Chapitre 2: Fonctions génératrices et fonctions caractéristiques

Fonctions génératrices des v.a dans $\mathbb{N}$

Définition: On appelle fonction génératrice d'une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction :

$$G_X(z) = E\left[z^X\right].$$

Remarque:

1. Puis que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k P(X = k).$$

2. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k P(X = k)$ est C.V pour $|z| < 1$.

Théorème: Si deux v.a X et Y sont indépendantes, on

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

Démonstration. Soit $z \in B(0,1)$. On a X et Y sont indépendantes, alors z^X et z^Y le sont aussi, d'où

$$G_{X+Y}(z) = E\left[z^{X+Y}\right] = E\left[z^X\right] E\left[z^Y\right] = G_X(z) G_Y(z).$$

Calculs de fonctions génératrices

Loi de Bernoulli

La fonction génératrice d'une loi de Bernoulli de paramètre p est

$$G_X(z) = E\left[z^X\right] = (1-p) + zp.$$

Loi binomiale

Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $S_n = X_1 + ... + X_n$ suit la loi loi binomiale de paramètres n et p. Ainsi, on a la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètres n et p est

$$G_{S_n}(z) = G_{X_1}(z) ... G_{X_n}(z) = [(1-p) + zp]^n.$$

Fonction génératrice et loi

Théorème: Soit X une v.a de loi ν sur $\mathbb{N}$. La fonction génératrice est infiniment dérivable avec

$$G_X^{(n)}(s) = E\left[X(X-1)\dots(X-n+1)\, s^{X-n}\right]$$

En particulier

$$P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ce qui montre que la fonction génératrice caract´erise la loi.

Démonstration. La fonction génératrice est la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1. Ainsi $z \to G_X(z)$ est infiniment dérivable, avec pour tout z

$$G_X^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n} k(k-1)\dots(k-n+1)\, P(X=k)\, z^{X-n}$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de transfert

$$G_X^{(n)}(z) = E\left[X(X-1)\dots(X-n+1)\, z^{X-n}\right].$$

En prenant $z=0$, on obtient

$$\begin{aligned} G_X^{(n)}(0) &= E\left[X(X-1)\dots(X-n+1)\, 1_{\{X-n=0\}}\right] \\ &= n(n-1)\dots(n-n+1)\, P(X=n) = n!P(X=n). \end{aligned}$$

Fonction génératrice des moments (v.a. continue ou discrète)

Définition: On appelle fonction génératrice des moments d'une v.a X la fonction M_X définie par:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right].$$

Remarque:

1. Pour une v.a discrète: $M_X(t) = \sum_i e^{tx_i} P(X=x_i)$.
2. Pour une v.a continue: $M_X(t) = \int_E e^{tx} dP(X=x) \left(= \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x)dx, \text{ si } f \text{ est une fonction continue}\right)$.

Exemple: Soit une v.a $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ calculer sa fonction génératrice des moments.
On a $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$.

Remarque:

1. Si on pose $z = e^t$ dans la fonction génératrice, on trouve:

$$G_X(z) = E\left[z^X\right] = E\left[e^{tX}\right] = M_X(t).$$

2. L développement en série entiére de l'exponentille, nous donne:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(tx)^k}{k!} \right) f(x)dx \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} E\left[X^k\right]. \end{aligned}$$

Propriétés:

* $M_X(-t)$ est la transformé de Laplace de la densité f.

* Si la fonction génératrice des moments existe dans un intrtvalle ouvert aotour de $t = 0$, le n^{ieme} moment de la v.a X est donnée par la n^{ieme} dérivée de la fonction génératrice des moments évaluée en $t = 0$

$$E[X^n] = M_X^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n M_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0}.$$

Cette relation permet de calculer les moments d'une loi on connait la fonction génératrice des moments. Par exemple

$$E[X] = M_X'(0); \qquad V(X) = M_X''(0) - (M_X'(0))^2.$$

Exemples:

1. On veut calculer l'espérance de la loi exponentielle par la fonction génératrice des moments. Ona

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad E[X] = M_X'(0) = \left. \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}.$$

2. La fonction génératrice des moments d'une v.a uniforme discrète: $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\,]0...1]_{\frac{1}{n}}$ et si $X_n = \frac{1}{n} Y_n$ alors $Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}\,]0...n]$. On a

$$P_{X_n}\left(\frac{1}{n}\right) = P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = P(Y_n = i) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, ..., n$$

d'où

$$M_{X_n}(t) = E\left[e^{tX_n}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{t\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^i = \frac{e^t - 1}{n\left(1 - e^{-\frac{t}{n}}\right)}.$$

Propriété: Si X et Y sont deux v.a indépendantes, alors $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$.

Fonction caractéristique

Fonction caractéristique. Développement et propriétés des coefficients du développement : exemples. Propriétés de la dérivation. Effet d'un changement de variable (exemple de la combinaison translation - homothétie).

Définition

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) et $g(X)$ une fonction de cette variable. On sait maintenant calculer la moyenne de cette fonction dans les deux cas :
Variable discrète :$E\{g(X)\} = \sum_j p_j \; g(x_j)$. Variable continue :$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$.
Une fonction particulièrement intéressante est la fonction e^{itx} dans laquelle t est un paramètre réel non aléatoire :

$$e^{itx} = cos(tx) + isin(tx)$$

Comme les fonctions $|\cos(tX)|$ et $|\sin(tX)|$ sont bornées, leurs moyennes existent et il en est de même pour la fonction exponentielle.
Nous définirons la fonction caractéristique Φ_X par :

$$X \to \Phi_X(t) = E\left[e^{itx}\right]$$

C'est-à-dire :
Variable discrète :Variable continue :$\Phi_X(t) = \sum_k p_k \; e^{itx_k}$, $\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$.
Théorème
La fonction caractéristique est une fonction continue de t égale à 1 pour $t = 0$. La continuité de cette fonction est une propriété essentielle. Comme elle est valable aussi bien pour les lois discrètes que pour les lois continues, elle permet de traiter des problèmes où il y a passage progressif d'une loi discrète à une loi continue ayant une densité.
La fonction caractéristique définit complètement la variable X. Cela signifie qu'elle permet de calculer les probabilités p_k (en discret) ou la densité de probabilité $f(x)$ (en continu).

Variable discrète. Détermination des $\mathbf{p}_k$

Une formule d'intégration

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it\alpha}e^{-itx}dx\right) = \begin{array}{l} 0 \text{ Si } x \neq \alpha \\ 1 \text{ Si } x = \alpha \end{array}$$

Si $x = \alpha$, le résultat est trivial.
Si $x \neq \alpha$, la limite de l'intégrale :

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it\alpha}e^{-itx}dx\frac{\sin\left[(\alpha - x)T\right]}{(\alpha - x)T}$$

est naturellement 0 parce que la fonction sinus est bornée, le dénominateur tendant vers l'infini avec T (propriété du sinus cardinal).

Détermination des $\mathbf{p}_k$ Partant du développement :

$$\Phi_X(t) = E\left[e^{itx}\right] = p_1 e^{itx_1} + ... + p_n e^{itx_n}$$

Intégrant les deux membres :

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi_X(t)\, e^{-itx}dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{itx_1}e^{-itx_1}dt + ...$$

En passant à la limite, on obtient pour chaque terme :

$$\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{it\alpha}e^{-itx_i}dx\right) = \begin{array}{c} 0 \text{ Si } x \neq x_i \\ p_i \text{ Si } x = x_i \end{array}$$

On en déduit successivement les pondérations $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Remarque de simplification On peut rencontrer des cas dans lesquels on peut se dispenser d'appliquer la méthode précédente. Elle ne doit pas être systématique. L'exemple qui suit permet de justifier cette remarque.
Une variable aléatoire peut prendre les valeurs $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ avec les probabilités respectives $\{p_1, p_2, \ldots, p_5\}$. On connaît l'expression de sa fonction caractéristique :

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cos t + \frac{1}{8}\cos 2t.$$

On veut en déduire la valeur des p_i.
On s'assure tout de suite que $\Phi_X(t)$ est continue et que $\Phi_X(0) = 1$ en posant :

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \cos 2t = \frac{e^{i2t} + e^{-i2t}}{2},$$

on obtient directement :

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{16}e^{-2it} + \frac{3}{16}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{i0} + \frac{3}{16}e^{it} + \frac{1}{16}e^{2it}$$

On a donc :

$$p_1 = p_5 = \frac{1}{16}, p_2 = p_4 = \frac{3}{16}, p_3 = \frac{1}{2}.$$

Développement de la fonction caractéristique **Propriétés:** Les coefficients du développement de la fonction caractéristique correspondent aux moments de tous ordres de la variable aléatoire :

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}m_k$$

Nous allons le démontrer dans les deux cas (continu et discret).

Continu Partons de la définition :

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx.$$

En développant la partie exponentielle :

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}x^k\right)f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

on reconnaît dans l'intégrale l'expression du moment d'ordre k.

Discret On effectue un calcul similaire dans le cas de la variable discrète.

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \sum_{j=1}^{n} p_j e^{itx_j} = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} x_j^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} m_k.\end{aligned}$$

Deux applications simple

1. La v.a $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. La fonction caractéristique de X est

$$\Phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_0^1 e^{itx}dx = \frac{e^{it}-1}{it},$$

en développant l'exponentielle:

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \frac{1}{it}\left[\left(1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + ...\right) - 1\right] \\ &= 1 + \frac{(it)^1}{1}\frac{1}{2} + \frac{(it)^2}{2!}\frac{1}{3} + \frac{(it)^3}{3!}\frac{1}{4} + ...\end{aligned}$$

Donc: $m_k = \frac{1}{k+1}$.

2. Soit la v.a X de densité $f(x) = e^{-x}$, si $x \geq 0$. La fonction caractéristique de X est: (si $it < 1$)

$$\Phi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-x} dx = \frac{1}{1-it} = \sum_{j \geq 0} (it)^j .$$

Donc: $m_k = k!$.

Dérivées de la fonction caractéristique. Propriétés

Revenons à l'expression de base de la fonction :

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$$

Effectuons une dérivation par rapport à t sous le signe somme, opération très simple du fait que les bornes sont indépendantes de t.
Dérivée première :

$$\Phi'_X(t) = i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x f(x)dx, \qquad \Phi'_X(0) = i\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = iE(X)$$

Dérivée seconde :

$$\Phi''_X(t) = i^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x^2 f(x)dx, \qquad \Phi_X''(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = -E\left(X^2\right)$$

On retiendra les résultats fondamentaux suivants :

$$\Phi_X(0) = 1, \qquad \Phi'_X(0) = iE(X), \qquad \Phi_X''(0) = -E\left(X^2\right).$$