :

1.  $K > 2 \Rightarrow N = 2 \Rightarrow Z = 2 \neq 0$  Système instable.
2.  $K < 2 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0 \neq 0$  Système stable.
3.  $K = 2 \Rightarrow$  Système marginalement stable.

## 6.2 Lieu de Bode

Il s'agit de la double représentation du module et de l'argument de  $G(j\omega)$ .

$A = f_1(\omega)$ ,  $\varphi = f_2(\omega)$ ; ou  $A$  en décibel ( $dB$ ),  $\varphi$  en degré et  $\omega$  portée en échelle logarithmique.

- La courbe d'amplitude d'un système linéaire de transmittance  $G(j\omega)$  est le lieu des points définis en coordonnées cartésiennes semi-logarithmiques, par une ordonnée égale au gain logarithmique en  $dB$ .

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (6.1)$$

et par une abscisse égale à la pulsation  $\omega$  varie de plusieurs décades.

- La courbe de phase d'un système linéaire de transmittance  $G(j\omega)$  est le lieu des points définis en coordonnées cartésiennes semi-logarithmiques par une ordonnée égale à la phase en degré.

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) \quad (6.2)$$

et par une abscisse égale à la pulsation  $\omega$  varie de plusieurs décades.

**Exemple**

$$G(S) = \frac{1}{1 + TS}$$

$$A(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1 + jT\omega} \right| = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \right) = -10 \log(1 + \omega^2 T^2)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan T\omega$$

- La courbe du module comprend deux asymptotes  $A_0$  et  $A_\infty$ .

pour  $\omega\tau \ll 1$        $A_0(\omega) = -10 \log 1 = 0dB$

pour  $\omega\tau \gg 1$        $A_\infty(\omega) = -10 \log \omega^2 \tau^2 = -20 \log \omega \tau$

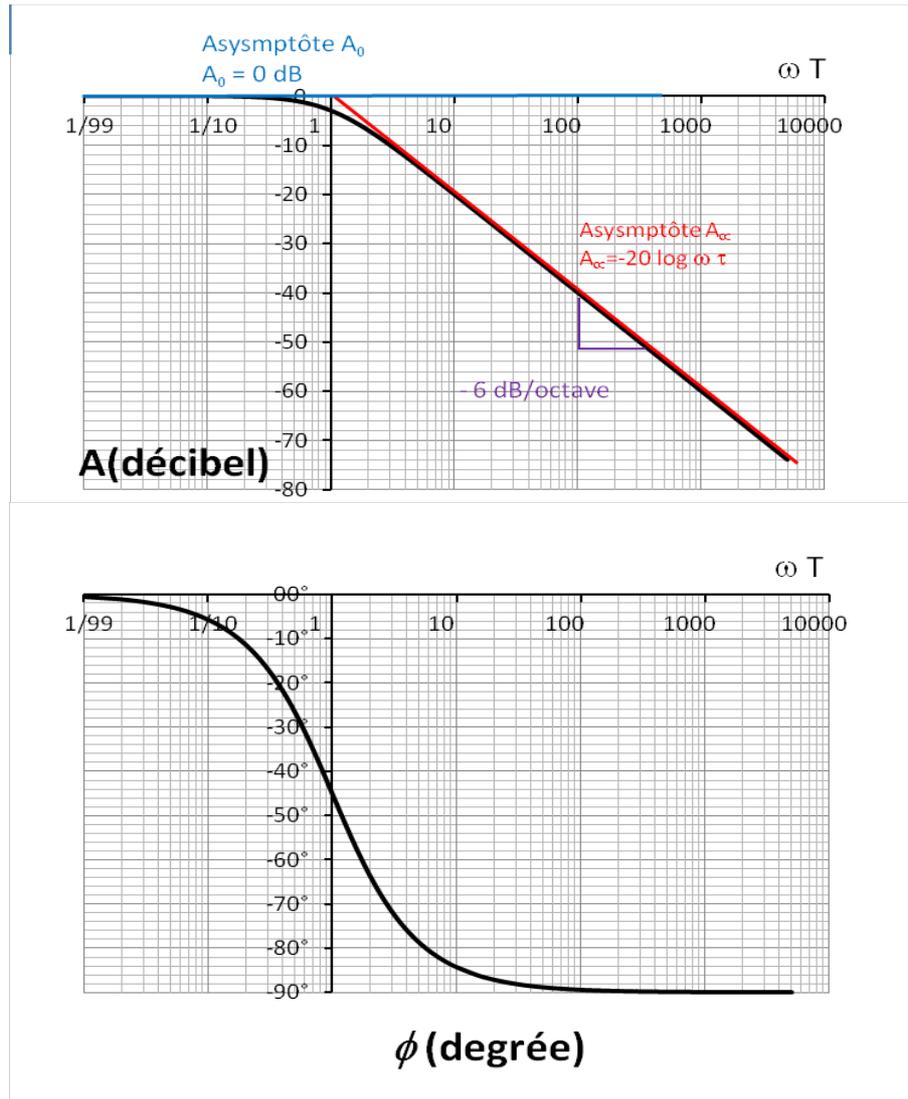


FIGURE 6.7 –

**Remarques**

Les conventions de cette représentation (module en décibel,  $\omega$  porté sur une échelle logarithmique) lui confèrent les propriétés suivantes :

Si  $G(S)$  est le produit de deux transmittances  $W_1(S)$  et  $W_2(S)$  c-à-d  $G(S) = W_1(S).W_2(S)$  . Le diagramme de Bode de  $G(S)$  s'obtient par simple addition des diagrammes de  $W_1$  et  $W_2(S)$

En sait en effet que  $|W_1(S).W_2(S)| = |W_1(S)|.|W_2(S)|$

Donc

$$|W_1(S).W_2(S)|_{dB} = |W_1(S)|_{dB}.|W_2(S)|_{dB} \quad (6.3)$$

en outre :

$$\arg(W_1(S).W_2(S)) = \arg(W_1(S)) + \arg(W_2(S)) \quad (6.4)$$

### 6.3 Diagramme de Black-Nichols

ce diagramme est obtenu en traçant la courbe représentative de  $G(j\omega)$  dans le plan de coordonnées :

- Abscisses :  $\text{Arg}(G(j\omega))$  en degré.
- Ordonnées :  $|G(j\omega)|$  en décibel.

**Exemple**  $G(S) = \frac{K}{1+TS}$

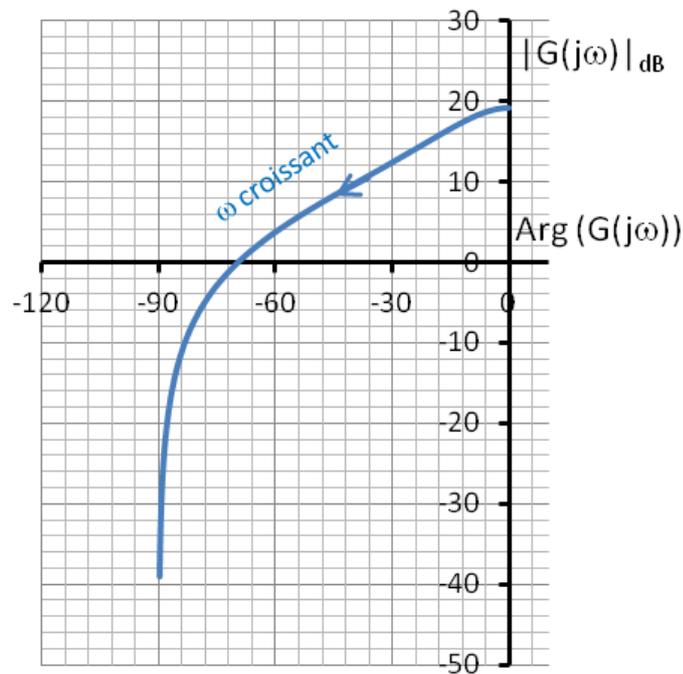


FIGURE 6.8 –

## 6.4 Marge de Gain, Marge de phase

Il ne suffit pas qu'un système de commande soit stable, il doit présenter une marge convenable de stabilité de façon que son fonctionnement ne soit pas perturbé par la variation de ses paramètres, les marges de gain et phase se définissent en examinant la réponse fréquentielle  $G(j\omega)$ .

### Définitions

- La marge de gain (MG) est le facteur par lequel il faut multiplier  $G(j\omega)$  pour que le système devienne instable.

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|} \quad (6.5)$$

$\omega_\pi$  : fréquence d'inversion de la phase, voir 9 et 11

$$\varphi(\omega_\pi) = -180^\circ$$

- La marge de phase (MP) est égale à l'argument de  $G(j\omega_1)$  augmenté de  $180^\circ$ ; tel que  $\omega_1$  correspond à un gain unité.

$\omega_1$  : fréquence de coupure ou  $\omega_c$ ; figures 9 et 11

$$MP = \arg(G(j\omega_1)) + 180^\circ \quad (6.6)$$

- Bande passante : est le diagramme des fréquences (du signal d'entrée) pour le quel le système à une réponse satisfaisante. figure 10.

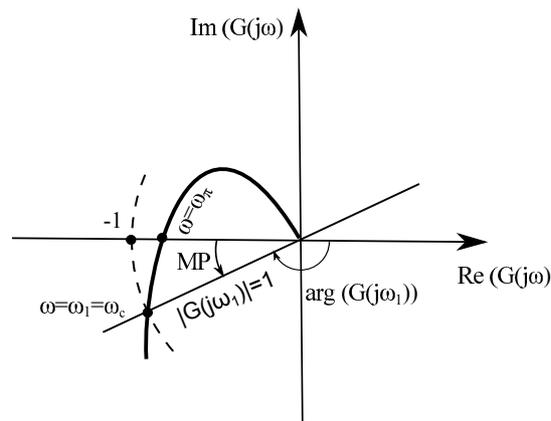


FIGURE 6.9 –

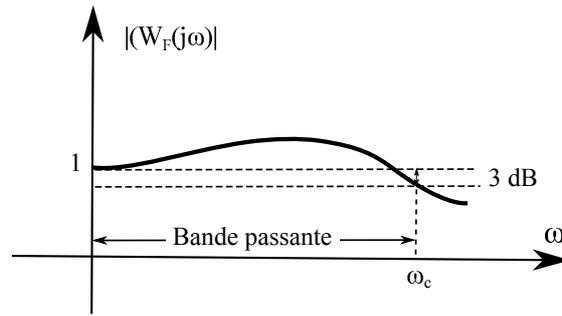


FIGURE 6.10 –

Si  $|W_F| = 1 \Rightarrow |W_F(\omega_c) = 0.0707$

dans ce cas  $BP = \omega_c$

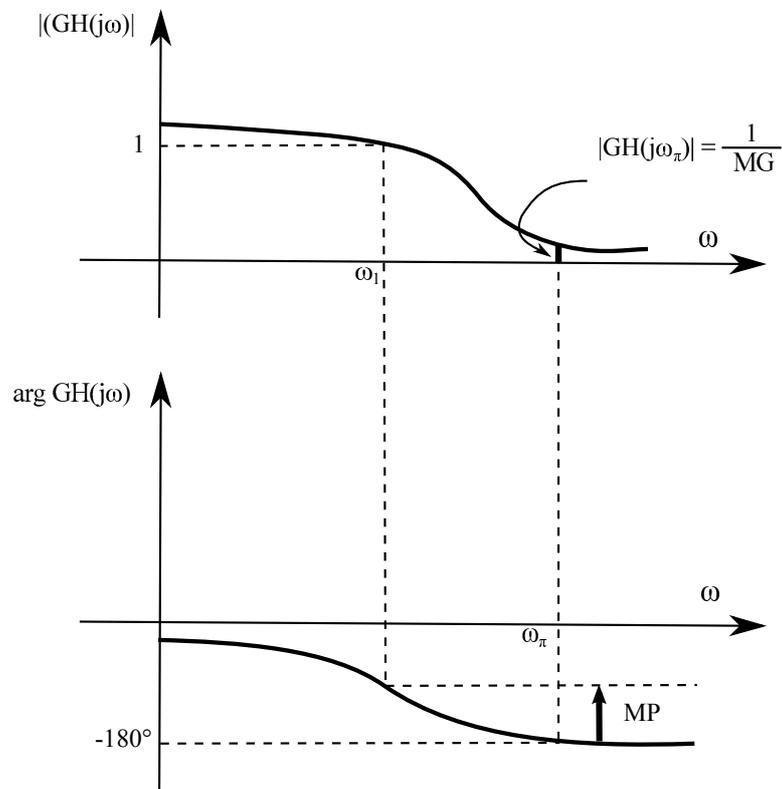


FIGURE 6.11 –



# Chapitre 7

## Précision des systèmes asservis

### 7.1 Généralités

#### 7.1.1 Notions de classe d'un système asservi

Il existe plusieurs façon de classer les systèmes asservis, dans le contexte actuel qui est la précision, il convient de les classer selon le nombre d'intégration que comporte leur fonction de transfert en boucle ouverte.

Soit

$$W_1(S)W_2(S) = \frac{K}{S^n} \frac{1 + b_1S + b_2S^2 + \dots}{1 + a_1S + a_2S^2 + \dots}, \quad n = \text{entier} \geq 0 \quad (7.1)$$

$n$  est appelé classe du système.

$K$  gain statique.

$n = 0$  aucune intégration  $\Rightarrow$  le système est de type zéro.

#### 7.1.2 Définition

On dit qu'un système asservi est d'autant plus précis que la différence  $e(t)$  ( $\varepsilon(t)$ ) entre la valeur réelle de sa grandeur de sortie et la valeur désirée est réduite ( $e(t) \rightarrow 0$ ). En pratique, il en autrement, car :

- La consigne varie : la recherche de minimiser  $\varepsilon(t)$ , en dépit de ces variations, constitue un problème de suivi (ou de poursuite).
- Un signal de perturbation aléatoire (un bruit) vient se superposer au signal utile en un point de la chaîne, le maintien de  $\varepsilon(t)$  au voisinage de 0, malgré la perturbation, constitue un problème de régulation.

- L'erreur  $\varepsilon(t)$  se décompose en :

- 1) Une erreur transitoire ou dynamique  $\varepsilon_D$ .
- 2) Une erreur permanente ou statique  $\varepsilon_S$ .

## 7.2 Erreur statique

### 7.2.1 Erreur statique en réponse à un signal d'entrée canonique

On s'intéresse au signal d'erreur, en réponse à une certaine entrée; la fonction de transfert (entrée, erreur) est donc la suivante (rapport du signal d'activation :

$$\frac{\varepsilon(t)}{X(S)} = \frac{1}{1 + W_1(S)W_2(S)} \quad (7.2)$$

D'après le théorème de la valeur finale, l'erreur statique  $\varepsilon_S$  est donnée par la relation suivante :

$$\varepsilon_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{S \rightarrow 0} S\varepsilon(S)$$

Donc,

$$\varepsilon_S = \lim_{S \rightarrow 0} \left( S \frac{X(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)} \right) \quad (7.3)$$

Cette expression montre que la précision dépend à la fois :

- du système considéré (présence de  $W_1(S)W_2(S)$ ).
- du signal d'entrée appliqué (présence de  $X(S)$ ).

Il est clair que la valeur de  $\varepsilon_S$  dépend du nombre  $n$  d'intégrateurs que comporte la fonction de transfert en boucle ouverte.

d'après l'équation (7.1) on constate que :  $\varepsilon_S = \lim(S \rightarrow 0) \frac{SS^{-m}S^n}{S^n + K \frac{1 + b_1S + b_2S^2 + \dots}{1 + a_1S + a_2S^2 + \dots}}$ .

Soit

$$\varepsilon_S = \lim(S \rightarrow 0) \frac{S^{n-m+1}}{S^n + K} \quad (7.4)$$

Il en résulte, le tableau ci-dessous , qui donne l'erreur statique en fonction de la classe  $n$  du système et de l'ordre  $m$  du signal d'entrée canonique.

#### Remarques

- Si  $n = 0$ ,  $K = K_P$  : constante de position ;  $\frac{1}{K_P}$  coefficient d'erreur en position.
- Si  $n = 1$ ,  $K = K_V$  : constante de vitesse ;  $\frac{1}{K_V}$  coefficient d'erreur en vitesse
- Si  $n = 2$ ,  $K = K_A$  : constante d'accélération ;  $\frac{1}{K_A}$  coefficient d'erreur en accélération.

- L'erreur statique, lorsqu'elle est définie et non nulle, décroît lorsque le gain en boucle ouverte croît.
- On a vu que généralement la stabilité se détériore lorsque le gain en B.O. croît, cette propriété est connue sous le nom de dilemme *Stabilité-précision*, qui nécessite un compromis.
- L'annulation de l'erreur statique nécessite la présence, dans la chaîne :
  - d'au moins une intégration ; s'il s'agit d'une entrée en échelon.
  - d'au moins deux intégrations, S'il s'agit d'une entrée en rampe.

### 7.2.2 Erreur statique en réponse à un signal de perturbation canonique

On montre facilement que :

$$\varepsilon(S) = \frac{1}{1 + W_1(S)W_2(S)W_3(S)}X(S) - \frac{W_2(S)W_3(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)W_3(S)}Z(S)$$

On suppose, pour fixer les idées, que :

$$x(t) = 0$$

$$z(t) : \text{échelon unitaire, donc } Z(S) = \frac{1}{S}.$$

$$\text{Il vient } \varepsilon_S = \lim(S \rightarrow 0) \left( \frac{W_2(S)W_3(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)W_3(S)} \right)$$

Donc  $\varepsilon_S$  sera nul si  $W_1$  possède au moins un intégrateur.

## 7.3 Erreur dynamique

L'écart  $e(t)$  s'écrit sous la forme :  $e(t) = e_T(t) + e_P(t)$ , assurer une bonne précision dynamique, c'est garantir un bon comportement de la partie transitoire de l'écart  $e(t)$ , on entend par cela un amortissement suffisant et une convergence assez rapide de la partie  $e_T(t)$ . ( $\lim(t \rightarrow \infty)e_T(t) = 0$ ).

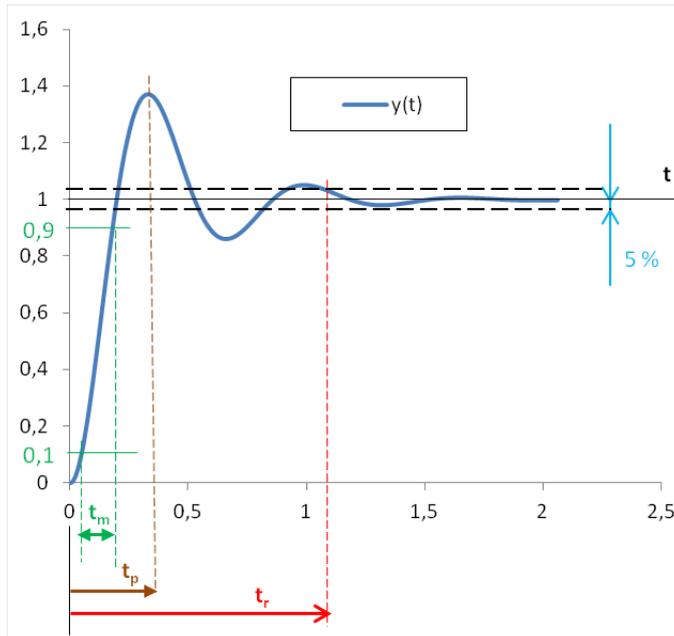
### 7.3.1 Remarques

- Le comportement statique de  $E(S)$  est entièrement défini par  $G(S)$  pour  $S = 0$ . Cela veut dire que pour  $S \neq 0$ ,  $G(S)$  caractérise le comportement dynamique de l'écart.

$$\text{d'après } E(S) = \frac{X(S)}{1 + W_1(S)W_2(S)}, \quad G(s) = W_1(S)W_2(S)$$

$E(S)$  sera d'autant plus petit que  $|G(S)| \gg 1$  c-à-d  $\left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| \simeq 1 \simeq W_F(j\omega)$  pour un retour unitaire.

- On déduit que la précision du système est d'autant meilleure que sa bande passante est plus grande.
- La rapidité peut être mesurée par le temps de réponse  $t_r$  ou le temps de montée  $t_m$  de la réponse indicelle du système



#### 7.4 Précision dynamique d'un système du premier ordre à retour unitaire

$$G(S) = \frac{K}{1 + \tau S}$$

$$W_F(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)} = \frac{K/(1+K)}{1 + \frac{\tau}{1+K}S}$$

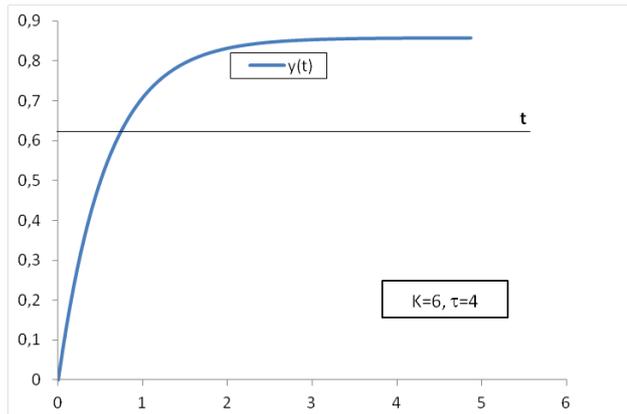
$$W_F(S) = \frac{K_1}{1 + \tau_1 S}$$

$$x(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) K_1; \quad e(t) = u(t) - y(t)$$

$$e(t) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) K_1$$

On remarque :

$t_r = 3\tau$ , le système est plus rapide pour  $\tau_1 \searrow \searrow \Rightarrow K \nearrow \nearrow$  ( $K$  : le gain statique de la boucle ouverte), c'est le dilemme (*stabilité-précision*).



### 7.4.1 Précision dynamique d'un système du deuxième ordre à retour unitaire

Soit

$$G(S) = \frac{K}{S(1 + \tau S)}$$

$$W_F(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)} = \frac{\frac{K}{S(1 + \tau S)}}{1 + \frac{K}{S(1 + \tau S)}} = \frac{1}{\frac{\tau}{K}S^2 + \frac{1}{K}S + 1} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{\tau}}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{K\tau}}$$

La réponse dépend de  $(\zeta, \omega_n)$

Pour  $x(t) = u(t)$

- $\zeta < 1$

$$y(t) = 1 - Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{1 - \zeta^2} + \varphi)$$

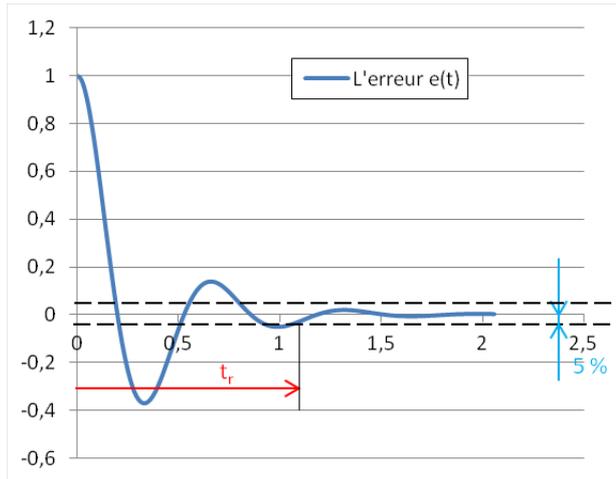
$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow e(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- Le dépassement :  $D(\%) = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$

- Le temps de montée :  $t_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} (\Pi - \arccos \zeta)$

- Le temps de réponse :  $t_r = \frac{1}{\omega_n \zeta} \ln\left(\frac{100}{n}\right)$



- $\zeta > 1$  : la réponse est non oscillatoire

- $\zeta = 1$  : l'amortissement critique

On définit  $Q$  facteur de résonance,  $Q = \frac{W_{Fmax}}{|W_F(0)|}$

Pour notre système :

$$Q = 1 \text{ si } \zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ si } \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\zeta \nearrow \Rightarrow Q \searrow$  ; plus le facteur de résonance est élevé, moins le système est amorti.

# Chapitre 8

## Correction des systèmes asservis

### 8.1 Généralités

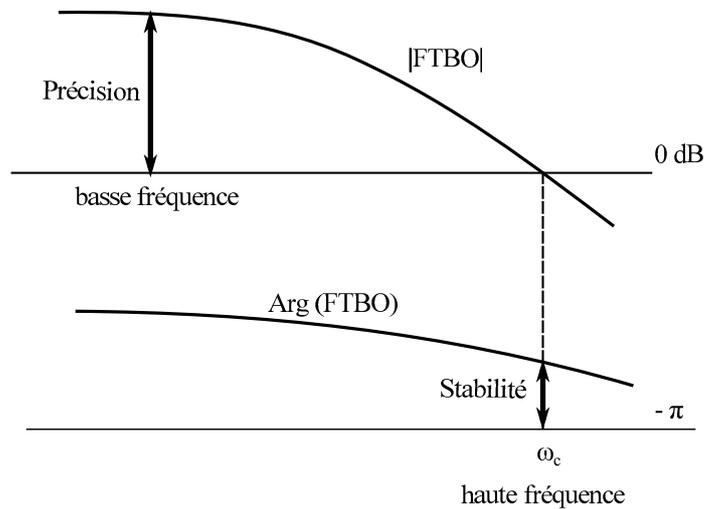
#### 8.1.1 Rappel

On a vu dans les chapitres précédents, sur l'analyse des systèmes asservis, pour satisfaire aux spécifications de stabilité et de précision, on est amené à formuler des conditions sur la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

- Stabilité : le degré de stabilité est défini par :
  - La marge de gain : la stabilité est d'autant meilleure que le gain de la FTBO est plus petit, donc que la bande passante (en BO) est plus faible.
  - La marge de phase : la stabilité est d'autant meilleure que le déphasage de la FTBO est plus faible.
- Précision : Elle consiste en deux points.
  - Précision statique : l'annulation de l'erreur en régime permanent nécessite la présence, dans la FTBO, d'une ou plusieurs intégrateurs, selon l'entrée canonique imposée.
  - Précision dynamique elle est d'autant plus meilleure que le gain de la FTBO est plus élevé, c-à-d que la bande passante est plus large.

### 8.1.2 Dilemme Stabilité-Précision

Comme le montre le dessin, les conditions imposées par la précision et la stabilité sont généralement contradictoires, une augmentation du gain de boucle équivaut, sur le dessin, à une translation de l'axe  $0dB$  vers le bas, elle se traduit donc par une augmentation de la précision et une diminution de la stabilité.



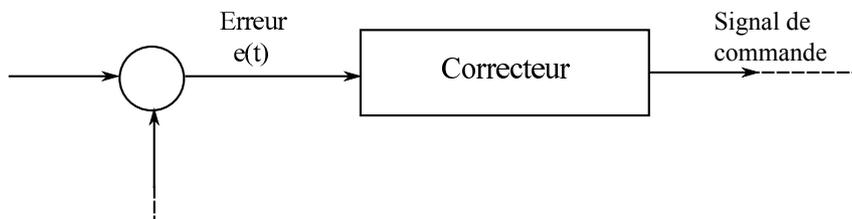
### 8.1.3 Notion sur le correcteur

Un correcteur est un élément que l'on ajoute au système initial pour assurer la compatibilité des conditions contradictoires imposées par la stabilité et la précision.

## 8.2 Les correcteurs spécifiques P, PI, PD et PID

### 8.2.1 Les lois de commande

Il est, en général, nécessaire non seulement d'amplifier l'erreur mais aussi de lui ajouter un autre terme. Ce qui constitue le signal de commande.



Il existe parmi eux :

1. la commande proportionnelle :  $u(t) = K\varepsilon(t)$

2. La commande intégrale :  $u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(x) dx$
3. La commande proportionnelle-dérivée :  $u(t) = K (\varepsilon(t) + T_d \dot{\varepsilon}(t))$

### 8.2.2 La correction

Le signal de commande se traduit par des correcteurs industriels les plus fréquents :

1. Correcteur proportionnel (P.) :  $U(S) = K$
2. Correcteur proportionnel-intégral (P.I.) :  $U(S) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i S} \right)$  Il agit sur les basses fréquences, améliore la précision en régime permanent.
3. Correcteur proportionnel-dérivé (P.D.) :  $U(S) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i S} \right)$  action sur les hautes fréquences, améliore la rapidité de réponse à une variation.
4. Correcteur proportionnel-intégral-dérivé (P.I.D.) : c'est le plus utilisé.  
 $U(S) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right)$ . Il améliore la rapidité et précision.

## 8.3 Correction classique

### 8.3.1 Correction cascade ou série

Elle consiste à introduire le correcteur  $W_3(S)$  dans la chaîne d'action, les trois formes de correction les plus courantes sont :

- Correction par avance de phase.
- Correction par retard de phase.
- Correction combinée.

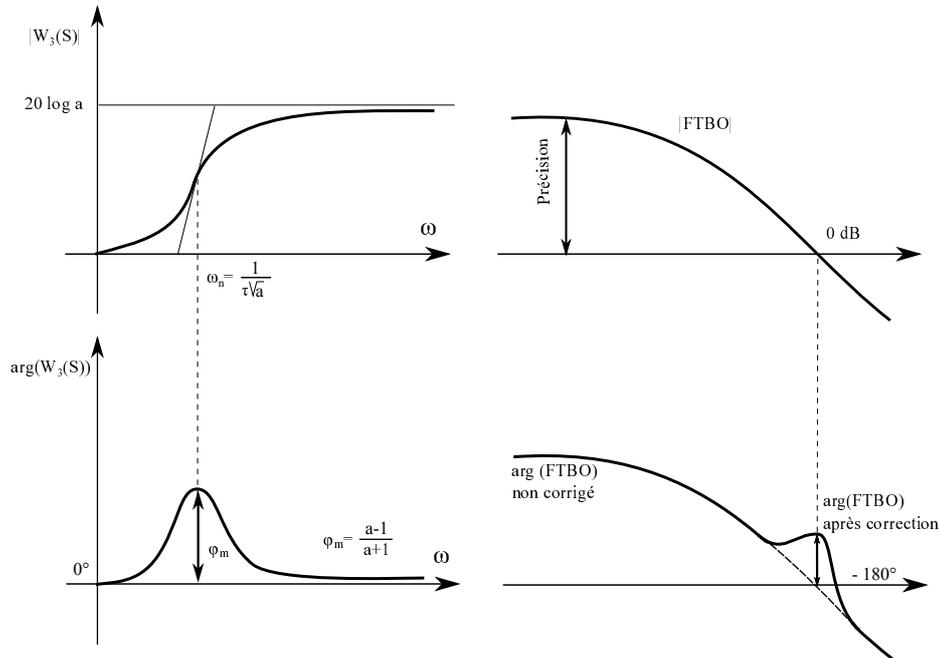
On suppose pour le présent travail que le système non corrigé possède *une précision suffisante et stabilité insuffisante*

#### Correction par avance de phase

Elle consiste à choisir le correcteur de façon à déformer localement la courbe de phase. En pratique, sa fonction de transfert est :

$$W_3(S) = \frac{1 + a\tau S}{1 + \tau S}, \quad a > 1 \quad (8.1)$$

avec  $FTBO = W_1(S) \cdot W_2(S) \cdot W_3(S)$

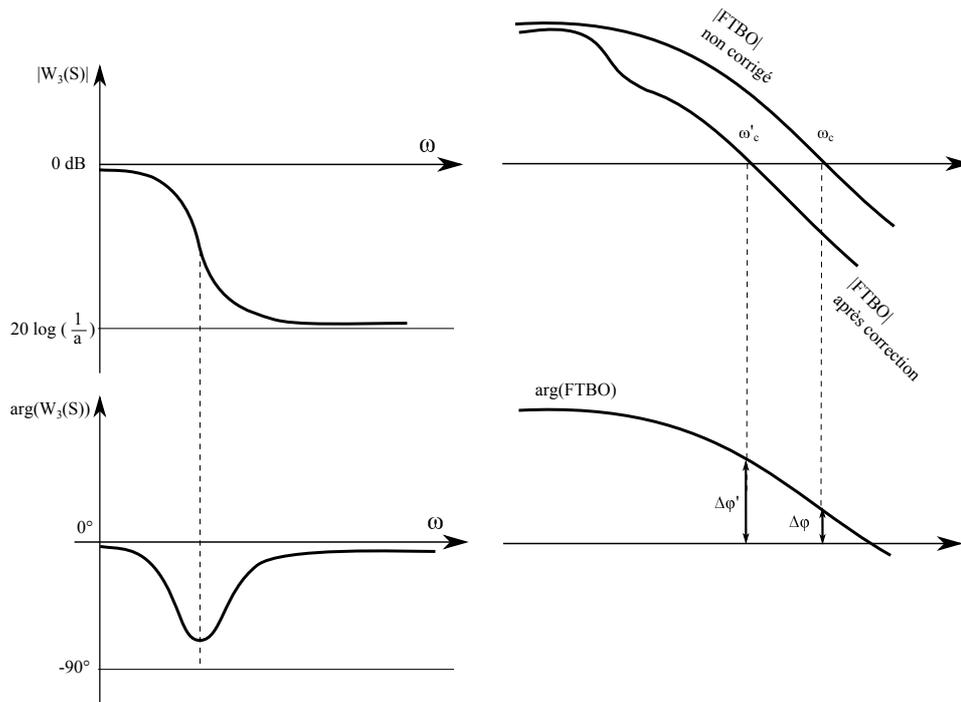


- Effet secondaire : augmentation du gain  $\implies \omega_c \nearrow$  (bande passante  $\nearrow \equiv$  bruits).
- Le but étant que la "bosse"  $\phi_m$  du correcteur soit centrée sur la nouvelle pulsation de coupure ( $\omega'_c \approx 2\omega_c$ ).
- Pour obtenir une marge de phase de l'ordre de  $45^\circ$ , il faut souvent que  $\phi_m$  soit de l'ordre de  $50^\circ$  à  $60^\circ$  ; cette condition permet de fixer le paramètre  $a$  (environ 8 à 12).

### Correction par retard de phase

L'objectif c'est d'obtenir une augmentation de la marge par diminution de la pulsation de coupure. En pratique, le correcteur à retard de phase à une transmittance :

$$W_3(S) = \frac{1 + \tau S}{1 + a\tau S}; \quad a > 1 \tag{8.2}$$



### 8.3.2 Correction parallèle

Elle consiste à créer une boucle secondaire, il s'agit de déterminer  $W_2'(S)$  de façon que la FTBO corrigée, soit :

$$W_1 = \frac{W_2}{1 + W_2 W_2'} W_3 W_4 \quad (8.3)$$

#### Correction par retour tachymétrique

Supposons  $W_2$  soit de classe 1, considérons, par exemple, un moteur avec sortie en position :

$$W_2(S) = \frac{\theta(S)}{U(S)} = \frac{K_v}{S(1+TS)}; \quad W_3(S) = 1.$$

- Correction par retour tachymétrique  $\implies W_2'(S) = \lambda S$

$$\text{- FTBO non corrigé : } \frac{W_1 \cdot K_v \cdot W_4}{S(1+TS)}$$

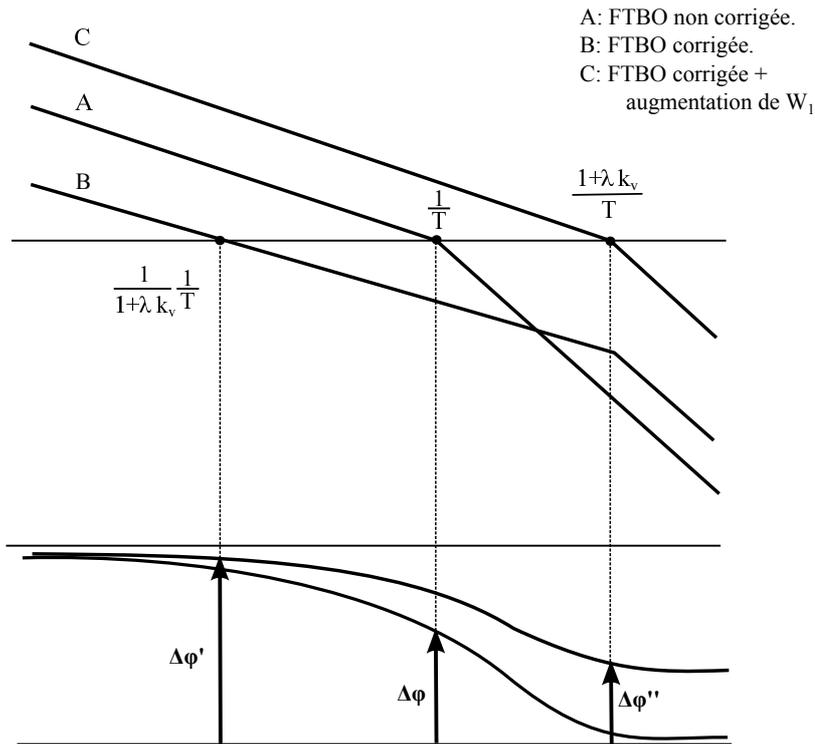
$$\text{- FTBO corrigé : } \frac{W_1 \cdot K_v \cdot W_4}{(1 + \lambda K_v) S \left( 1 + \frac{T}{1 + \lambda K_v} S \right)}$$

Dans le diagramme de Bode, les fonctions de transfert sont représentées comme suit :

Supposant :

**Stabilité satisfaisante.**

**Précision insuffisante.**



On constate que après correction, la bande passante est plus large  $\implies$  un meilleur temps de montée, une plus grande sensibilité aux bruits  $\implies$  Correction par retour tachymétrique filtré.

$$W_2'(S) = \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}{\lambda} \cdot S \cdot \frac{S}{1 + \tau S} \quad (8.4)$$

$\frac{S}{1 + \tau S}$  : est un terme qui correspond à un filtre.

# Bibliographie