

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



---

# Cours de géométrie

---

**Houas Amrane**

**Septembre 2019**

# Table des matières

Table des matires	1
Liste des figures	5
Introduction	1
<b>1 Courbes paramétrées</b>	<b>3</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	3
1.2 Définitions . . . . .	4
1.2.1 Exemples . . . . .	5
1.3 Equation caracteristique . . . . .	8
1.3.1 Exemples . . . . .	8
1.4 Types des courbes . . . . .	9
1.4.1 Courbe simple . . . . .	9
1.4.2 Courbe fermée . . . . .	10
1.5 Courbes régulières et espace tangent . . . . .	10
1.5.1 Règles de calcul des dérivées ( rappel ) . . . . .	10
1.5.2 Courbes régulières . . . . .	11
1.5.3 Vecteurs tangents . . . . .	11
1.5.4 Intersection et angle entre deux courbes . . . . .	12
1.6 Longueur d'une courbe . . . . .	13

1.7	Abscisse curviligne . . . . .	14
1.8	Repère de Frenet . . . . .	17
1.8.1	Formules de Frenet . . . . .	17
1.8.2	Courbe dans un plan . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Surfaces paramétrées</b>	<b>20</b>
2.1	Surface de révolution . . . . .	22
2.2	Courbes sur une surface . . . . .	22
2.3	Surfaces régulière et vecteurs tangents . . . . .	23
2.4	Tenseurs métriques . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Intégrale curviligne</b>	<b>28</b>
3.1	Intégrale curviligne d'un champs de vecteurs . . . . .	28
3.1.1	Cas des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel . . . . .	30
3.2	Formes différentielles de degré 1 . . . . .	30
3.3	Propriété de l'intégrale curviligne . . . . .	33
3.4	Aire d'un domaine du plan . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Géométrie affine</b>	<b>35</b>
4.1	Espaces affines . . . . .	35
4.1.1	Barycentre . . . . .	36
4.1.2	Variétés affines . . . . .	38
4.2	Applications affines . . . . .	41
4.2.1	Définitions et propriétés . . . . .	41
4.2.2	Repères . . . . .	43
4.2.3	Formule d'une application affine . . . . .	43
4.3	Transformations affines . . . . .	44
4.3.1	Points fixes . . . . .	44
4.3.2	Projection affine . . . . .	45

4.3.3 Translation et homotétie affines . . . . .	46
<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Table des figures

1.1	Une hélice . . . . .	6
1.2	Tangente à une courbe paramétrée . . . . .	12
2.1	Surface paramétrée . . . . .	21
2.2	Exemples de surfaces . . . . .	22

# Introduction

La géométrie est la branche des mathématiques qui étudie les formes et les figures dans l'espace, leurs relations entre elles et leurs propriétés. Parmi les sous branches de la géométrie, il y a la géométrie analytique ayant recours avec le calcul algébrique et analytique ; elle facilite l'étude des propriétés géométriques des courbes et des surfaces et leur représentation géométrique, il y a aussi la géométrie différentielle qui étudie les propriétés locales ( au voisinage d'un point ) et essentielles des courbes et des surfaces, et il y a aussi la géométrie affine qui est une présentation de la la partie de la géométrie que lon apprend au lycée et qui concerne les propriétés des droites, plans, distance, angle, ..etc. La différence essentielle avec ce que nous avons appris au lycée est qu'ici la géométrie s'appuie fondamentalement sur l'algèbre linéaire.

Ce cours de géométrie est le fruit de huit années d'enseignement en licence mathématiques à l'université Mohamed Khider, Biskra.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des courbes paramétrées. Nous commençons par rappeler quelques définitions de caractérisation d'une courbe, ainsi que les propriétés fondamentales de la courbe. Nous introduisons la longueur d'une courbe, il est possible de paramétrer une courbe par sa longueur. Pour expliquer ce que représente cette paramétrisation par abscisse curviligne, ils sont introduits par l'intermédiaire d'un repère mobile, le repère de Frenet, qui est bien adapté à l'étude des courbes gauches. Nous donnons l'importance des concepts et mettons en évidence la courbure et la torsion d'une

courbe., dans le deuxième on s'intéresse à l'étude des surfaces paramétrées : surface régulier, éléments différentielle, et nous introduisons les concepts ( plan tangent et droite normale, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur une surface, l'aire d'une surface, on utilise la première forme fondamentale de la surface qui permet de calculer la longueur d'une courbe tracée sur la surface)

Dans le troisième chapitre on introduire l'intégrale curvilligne et ces propriétés, dans le dernier chapitre on s'intéresse aux notions de la géométrie affine ( espaces affines, barycentres, variétés affines, applications affines, repères affines et transformations affines )

# Chapitre 1

## Courbes paramétrées

Une grande partie des modèles mathématiques en physique et en mécanique utilisent la notion de point matériel et essayent de surprendre le mouvement en fonction du temps d'un tel objet le long d'une trajectoire dans l'espace. Nous proposons d'étudier le comportement des courbes de point de vue géométrique, où nous utilisons une description paramétrique des courbes, nous abordons les propriétés des courbes, qui ne dépendent que de la trajectoire, et non pas de la façon dont elle est parcourue. Ces propriétés sont géométriques.

### 1.1 Préliminaires

Nous utiliserons les notations usuelles des ensembles classiques nous notons donc  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{R}$  les ensembles des nombres naturels, entiers et réels, ceci implique que, pour  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons la notation :

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$



Par ailleurs, l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  est considéré avec l'addition et la multiplication avec des nombres réels, pour  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  et  $k \in \mathbb{R}$ , nous définissons :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$$

Certains point seront spécifiés :

$$e^1 = (1, 0, 0 \dots, 0), \quad e^2 = (0, 1, 0 \dots, 0), \dots, \quad e^n = (0, 0, 0 \dots, 1)$$

Nous considérons le produit scalaire standard :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Ainsi que la norme et la distance induites par ce produit scalaire :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad dist(x, y) = \|x - y\|$$

Nous rappelons aussi la définition du produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ , pour  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

## 1.2 Définitions

**Définition 1.2.1** Une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^n$  est une application

$$C : \quad I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto C(t) = (C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t))$$

Où  $I \subseteq \mathbb{R}$  est un intervalle non dégénéré et les composantes  $C_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) sont des fonctions continues :

$$C_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble  $S = C(I) = \{C(t) : t \in I\}$  est appelé le support géométrique de  $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

On dit que  $S$  est une courbe géométrique et que  $C(t)$  est une paramétrisation de  $S$ . Si  $n = 2$  : la courbe  $S$  est plane. Si  $n = 3$  : la courbe  $S$  est gauche.

**Remarque 1.2.1** *On dit que  $S$  est une courbe géométrique et que  $C$  est une paramétrisation de  $S$ . la courbe paramétrée comporte plus d'information que la courbe géométrique*

### 1.2.1 Exemples

#### Exemple 1.2.1

$$C : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longrightarrow C(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$C$  est une courbe plane  $C_1(t) = \cos(t)$ ,  $C_2(t) = \sin(t)$ ,  $C(0) = (1, 0)$ ,  $C\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Le support de  $C$  est un arc

**Exemple 1.2.2** *Le support géométrique de la courbe paramétrée  $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par  $C(t) = (k \cos(t), k \sin(t), t)$ ,  $k > 0$  est une hélice*

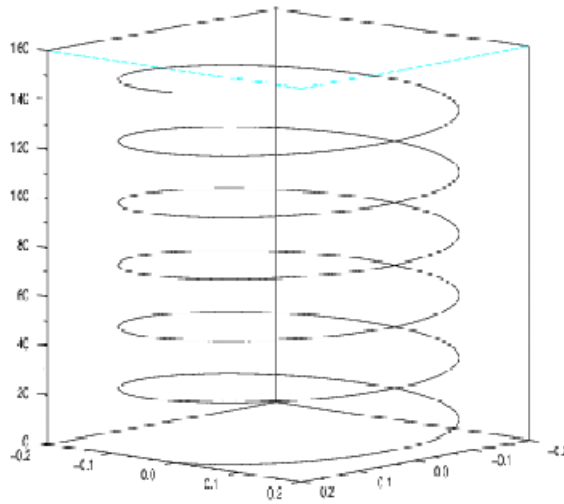


FIGURE 1.1 – Une hélice

**Exemple 1.2.3** (*Droite et segment dans  $\mathbb{R}^n$* ) Soient  $p, q$  deux points de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $p \neq q$ , il existe une seule droite passe par  $p$  et  $q$ , notons la  $D_{pq}$ . Un point  $x \in \mathbb{R}^n$ , se trouve sur cette droite ssi  $\exists t \in \mathbb{R} : x - p = t(q - p)$

En utilisant  $t$  comme paramètre, nous pouvons écrire la courbe paramétrée :

$$C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longrightarrow C(t) = p + t(q - p)$$

Le support de cette courbe est la droite  $D_{pq}$

Cette paramétrisation peut être utilisé pour trouver une paramétrisation du segment  $[pq]$  :

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \longrightarrow \gamma(t) = p + t(q - p)$$

On peut avoir une autre paramétrisation du segment  $[pq]$ , par exemple :

$$\begin{aligned} \beta &: \left[0, \frac{1}{5}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longrightarrow \beta(t) = p + 5t(q - p) \end{aligned}$$

**Exemple 1.2.4** Cercle dans  $\mathbb{R}^2$

Soit le cercle de centre  $O(0, 0)$  et de rayon  $\rho$ , on cherche une paramétrisation  $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  dont le support devrait être l'ensemble

$$\{x = (x_1, x_2) / x_1^2 + x_2^2 = \rho^2\}$$

Utilisons comme paramètre l'angle fermé par  $Ox$  et l'axe horizontal :

$$\begin{aligned} C &: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow C(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t) \end{aligned}$$

Pour un cercle de centre  $p = (p_1, p_2)$  et de rayon  $\rho$  la paramétrisation sera :  $C(t) = (p_1 + \rho \cos t, p_2 + \rho \sin t)$

A partir de l'exemple 3, nous observons que deux courbes peuvent avoir les mêmes supports et des paramétrisations différentes, ceci nous conduit à considérer la définition du changement de paramétrisation suivante :

**Définition 1.2.2** Soit la courbe  $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $\varphi : \tilde{I} \longrightarrow I$  est une fonction continue strictement monotone (croissante ou décroissante), alors nous obtenons une nouvelle courbe  $\tilde{C}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{C} &: \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longrightarrow \tilde{C}(s) = C(\varphi(s)) \end{aligned}$$

équivalente à  $C$  ( ont le même support ), et le passage de  $C$  à  $\tilde{C}$  appelé un changement de paramétrisation

**Exemple 1.2.5** Soit  $C : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , pour obtenir une courbe équivalente  $\tilde{C} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  il suffit de prendre :

$$\begin{aligned}\varphi : [0, 1] &\longrightarrow [a, b] \\ s &\longrightarrow \varphi(s) = a + s(b - a)\end{aligned}$$

## 1.3 Equation caractéristique

A partir de la paramétrisation d'une courbe, nous pouvons parfois obtenir l'équation qui caractérise le lien géométrique des points de l'espace. Pour cela il faut éliminer les paramètres entre les équations paramétriques. Citons quelques exemples

### 1.3.1 Exemples

**Exemple 1.3.1** (*Ellipse*)

Soit la courbe :

$$\begin{aligned}C : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow C(t) = (a \cos t, b \sin t)\end{aligned}$$

En éliminant  $t$  entre les deux composantes nous obtenons l'équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

qui est l'équation de l'ellipse de centre  $(0, 0)$  et les deux rayons  $a$  et  $b$

**Exemple 1.3.2** (*Hyperbole*) Soit les deux courbes

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \beta(t) = (a \cosh t, -b \sinh t)\end{aligned}$$

En éliminant  $t$  entre les deux composantes dans les deux courbes nous obtenons l'équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

qui est l'équation de l'hyperbole

**Exemple 1.3.3** (*Courbe sur une sphère*)

A partir des coordonnées sphériques et pour créer une paramétrisation d'une courbe ayant son support sur une sphère, il suffit de considérer les fonctions :

$$t \mapsto \Phi(t), t \mapsto \theta(t), t \in I$$

et de poser

$$C(t) = (\cos \theta(t) \cos \phi(t), \cos \theta(t) \sin \phi(t), \sin \theta(t))$$

## 1.4 Types des courbes

### 1.4.1 Courbe simple

Une courbe  $C$  est dite simple si elle ne se recoupe pas, autrement dit, si

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, t_1 \neq t_2 \implies C(t_1) \neq C(t_2)$$

**Exemple 1.4.1** La courbe  $C(t) = (\cos(t), \sin(t))$  avec  $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe simple

## 1.4.2 Courbe fermée

Soit  $a, b \in I$  avec  $a < b$ . Soit  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée telle que  $C(a) = C(b)$ .

On dit dans ce cas que  $C$  est une courbe fermée.

**Remarque 1.4.1** Une courbe simple est donc une courbe qui ne s'auto-intersecte pas, en d'autres termes la trajectoire ne se recoupe pas (sauf éventuellement si la courbe est fermée, auquel cas le seul point de recouvrement est le point de départ qui est identique au point d'arrivée)

## 1.5 Courbes régulières et espace tangent

### 1.5.1 Règles de calcul des dérivées ( rappel )

- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  où chaque  $f_i$  est une fonction réelle.

On dit que  $f$  est dérivable si chaque  $f_i$  est dérivable. La dérivée  $\dot{f}$  est par définition la fonction  $\dot{f} = (\dot{f}_1, \dot{f}_2, \dots, \dot{f}_n)$

- Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A = (a_{ij})$  une matrice  $m \times n$  et  $\phi : I \rightarrow J$  une fonction réelle, alors :

$$1 \quad \frac{d}{dt}(f(t) + g(t)) = \dot{f}(t) + \dot{g}(t)$$

$$2 \quad \frac{d}{dt}(\lambda f(t)) = \lambda \dot{f}(t)$$

$$3 \quad \frac{d}{ds}(f(\phi(s))) = \dot{\phi}(s) \dot{f}(\phi(s))$$

$$4 \quad \frac{d}{dt}(Af(t)) = A\dot{f}(t)$$

$$5 \quad \frac{d}{dt}\langle f(t), g(t) \rangle = \langle \dot{f}(t), g(t) \rangle + \langle f(t), \dot{g}(t) \rangle$$

$$6 \quad \frac{d}{dt}(f(t) \wedge g(t)) = (\dot{f}(t) \wedge g(t)) + (f(t) \wedge \dot{g}(t))$$

## 1.5.2 Courbes régulières

**Définition 1.5.1** Soit  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe dérivable, on dit que le point  $C(t_0)$  est régulier si  $\dot{C}(t_0) \neq 0$

La courbe paramétrée  $C$  est régulière si tout les point de  $C(I)$  sont réguliers.

**Définition 1.5.2** On dit que le point  $C(t_0)$  est birégulier si  $\dot{C}(t_0)$  et  $\ddot{C}(t_0)$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^n$

La courbe paramétrée  $C$  est birégulier si tout les points de  $C(I)$  sont biréguliers.

**Définition 1.5.3** Le point  $C(t_0)$  est dit singulier si  $\dot{C}(t_0) = 0$ .

**Remarque 1.5.1** Si  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est régulière et si  $\tilde{C} = C \circ \varphi$  est une reparamétrisation de  $C$  donc  $\tilde{C}$  est régulière. En effet on a :  $\dot{\tilde{C}}(t) = \dot{C}(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

**Exemple 1.5.1** (Cycloïde) Soit la courbe  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  par  $C(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ , pour étudier la régularité, on calcule  $\dot{C}$ ,  $\dot{C} = (1 - \cos t, \sin t)$  donc

$$\dot{C} = 0 \iff \|\dot{C}\|^2 = 0 \iff 2(1 - \cos t) = 0 \iff \cos t = 1 \iff t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

donc les points singuliers sont  $p_k = (2k\pi, 0)$

## 1.5.3 Vecteurs tangents

La tangente en un point  $C(t_0)$  à une courbe paramétrée  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la limite des droites passant par  $C(t)$  et  $C(t_0)$  quand  $t$  tend vers  $t_0$ .

**Définition 1.5.4** Soit  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$  et régulier, alors  $\dot{C}(t_0)$  est le vecteur tangent à la courbe  $C$  au point  $C(t_0)$ .



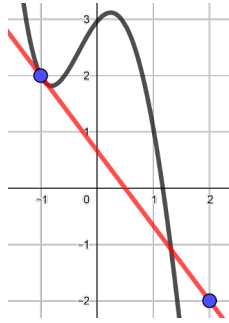


FIGURE 1.2 – Tangente à une courbe paramétrée

### 1.5.4 Intersection et angle entre deux courbes

Soient les deux courbes

$$\begin{aligned} \gamma & : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta & : J \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s & \mapsto \beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \dots, \beta_n(s)) \end{aligned}$$

S'il existe  $t_0 \in I$  et  $s_0 \in J$  telle que  $\gamma(t_0) = \beta(s_0)$ , on dit que les courbes s'intersectent et le point  $p = \gamma(t_0) = \beta(s_0)$  est le point d'intersection

L'angle formé par les deux vecteurs tangents au point d'intersection  $\dot{\gamma}(t_0)$  et  $\dot{\beta}(s_0)$  est par définition l'angle formé par les deux courbes.

Si  $\theta$  est l'angle formé, alors :

$$\cos \theta = \frac{\langle \dot{\gamma}(t_0), \dot{\beta}(s_0) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t_0)\| \|\dot{\beta}(s_0)\|}$$

**Exemple 1.5.2** Soient les deux courbes

$$\begin{aligned}\gamma & : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \gamma(t) = (t^2 - a^2, 2at)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta & : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto \beta(s) = (b^2 - s^2, 2bs)\end{aligned}$$

Cherchons les points d'intersections et calculons l'angle au ces points

$$\gamma(t) = \beta(s) \iff t^2 - a^2 = b^2 - s^2 \text{ et } 2at = 2bs$$

on substitue  $s = \frac{at}{b}$ , on obtient  $t^2 = b^2$ , d'ou on a deux solutions  $t_1 = b$  et  $t_2 = -b$ , pour  $t_1 = b$  on a  $s_1 = a$  et pour  $t_2 = -b$  on a  $s_2 = -a$  donc les deux points d'intersections sont  $p_1 = \gamma(t_1) = (b^2 - a^2, 2ab)$  et  $p_2 = \gamma(t_2) = (b^2 - a^2, -2ab)$

Pour obtenir l'angle on calcule les dérivé et on applique la formule de calcul de cosinus :

$$\cos \theta_1 = \frac{\langle \dot{\gamma}(t_1), \dot{\beta}(s_1) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t_1)\| \|\dot{\beta}(s_1)\|} = \frac{\langle (2b, 2a), (-2a, 2b) \rangle}{\sqrt{4b^2 + 4a^2} \sqrt{4b^2 + 4a^2}} = \frac{-4ab + 4ab}{4(a^2 + b^2)} = 0$$

d'ou  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  et de la même facon on obtient  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$

## 1.6 Longueur d'une courbe

Pour mesurer la longueur d'une courbe, il existe une solution naturelle, elle se base d'approcher cette longueur par le long de la ligne polygonale de sommets sur la courbe. Lorsque la distance est réduite entre deux têtes consécutives, La longueur de la ligne polygonale sera incliné vers la longueur de la courbe.

Etant donnée des points  $a_0, a_1, \dots, a_m$  de  $\mathbb{R}^n$ , le polygone  $P = a_0 a_1 \dots a_m$  formé par les segments  $[a_k a_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$  à de longueur  $L(P) = \sum_{k=0}^{m-1} \|a_{k+1} - a_k\|$  Considérons une courbe régulière  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  une partition de  $[a, b] : t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$ . Nous construisons un polygone  $P_\sigma = C(t_0)C(t_1)\dots C(t_m)$ , alors  $L(P_\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} \|C(t_{k+1}) - C(t_k)\|$ .

Si on note  $d_k = t_{k+1} - t_k$ , alors  $L(P_\sigma) = \sum_{k=0}^{m-1} d_k \|\frac{1}{d_k}(C(t_{k+1}) - C(t_k))\|$ .

En faisant  $\max_k d_k$  tend vers 0, nous obtenons un polygone approche mieux la courbe

**Définition 1.6.1** Soit la  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , nous appellons longueur de la courbe dans l'intervalle  $[a, b]$ , la quantité définie par :  $L_{[a,b]}(C) = \int_a^b \|\dot{C}(t)\| dt$

**Exemple 1.6.1** La longueur de l'hélice paramétrée par  $C(t) = (k \cos(t), k \sin(t), t)$ ,  $k > 0$  avec  $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est donnée par  $L_{[0,2\pi]}(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{k^2 + 1} dt = 2\pi \sqrt{k^2 + 1}$

Parce que  $\dot{C}(t) = (-k \sin t, k \cos t, 1) \Rightarrow \|\dot{C}(t)\| = \sqrt{k^2 + 1}$ .

**Proposition 1.6.1** La longueur d'une courbe ne dépend pas du paramétrage choisi.

**Preuve.** Soit  $C$  une courbe et  $C_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux paramétrages de  $C$  Il existe un changement de paramétrisation  $\varphi : J \rightarrow I$  tel que  $C_2 = C_1 \circ \varphi$

$$L_J(C_2) = \int_J \|\dot{C}_2(t)\| dt = \int_J \|\dot{C}_1(\varphi(t))\| \|\dot{\varphi}(t)\| dt = \int_I \|\dot{C}_1(s)\| ds = L_I(C_1).$$

■

## 1.7 Abscisse curviligne

En géométrie différentielle, l'abscisse curviligne est une sorte de variante algébrique de la longueur d'un arc. On se donne une origine à partir de laquelle on calcule les longueurs, en les munissant d'un signe pour se situer de façon bien déterminée sur la courbe : à telle

distance avant ou après le point initial. L'abscisse curviligne est donc l'analogue, sur une courbe, de l'abscisse sur une droite orientée.

**Définition 1.7.1** Soit  $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$  et  $t_0 \in I$ . L'abscisse curviligne à partir du point de paramètre  $t_0$  est la fonction  $S : I \longrightarrow \mathbb{R}$  donnée par :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{C}(v)\| dv \quad , \forall t \in I$$

**Définition 1.7.2** Une paramétrisation  $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  d'une courbe géométrique est dite normale (ou par abscisse curviligne) si pour tout  $[t_1, t_2] \subset I$  la longueur de la courbe géométrique entre les points  $C(t_1)$  et  $C(t_2)$  est exactement  $(t_2 - t_1)$

$$L_{[t_1, t_2]}(C) = t_2 - t_1$$

**Remarque 1.7.1** L'abscisse curviligne  $s(t)$  de la courbe géométrique  $C(I)$  est la longueur de la courbe entre les point  $C(t_0)$  et  $C(t)$ .

**Théorème 1.7.1** Soit  $C : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée régulière de classe  $C^1$  de longueur  $L$ , alors il existe un changement de paramétrisation  $\varphi : [0, L] \longrightarrow [a, b]$  tel que la courbe  $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n : \gamma(s) = C(\varphi(s))$  satisfait  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$

**Preuve.** Soit  $\psi : [a, b] \longrightarrow [0, L]$  définie par :

$$\psi(t) = L_{[a, t]}[C] = \int_a^t \|\dot{C}(\tau)\| d\tau.$$

On a  $\|\dot{C}(\tau)\|$  implique  $\psi$  monotone croissante, alors elle admet un inverse  $\psi^{-1} : [0, L] \longrightarrow [a, b]$ , posons  $\varphi = \psi^{-1}$ , d'après la définition de  $\psi$  on a  $\dot{\psi}(t) = \|\dot{C}(t)\|$ , d'où  $\dot{\varphi}(s) = \frac{1}{\|\dot{C}(\varphi(s))\|} > 0$ , donc si on prend  $\gamma(s) = C(\varphi(s))$  alors  $\dot{\gamma}(s) = \dot{\varphi}(s) \dot{C}(\varphi(s))$ , d'où  $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$

■

**Exemple 1.7.1** Soit la courbe  $C : ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :  $t \longrightarrow C(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$   
 L'abscisse curviligne est :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_{t_0}^t \|\dot{C}(\tau)\| d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \left\| \left( 1, \frac{-\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) \right\| d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{1 + \left( \frac{-\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right)^2} d\tau \\ \psi(t) &= \arcsin(t) \end{aligned}$$

La fonction  $\arcsin : ]0, 1[ \longrightarrow ]0, \frac{\pi}{2}[$  est une bijection. La reparamétrisation  $\tilde{C} = C \circ \psi^{-1} : ]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(s) &= C(\sin s) \\ &= \left( \sin s, \sqrt{1 - \sin^2(s)} \right) \\ &= \left( \sin s, \sqrt{1 - \sin^2(s)} \right) \\ \tilde{C}(s) &= (\sin(s), \cos(s)) \end{aligned}$$

**Définition 1.7.3** Une courbe  $C : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  satisfait  $\|\dot{C}\| = 1$  est dite paramétrée par longueur d'arc ou abscisse curviligne

**Définition 1.7.4** (Vecteur tangent unitaire) Soit  $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  Une courbe paramétrée, le vecteur tangent unitaire est définie par

$$T_C(t) = \frac{1}{\|\dot{C}\|}, t \in I$$

**Définition 1.7.5** Soit  $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  Une courbe régulière, on définit la courbure de  $C$  au

point  $C(t)$  par  $k(t) = \frac{\|T_C(t)\|}{\|\dot{C}\|}$ , et  $R = \frac{1}{k(t)}$  est le rayon de courbure

## 1.8 Repère de Frenet

Soit  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  Une courbe régulière satisfait  $k(t) \neq 0$ , on définit les vecteurs :

$$N_C(t) = \frac{\dot{T}_C(t)}{\|\dot{T}_C(t)\|}$$

$$B_C(t) = T_C(t) \wedge N_C(t)$$

L'ensemble  $\{T_C(t), N_C(t), B_C(t)\}$  est un repère orthonormal de  $\mathbb{R}^3$ , appelé repère de Frenet

### 1.8.1 Formules de Frenet

Le repère de Frenet associé à une courbe régulière  $C$  de courbure non nulle, satisfait les relations suivantes :

- 1)  $\frac{\dot{T}_C(t)}{\|\dot{C}(t)\|} = k(t)N_C(t)$
- 2)  $\frac{\dot{N}_C(t)}{\|\dot{C}(t)\|} = -k(t)N_C(t) + \tau(t)B_C(t)$
- 3)  $\frac{\dot{B}_C(t)}{\|\dot{C}(t)\|} = -\tau(t)N_C(t)$

où  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  associé à la courbe et définie par  $\tau(t) = \frac{\langle \dot{N}_C(t), \dot{B}_C(t) \rangle}{\|\dot{C}(t)\|}$  est appelé torsion de la courbe Pour le calcul du repère de Frenet, la courbure et la torsion, il est utile de procéder d'une autre manière qu'en théorie

$$\begin{aligned}
 B_C(t) &= \frac{\dot{C}(t) \wedge \ddot{C}(t)}{\|\dot{C}(t) \wedge \ddot{C}(t)\|} \\
 N_C(t) &= B_C(t) \wedge T_C(t) \\
 k(t) &= \frac{\|\dot{C}(t) \wedge \ddot{C}(t)\|}{\|\dot{C}(t)\|^2} \\
 \tau(t) &= \frac{\langle \dot{C}(t) \wedge \ddot{C}(t), \ddot{C}(t) \rangle}{\|\dot{C}(t) \wedge \ddot{C}(t)\|^2}
 \end{aligned}$$

Si la courbe  $C$  est paramétré par abscisse curviligne et  $k(t) \neq 0$  alors les formules seront simplifier

$$\begin{aligned}
 T_C(t) &= \dot{C}(t), \quad N_C(t) = \frac{\ddot{C}(t)}{\|\ddot{C}(t)\|} \\
 k(t) &= \|\ddot{C}(t)\|, \quad B_C(t) = \frac{\dot{C}(t) \wedge \ddot{C}(t)}{\|\ddot{C}(t)\|}, \quad \tau(t) = \frac{\langle \dot{C}(t) \wedge \ddot{C}(t), \ddot{C}(t) \rangle}{\|\ddot{C}(t)\|^2}
 \end{aligned}$$

### 1.8.2 Courbe dans un plan

Soit  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  Une courbe régulière satisfait  $k(t) \neq 0, \forall t \in I$

**Théorème 1.8.1** *La courbe est situé dans un plan ssi  $\tau(t) = 0$*

**Preuve.**

— 1)  $\tau(t) = 0 \implies$  La courbe est situé dans un plan ?

On a  $\frac{B_C(t)}{\|\dot{C}(t)\|} = -\tau(t)N_C(t)$ , donc  $B_C(t) = 0$ , d'ou  $B_C(t) = cte$ , notons  $B_C(t) = (b_1, b_2, b_3)$ .

Soit  $(\pi)$  le plan qui contient un point  $C(t_0)$  de la courbe et son normale est le vecteur  $B_C(t) = (b_1, b_2, b_3)$ , on montre que  $C(t) \in (\pi) \forall t \in I$ ?

Il faut montrer que :  $\langle C(t) - C(t_0), B_C(t) \rangle = 0, \forall t \in I$

Comme  $B_C(t) = cte$  et  $T_C(t) \perp B_C(t)$  on a  $\dot{B}_C(t) = 0$  et  $\langle T_C(t), B_C(t) \rangle = 0$ , d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle C(t) - C(t_0), B_C(t) \rangle &= \langle \dot{C}(t), B_C(t) \rangle + \underbrace{\langle C(t) - C(t_0), \dot{B}_C(t) \rangle}_{=0} \\ &= \langle \|\dot{C}(t)\| T_C(t), B_C(t) \rangle \\ &= \|\dot{C}(t)\| \underbrace{\langle T_C(t), B_C(t) \rangle}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc  $\langle C(t) - C(t_0), B_C(t) \rangle = cte$ , d'où pour  $t_0$  on obtient  $\langle C(t_0) - C(t_0), B_C(t_0) \rangle = 0$ , alors  $\langle C(t) - C(t_0), B_C(t) \rangle = 0 \forall t \in I$  et donc  $C$  est inclus dans le plan  $(\pi)$  qui contient  $C(t_0)$  et orthogonal à  $B_C(t)$

— 2) La courbe est situé dans un plan  $\implies \tau(t) = 0$  ?

Soit le plan  $(\pi)$  d'équation  $ax + by + dz + e = 0$ , si  $C(t) = (C_1(t), C_2(t), C_3(t))$  est inclus dans  $(\pi)$  alors  $aC_1(t) + bC_2(t) + dC_3(t) + e = 0$ . Si on derive cette dernière équation deux fois on obtient

$$\begin{aligned} a\dot{C}_1(t) + b\dot{C}_2(t) + d\dot{C}_3(t) &= 0 \\ a\ddot{C}_1(t) + b\ddot{C}_2(t) + d\ddot{C}_3(t) &= 0 \end{aligned}$$

alors  $(a, b, d) \perp \dot{C}(t)$  et  $(a, b, d) \perp \ddot{C}(t)$ , donc le vecteur  $B_C(t)$  qui est aussi orthogonal à  $\dot{C}(t)$  et  $\ddot{C}(t)$  est parallèle à  $(a, b, d) \forall t \in I$ , et comme  $B_C(t)$  est unitaire, alors il est constant, d'où  $\dot{B}_C(t) = 0$  et finalement  $\tau(t) = \frac{\langle \dot{B}_C(t), N_C(t) \rangle}{\|\dot{C}(t)\|} = 0$

■

**Cercle de courbure** Soit  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière, on a définie la courbure  $k(t)$  et le rayon de courbure  $R = \frac{1}{k(t)}$ , antenant on défine le centre du cercle de courbure comme suit : le centre  $\omega_0$  du cercle de courbure est sur la droite portée par le vecteur normale  $N_C(t)$  est calculé par la formule :  $\omega_0 = C(t_0) + RN_C(t_0)$



# Chapitre 2

## Surfaces paramétrées

Les surfaces classiques de la géométrie euclidienne (sphères, cônes, cylindres, etc.), des surfaces apparaissent naturellement en tant que graphes de fonctions de deux variables. Nous abordons ici de représenter ces objets géométriques sous forme paramétrique, comme ensembles décrits par une famille de courbes de l'espace.

**Définition 2.0.1** *Soit l'application*

$$\begin{aligned} F : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (u, v) &\mapsto (f_1(u, v), f_2(u, v), \dots, f_n(u, v)) \end{aligned}$$

Où  $D$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$  (ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$ ), et les  $f_i$  sont continue  $\forall i = 1, \dots, n$ . L'ensemble  $S = f(D)$  s'appelle surface paramétrée.

On dit que la surface  $S$  est différentiable si les  $f_i$  sont différentiables

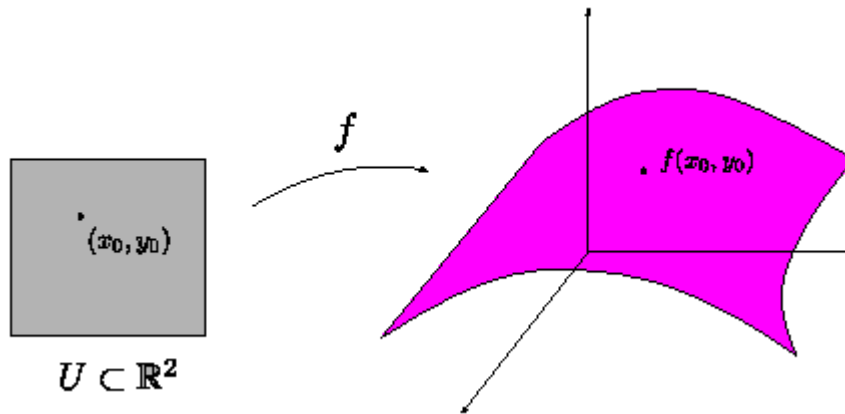


FIGURE 2.1 – Surface paramétrée

**Exemple 2.0.1** *Le cylindre, la sphère et l'hélicoïde dans  $\mathbb{R}^3$  sont paramétrés respectivement par les fonctions*

$$\phi(u_1, u_2) = (r \cos u_1, r \sin u_1, u_2), u_1 \in [0, 2\pi[, u_2 \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\varphi(u_1, u_2) = (r \cos u_1, r \sin u_1, r \cos u_2), u_1 \in [0, 2\pi[, u_2 \in [0, \pi[$$

$$\psi(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, u_2), u_2 \in [0, 2\pi], u_1 \in \mathbb{R}$$

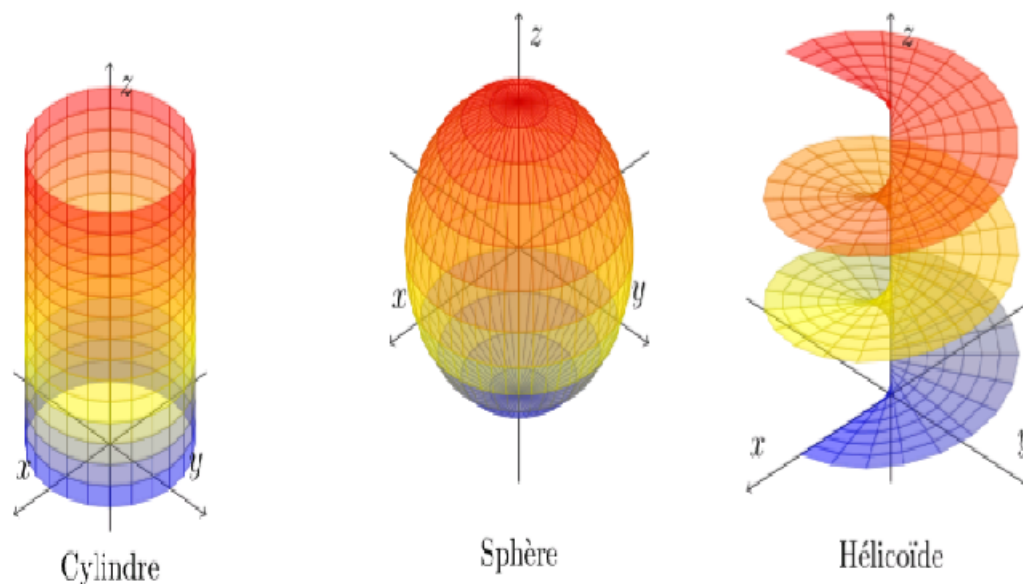


FIGURE 2.2 – Exemples de surfaces

## 2.1 Surface de révolution

Considérons une courbe  $C : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par  $C(t) = (0, C_2(t), C_3(t))$ . On fait tourner le plan  $\{(x, y, z) / x = 0\}$  autour de l'axe  $Oz$ , la courbe balaye une surface. Tout point de la courbe  $C$  engendre un cercle autour du point  $(0, 0, C_3(t))$  de rayon  $C_2(t)$  dans un plan parallèle au plan  $\{(x, y, z) / z = 0\}$ . L'union de ces cercles forment une surface  $S$  paramétrisée par :

$$f : D = [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto (C_2(v) \cos u, C_2(v) \sin u, C_3(v))$$

## 2.2 Courbes sur une surface

Soient la surface  $S$  paramétrée par  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et la courbe  $C : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ . La courbe  $\gamma$  définie par  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $\gamma(t) = f(C(t))$  est une courbe sur la surface  $S$

## 2.3 Surfaces régulières et vecteurs tangents

**Définition 2.3.1** On dit que la surface  $S$  paramétrée par  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est régulière au point  $(u_0, v_0) \in D$  si les vecteurs tangents à la surface au point  $f(u_0, v_0)$  qu'on note

$$f_u(u_0, v_0) = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u}, \quad f_v(u_0, v_0) = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}$$

sont linéairement indépendants (et donc non nuls); ie si leur produit vectoriel est non nul :

$$f_u(u_0, v_0) \wedge f_v(u_0, v_0) \neq 0.$$

et on dit que le point  $f(u_0, v_0)$  est singulier si les deux vecteurs tangents au ce point sont linéairement dépendants, ie si

$$f_u(u_0, v_0) \wedge f_v(u_0, v_0) = 0$$

**Exemple 2.3.1** La surface paramétrée par  $f(u, v) = (u^2, v^2, uv) \in \mathbb{R}^3$ , avec  $u, v \in \mathbb{R}$ , est singulière en  $(0, 0)$ , car

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_u f(u, v) = (2u, 0, v) \\ \text{et} \\ \partial_v f(u, v) = (0, 2v, u) \end{array} \right. \implies (\partial_u f \wedge \partial_v f)(u, v) = (-2v^2, -2u^2, 4uv)$$

donc le vecteur  $(\partial_u f \wedge \partial_v f)(u, v)$  s'annule en  $(0, 0)$ .  $S$  est régulière dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

**Exemple 2.3.2** Le graphe d'une fonction  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  donne une surface  $S$  paramétrée par

$$f(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad \text{avec} \quad (u, v) \in D_h \in \mathbb{R}^2$$

si  $h$  est de classe  $C^1$ , la surface  $S$  est régulière par tout :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_u f(u, v) = (1, 0, \partial_u h(u, v)) \\ \text{et} \\ \partial_v f(u, v) = (0, 1, \partial_v h(u, v)) \end{array} \right. \Rightarrow (\partial_u f \wedge \partial_v f)(u, v) = (-\partial_u h(u, v), -\partial_v h(u, v), 1) \neq \vec{0}.$$

**Définition 2.3.2** Soit  $S$  une surface paramétrée par  $f : u \times v \rightarrow \mathbb{R}^3$ , et soit  $m_0 = f(u_0, v_0)$  un point régulier de  $S$  on appelle :

\***Plan tangent** à  $S$  au point  $m_0$  le plan engendré par les vecteurs  $f_u(u_0, v_0)$  et  $f_v(u_0, v_0)$  et passant par  $m_0$

$$\begin{aligned} T_{m_0}S &= m_0 + \text{vect}(f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0)) \\ T_{m_0}S &= \{f(u_0, v_0) + \lambda f_u(u_0, v_0) + \mu f_v(u_0, v_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

\***Vecteur normale (unitaire)** en  $m_0$  le vecteur

$$N_S(u_0, v_0) = \frac{f_u(u_0, v_0) \wedge f_v(u_0, v_0)}{\|f_u(u_0, v_0) \wedge f_v(u_0, v_0)\|}$$

Le plan tangent à  $S$  en  $(u_0, v_0)$  contient la droite tangente à toutes les courbes régulières sur  $S$  passant par  $f(u_0, v_0)$ , en effet, si  $r(t) = f(u(t), v(t))$  est une telle courbe, et  $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$

On a

$$r'(t_0) = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial x} u'(t) + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial y} v'(t) \in \text{vect}(\partial_u f(u_0, v_0), \partial_v f(u_0, v_0))$$

**Remarque 2.3.1** Par définition, les trois vecteurs  $(\partial_u f(u_0, v_0), \partial_v f(u_0, v_0), N_S(u_0, v_0))$

forment une base directe de l'espace au-dessus du point  $f(u_0, v_0)$  de la surface ( c'est -à-dire un repère mobile ) mais cette base n'est ni orthogonale ni normale.

**Définition 2.3.3** L'espace tangent à une surface paramétrée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  au point  $m_0 = f(u_0, v_0)$  est l'espace affine noté  $T_{m_0}S$  (avec  $S = f(U \times V)$ ) passant par  $m_0$  et engendré par les vecteurs

$$f_u(u_0, v_0) \text{ et } f_v(u_0, v_0)$$

-En pratique, l'espace tangent  $T_{m_0}S$  désigne aussi l'espace vectoriel qui dirige l'espace affine défini ci-dessus à savoir donc l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u}$  et  $\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}$ .

## 2.4 Tenseurs métriques

**Définition 2.4.1** Soit la surface  $S$  définie par  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la matrice

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_u, f_v \rangle \\ \langle f_v, f_u \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix}$$

s'appelle matrice du tenseur métrique ( matrice de la première forme fondamentale )

**Proposition 2.4.1** Soit la surface  $S$  définie par  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et soient les deux courbes  $C : I \rightarrow D$   $d : J \rightarrow D$ , on note les deux courbes sur la surface  $S$  par  $\gamma = f \circ C$  et  $\delta = f \circ d$

— 1) La longueur de la courbe  $\gamma$  sur la surface  $S$  est donnée par :

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{\langle G(Ct) \dot{C}(t), \dot{C}(t) \rangle} dt$$

— 2) L'angle  $\alpha$  entre les deux courbes  $\gamma$  et  $\delta$  qui se coupent en  $f(u)$   $u = C(t_0) = d(s_0)$

se calcule comme suit :

$$\cos \alpha = \frac{\langle G(u)\dot{d}(s_0), \dot{C}(t_0) \rangle}{\sqrt{\langle G(u)\dot{C}(t_0), \dot{C}(t_0) \rangle} \sqrt{\langle G(u)\dot{d}(s_0), \dot{d}(s_0) \rangle}}$$

**Définition 2.4.2** L'aire de la surface  $S = f(I)$  paramétrée par  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$  est :

$$Air(S) = \int_I \int_J \sqrt{\det G(u, v)} dudv$$

**Proposition 2.4.2** Soit la surface  $S$  régulier, donnée par  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$  alors :  $\|(f_u \wedge f_v)(u, v)\| = \sqrt{\det G(u, v)}$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \|(f_u \wedge f_v)(u, v)\|^2 &= \langle f_u \wedge f_v, f_u \wedge f_v \rangle \\ &= \langle f_u, f_u \rangle \langle f_v, f_v \rangle - \langle f_u, f_v \rangle \langle f_v, f_u \rangle \\ &= \det G(u, v) \end{aligned}$$

■

**Exemple 2.4.1** Soit  $g : [0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  paramétré par :

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} (k + r \cos u) \cos v \\ (k + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$$

L'aire de cette surface est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire}(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|g_u(u, v) \wedge g_v(u, v)\| \, du \, dv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |r(k + r \cos u)| \, du \, dv \\
 &= \int_0^{2\pi} (2\pi kr) \, dv \\
 &= 4\pi^2 rk.
 \end{aligned}$$

**Théorème 2.4.1** Soit  $(D, f, S)$  une surface différentiable et  $G(u, v)$  sa matrice de la première forme fondamentale alors :

- 1) L'angle entre deux courbes  $C$  et  $d$  qui se coupent en un point  $U \in D$  et l'angle entre ses deux courbes images  $\gamma = f \circ C$  et  $\delta = f \circ d$  au point  $p = f(U)$  sont égaux (***f préserve les angles***) ssi  $\exists \lambda : D \Rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$G(u, v) = \lambda(u, v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2) La longueur de la courbe sur  $D$  et la longueur de son image sur  $S$  sont égaux (***f préserve la longueur***) ssi  $\forall (u, v) \in D$  :

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3) L'air de tout  $\Omega \subset D$  et l'air de son image  $f(\Omega)$  sont égaux (***f préserve les airs***) ssi  $\det G(u, v) = 1$



# Chapitre 3

## Intégrale curviligne

### 3.1 Intégrale curviligne d'un champs de vecteurs

**Définition 3.1.1** *Un champ de vecteurs dans le plan ou l'espace consiste à se donner en chaque point  $(x, y)$  (resp.  $(x, y, z)$ ) un vecteur  $g(x, y)$  (resp.  $g(x, y, z)$ ).*

**Définition 3.1.2** *Soit  $t \mapsto C(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$  une courbe paramétrée dont le vecteur  $\dot{C}$  est continue. Soit  $(x, y) \mapsto g(x, y)$  un champ de vecteurs continue. on appelle intégrale curviligne de  $g$  le long de  $C$  et on note  $\int_C g(x, y) dx dy$  le réel défini par*

$$\int_C g(x, y) dx dy = \int_a^b g(C(t)) \dot{C}(t) dt$$

**Exemple 3.1.1** *soient  $g : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x_1 x_2, x_1 + x_2)$  et  $C$  le segment de droite joignant les points  $A = (0, 1)$  et  $B = (1, 1)$ , orienté de  $A$  vers  $B$  un paramétrage de  $C$  est*

$$\varphi : t \in [0, 1] \rightarrow (t, 1) \in \mathbb{R}^2$$

*pour  $t \in [0, 1]$  on a :*

$$\dot{\varphi}(t) = (1, 0) \text{ et } g(\varphi(t)) = (t, 1+t)$$

donc :

$$g(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = t$$

et on en déduit que :

$$\int_C g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

**Remarque 3.1.1** *l' intégrale curviligne  $\int_C g(X) dX$  est dans certains contextes appelée la circulation du champ de vecteurs  $g$  le long de la courbe  $C$ .*

**Théorème 3.1.1** *La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe ne dépend pas du paramétrage choisi pour la courbe.*

**Preuve.** On remplace le paramètre  $t$  par  $\tau = \varphi(t)$ , et on note  $C_1(\tau) = C(t)$ . Le vecteur  $\dot{C}(t)$  est changé en  $v_1(\tau) = v(t)/\dot{\varphi}(t)$ . alors :

$$\begin{aligned} \int_C g(X) dX &= \int_J g(C_1(\tau)) \cdot v_1(\tau) d\tau \\ &= \int_I g(C_1(\varphi(t))) \cdot v_1(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt \\ &= \int_I g(r(t)) \cdot v(t) dt \\ &= \int_C g(X) dX \end{aligned}$$

■

**Corollaire 3.1.1** *Soit  $C$  une courbe paramétrée par son abscisse curviligne et soit  $g(s)$  le vecteur unitaire tangent à  $C$ . alors la circulation d'un champ de vecteurs  $u$  le long de*

$C$  s'écrit  $\int g \cdot u(C(s)) ds$ . On peut donc écrire

$$\text{circulation}(g, C) = \int_I g \cdot u ds$$

.

### 3.1.1 Cas des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

**Théorème 3.1.2** Soit  $f$  une fonction, et  $t \rightarrow C(t), t \in I$ , une courbe paramétrée. Pour tous  $t_0$  et  $t_1 \in I$ ,

$$\text{circulation}(\nabla f, C[t_0, t_1]) = f(C(t_1)) - f(C(t_0))$$

.

Autrement dit, la circulation d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel ne dépend que de l'état initial et de l'état final, et non du chemin choisi. Lorsqu'un point matériel se déplace dans un potentiel, le travail fourni par la force est égale à la variation de l'énergie potentiel entre l'état final et l'état initial.

## 3.2 Formes différentielles de degré 1

On considère une courbe paramétrée définie par les équations :

$$\begin{cases} x = C_1(t) \\ y = C_2(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Soit  $F = p(x, y) dx + q(x, y) dy$  forme différentielle définie dans un domaine qui contient  $C$ . On remplace  $x$  par  $C_1(t)$  et  $y$  par  $C_2(t)$  on a :

$$\begin{cases} dx = dC_1(t) = \dot{C}_1(t) dt \\ dy = dC_2(t) = \dot{C}_2(t) dt \end{cases}$$

Notons :

$$\begin{cases} p_1(t) = p(C_1(t), C_2(t)) \\ q_2(t) = q(C_1(t), C_2(t)) \end{cases}$$

La forme de  $g$  devient :

$$g = p_1(t) \dot{C}_1(t) + q_2(t) \dot{C}_2(t)$$

Considérons l'intégrale :

$$I = \int_a^b [p_1(t) \dot{C}_1(t) + q_2(t) \dot{C}_2(t)] dt$$

**Proposition 3.2.1** *L'intégrale  $I$  ne dépend pas du paramètre choisis mais uniquement de la courbe  $C$  et de la forme  $g$*

**Définition 3.2.1** *L'intégrale  $I$  est appelée intégrale curviligne de la forme  $g = p dx + q dy$  le long de la courbe  $C$  et nous la noterons*

$$\int_C g \quad \text{ou} \quad \int_C (p dx + q dy)$$

*ona donc :*

$$\int_C (p dx + q dy) = \int_a^b [p(C_1(t), C_2(t)) \dot{C}_1(t) + q(C_1(t), C_2(t)) \dot{C}_2(t)] dt$$

**Remarque 3.2.1** *Considérons le cas d'une courbe  $C$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par :*

$$\begin{cases} x = C_1(t) \\ y = C_2(t) \\ z = C_3(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

et une forme différentielle  $g = p dx + q dy + r dz$  L'intégrale curviligne de  $I$  le long de  $C$  est notée

$$I = \int_C (p dx + q dy + r dz)$$

elle est égale à

$$I = \int_C \left[ p(C_1(t), C_2(t), C_3(t)) \dot{C}_1(t) + q(C_1(t), C_2(t), C_3(t)) \dot{C}_2(t) + r(C_1(t), C_2(t), C_3(t)) \dot{C}_3(t) \right] dt$$

elle ne depend pas du choix de paramètre.

**Proposition 3.2.2** Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs de composantes  $p(x, y)$  et  $q(x, y)$  et  $M(t)$  le point  $(C_1(t), C_2(t))$  de la courbe et  $\vec{M}(t)$  est un vecteur tangent à la courbe  $C$ , de composantes  $(\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t))$

$$\int_C (p dx + q dy) = \int_a^b \vec{V}(C_1(t), C_2(t)) \vec{M}(t) dt$$

**Preuve.** on a

$$\vec{V}(C_1(t), C_2(t)) \vec{M} = p(C_1(t), C_2(t)) \dot{C}_1(t) + q(C_1(t), C_2(t)) \dot{C}_2(t)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{V}(C_1(t), C_2(t)) \vec{M}(t) dt &= \int_a^b \left[ p(C_1(t), C_2(t)) \dot{C}_1(t) + q(C_1(t), C_2(t)) \dot{C}_2(t) \right] dt \\ &= \int_C (p dx + q dy) \end{aligned}$$

■

### 3.3 Propriété de l'intégrale curviligne

On a les propriétés suivantes :

— 1)

$$\int_C (g_1 + g_2) = \int_C g_1 + \int_C g_2 \text{ et } \int_C \lambda g = \lambda \int_C g$$

— 2) Soit  $g$  un champ scalaire définie et continue sur une courbe  $C$ . Soient  $\vec{c}_1 : [a, b]$  et  $\vec{c}_2 : [c, d]$  deux paramétrisations équivalentes de  $C$ , alors, on a

$$\int_C g dX = \int_a^b g(\vec{c}_1(t)) \cdot \|\dot{\vec{c}}_1(t)\| dt = \int_c^d g(\vec{c}_2(u)) \cdot \|\dot{\vec{c}}_2(u)\| du.$$

### 3.4 Aire d'un domaine du plan

Soit  $D$  un domaine dans le plan limité par une courbe  $C$  fermée, sans point double. On suppose que la courbe  $C$  est orientée dans le sens direct (contre les aiguilles d'une montre)

**Théorème 3.4.1** *L'aire du domaine  $D$  est égale à l'intégrale curviligne*

$$S = \int_C x dy = - \int_C y dx = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx).$$

**Exemple 3.4.1** *Nous recalculons l'aire de l'ellipse limitée par la courbe d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0$$

*Nous prendrons la représentation paramétrique*

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a, b > 0$$

*Alors l'aire de l'ellipse est égale à*

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t d(b \sin t) - b \sin t d(a \cos t)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t dt + ab \sin^2 t dt) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Géométrie affine

### 4.1 Espaces affines

**Définition 4.1.1** Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $\Omega$  un sous ensemble non vide de  $E$ . On dit que  $\Omega$  est un espace affine sur  $E$  ssi il existe une application  $\varphi : \Omega \times \Omega \rightarrow E$  tel que :

- 1)  $\forall (A, B, C) \in \Omega^3 \varphi(A, C) = \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$
- 2)  $\forall x \in E, \forall A \in \Omega \exists ! B \in \Omega : \varphi(A, B) = x$

Les éléments de  $\Omega$  s'appellent des points, et  $E$  s'appelle direction de  $\Omega$

**Remarque 4.1.1** — 1) On écrit  $\overrightarrow{MN}$  au lieu de  $\varphi(M, N)$

- 2) La première condition dans la définition s'appelle **Relation de Chasles**
- 3) La deuxième condition dans la définition s'appelle **Condition de bijectivité**

**Exemple 4.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , l'application suivante :

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longmapsto v - u\end{aligned}$$



définie sur  $E$  un espace affine sur lui même. En effet  $\forall (A, B, C) \in E^3$   $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = (B - A) + (C - B) = C - A = \varphi(A, C)$

Soit  $u, v \in E$  on cherche  $w \in E$  tel que :  $v = \varphi(u, w)$ ?, on a  $\varphi(u, w) = w - u$  donc  $v = w - u$  d'ou  $w = v + u$  donc la deuxième condition est vérifiée.

Alors on conclue que tout espace vectoriel est un espace affine sur lui même et on a  $\overrightarrow{MN} = N - M$

### 4.1.1 Barycentre

Soient  $\Omega$  un espace affine sur un espace vectoriel  $E$ ,  $\{A_i\}_{i=1, \dots, n} \subset \Omega$ ,  $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, n} \subset \mathbb{K}$

**Définition 4.1.2** *L'application*

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto f(M) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} \end{aligned}$$

est appelée fonction vectoriel de Leibniz associè au système  $\{A_i, \alpha_i\}_{i=1, \dots, n}$

**Théorème 4.1.1** *Soit  $f$  la fonction vectoriel de Leibniz associè au système  $\{A_i, \alpha_i\}_{i=1, \dots, n}$ ,*

*alors*

- 1)  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 0 \implies f = cte$
- 2)  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \neq 0 \implies f$  est bijective

**Preuve.**

- 1)  $f = cte$ ?

Soit  $(M, N) \in \Omega^3$   $M \neq N$ , il suffit de montrer que  $f(M) - f(N) = 0$

$$\begin{aligned}
 f(M) - f(N) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} - \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{NA_j} \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (\overrightarrow{MA_j} - \overrightarrow{NA_j}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (\overrightarrow{MA_j} + \overrightarrow{A_jN}) \\
 &= \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \overrightarrow{MN} \\
 &= 0 \quad \left( \text{car } \sum_{j=1}^n \alpha_j = 0 \right)
 \end{aligned}$$

— 2)  $f$  est bijective ?

— a)  $f$  est injective ?

$$\begin{aligned}
 f(M) = f(N) &\implies f(M) - f(N) = 0 \\
 &\implies \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} - \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{NA_j} = 0 \\
 &\implies \sum_{j=1}^n \alpha_j (\overrightarrow{MA_j} + \overrightarrow{A_jN}) = 0 \\
 &\implies \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \overrightarrow{MN} = 0 \\
 &\implies \overrightarrow{MN} = 0 \quad \left( \text{car } \sum_{j=1}^n \alpha_j \neq 0 \right) \\
 &\implies M = N
 \end{aligned}$$

— b)  $f$  est surjective ?

Par l'absurde, on suppose que  $f$  n'est pas surjective c.a.d  $\exists y \in E, \forall M \in \Omega : y \neq f(M)$  i.e  $\forall \{\alpha_j\} \subset \mathbb{K} : \sum_{j=1}^n \alpha_j \neq 0$  et  $\forall \{A_j\} \subset \Omega : y \neq \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j}$  donc pour  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_j = 0, j = 2, \dots, n$  on a  $f(M) = \overrightarrow{MA_1}$ , donc d'après la supposition  $y \neq \overrightarrow{MA_1}, \forall M \in \Omega$  c'est une contradiction avec la deuxième condition d'un espace affine, alors la supposition est fausse, d'où  $f$  est surjective

■

**Définition 4.1.3** Soit  $f$  la fonction vectoriel de Leibniz associè au système  $\{A_i, \alpha_i\}_{i=1, \dots, n}$  tel que  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \neq 0$ . On définit le barycentre du système  $\{A_i, \alpha_i\}_{i=1, \dots, n}$  par le point  $G \in \Omega :$

$$f(G) = 0 \text{ c.a.d : } \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{GA_j} = 0$$

### Propriétés

- 1)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}/\{0\}$  le barycentre du système  $\{A_i, \lambda \alpha_i\}_{i=1, \dots, n}$  est le même du système  $\{A_i, \alpha_i\}_{i=1, \dots, n}$
- 2) Si  $E, F$  est une partition de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  et  $\beta = \sum_j \alpha_j \neq 0$   $\gamma = \sum_{j \in F} \alpha_j \neq 0$ . Si  $G_1$  est le barycentre du système  $\{A_j, \alpha_j\}_{j \in E}$ ,  $G_2$  est le barycentre du système  $\{A_j, \alpha_j\}_{j \in F}$  et  $G$  est le barycentre du système  $\{A_j, \alpha_j\}_{j=1, \dots, n}$  alors  $G$  est le barycentre du système  $\{(G_1, \beta), (G_2, \gamma)\}$

## 4.1.2 Variétés affines

**Définition 4.1.4** Soit  $\Omega$  un espace affine sur  $E$ ,  $F$  un sous ensemble non vide de  $\Omega$ . On dit que  $F$  est une variété affine de  $\Omega$  ssi

$\exists A \in F : \text{l'ensemble } H = \{\overrightarrow{AM}/M \in F\}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

$H$  est appelé direction de  $F$  et la variété affine  $F$  est dite aussi sous espace affine

**Proposition 4.1.1** Si  $F$  est une variété affine d'un espace affine  $\Omega$  alors  $\forall B \in F$ , l'ensemble  $H' = \{\overrightarrow{BM}/M \in F\}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ . ( la direction de  $F$  ne dépend pas du choix de point  $A$ )

**Preuve.**  $F$  est une variété affine, donc  $\exists A \in F$  : l'ensemble  $H = \{\overrightarrow{AM}/M \in F\}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , soit  $H' = \{\overrightarrow{BM}/M \in F\}$ , on va montrer que  $H = H'$ .

— 1)  $H' \subset H$ ?

$$\begin{aligned} x \in H' &\implies \exists M \in F : x = \overrightarrow{BM} \\ &\implies \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \\ &\implies \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) \in H \quad (H \text{ est un sous espace vectoriel}) \end{aligned}$$

— 2)  $H \subset H'$ ?

On a  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  des éléments de  $H$  et Comme  $H$  est un sous espace vectoriel alors on peut représenter chaque vecteur  $x \in H$  comme suit  $\forall x \in H, \exists M \in F : x = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}, x = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} \in H'$

■

**Définition 4.1.5** — 1) La dimension d'un espace affine est la dimension de l'espace vectoriel sur le quel il est définis

— 2) La dimension d'une variété affine est la dimension de sa direction

— 3) Toute variété affine de dimension 1 (resp 2) appelée droite (resp plan) affine.

— 4) Si  $\Omega$  est un espace affine de dimension  $n$ , alors toute variété affine de dimension  $(n - 1)$  est appelée hyperplan

— 5) Les singletons de  $\Omega$  sont des variétés affines de dimension 0

**Théorème 4.1.2** L'intersection non vide d'une famille quelconque de variétés affines est une variété affine sa direction est l'intersection de toutes les directions de cette famille.

**Preuve.** Soit  $\{F_i\}_{i \in I}$  une famille variétés affines et  $\{H_i\}_{i \in I}$  ces directions. Soit  $A \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$ .  $A \in F \implies A \in F_i, \forall i \in I$ , donc on peut écrire les  $H_i$  en fonction du point  $A$  :  $H_i = \{\overrightarrow{AM}/M \in F_i$  qui sont des sous espaces vectoriels de  $E$ . On sait que  $W = \bigcap_{i \in I} H_i$  est un sous espaces vectoriel de  $E$ , posons  $H = \{\overrightarrow{AM}/M \in F$  et montrons que  $W = H$ .

— 1)  $H \subset W$ ?

$x \in H \implies \exists M \in F : x = \overrightarrow{AM}$  et  $M \in F \iff M \in F_i : \forall i \in I$ , d'où  $x = \overrightarrow{AM} \in H_i : \forall i \in I$ , alors  $x \in W$

— 2)  $W \subset H$ ?

$x \in W \implies x \in H_i : \forall i \in I$ , comme on ait dans un espace affine alors  $\exists! M \in F_i : \forall i \in I : x = \overrightarrow{AM}$ , d'où  $M \in F : x = \overrightarrow{AM}$ , donc  $x \in H$ .

Finalement nous avons montrer que  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$  est une variété affine sa direction est  $H = \bigcap_{i \in I} H_i$  ■

**Définition 4.1.6** — 1) Soit  $\emptyset \neq A \subset \Omega$ , la variété affine engendrée par  $A$  est l'intersection de toutes les variétés affines contenant  $A$ , on la note  $Aff(A)$

— 2) On dit que la famille  $\{A_i\}_{i=0, \dots, l}$  ( $l+1$  points) d'un espace affine  $\Omega$  est affinement indépendante si la variété affine engendrée par eux est de dimension  $l$

— 3) Soient  $F$  et  $F'$  deux variétés de direction  $H$  et  $H'$  respectivement. On dit que  $F$  et  $F'$  sont parallèles ssi  $H = H'$  et on écrit  $F \parallel F'$

**Proposition 4.1.2** — 1) Si  $F \parallel F'$  alors  $F = F' \vee F \cap F' = \emptyset$

— 2) Pour tout point  $A \in \Omega$ , il existe une unique variété affine  $F_A$  contenant  $A$  et parallèle à  $F$

**Preuve.**

— 1) Soit  $F \parallel F'$ , alors  $H = H'$ , on veut montrer que  $F = F' \vee F \cap F' = \emptyset$ . On suppose que  $F \cap F' \neq \emptyset$  et on montre que  $F = F'$ .

Soit  $A \in F \cap F'$ , alors on peut écrire les direction  $H$  et  $H'$  en fonction du point  $A$ , car les directions ne dépend pas du choix du point.  $H = \{\overrightarrow{AM}/M \in F\}$  et  $H' = \{\overrightarrow{AN}/N \in F'\}$ . On a  $H = H' \implies F = F'$  car  $M \in F \iff \overrightarrow{AM} \in H = H' \iff M \in F'$

— 2) Soit  $H$  la direction de  $F$ , on définit l'ensemble  $F_A = \{M \in \Omega / \overrightarrow{AM} \in H\}$  et soit  $A \in F_A$ , alors la direction de  $F_A$  s'écrit :  $H' = \{\overrightarrow{AM}/M \in F_A\}$ , pour montrer que  $F_A$  est une variété affine parallèle à  $F$ , il suffit de montrer que  $H = H'$

$x \in H' \iff x = \overrightarrow{AM}, M \in F_A \iff x = \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} \in H \iff x \in H$

■

## 4.2 Applications affines

### 4.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 4.2.1** Soient  $\Omega, \Lambda$  deux espaces affines sur  $E$  et  $F$  respectivement. On dit que l'application  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  est affine ssi existe une application linéaire unique  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  tel que  $\forall (M, N) \in \Omega^2 : \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$

**Exemple 4.2.1** Pour l'espace affine  $\mathbb{R}$  sur lui même l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - 1$  est affine. En effet  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\overrightarrow{f(x)f(y)} = f(y) - f(x) = 2(y - x) = 2\overrightarrow{xy}$  donc l'application linéaire associée  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\varphi(p) = 2p$

**Proposition 4.2.1** — 1) La composition de deux applications affines est une application affine

— 2) Soit  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  et  $\varphi$  son application linéaire associée, alors

— a)  $\varphi$  injective  $\Leftrightarrow f$  injective

— b)  $\varphi$  surjective  $\Leftrightarrow f$  surjective

— 3) L'image d'une variété affine par une application affine est une variété affine

**Preuve.**

— 1) Soient  $\Omega, \Lambda, \Delta$  trois espaces affines sur  $E, F$  et  $G$  respectivement et  $\Omega \xrightarrow{f} \Lambda \xrightarrow{g} \Delta$  deux applications affines d'applications linéaires associées  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement  $E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$ , alors on a

$$\overrightarrow{(g \circ f)(M)(g \circ f)(N)} = \overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = \psi(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \psi(\varphi(\overrightarrow{MN}))$$

donc  $g \circ f$  est affine d'application linéaire associée  $\psi \circ \varphi$

— 2)

— a) •  $\varphi$  injective  $\Rightarrow f$  injective?

$$\text{On a } f(M) = f(N) \Rightarrow \overrightarrow{f(M)f(N)} = 0 \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{MN}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 0_E \text{ car } \varphi$$

est injective donc  $M = N$ , d'où  $f$  est injective

•  $f$  injective  $\implies \varphi$  injective?

On a  $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \varphi(\overrightarrow{M'N'}) \implies \varphi(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}) = 0_E$ , comme  $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}) \in E$

et  $\Omega$  espace affine sur  $E$ , alors  $\exists(S, T) \in \Omega : \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ST}$

d'où  $\varphi(\overrightarrow{ST}) = 0_E \implies \overrightarrow{f(S)f(T)} = 0_E \implies S = T$  ( $f$  est injective)  $\implies \overrightarrow{ST} = 0_E \implies \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

— b) •  $f$  surjective  $\implies \varphi$  surjective?

Soit  $S \in \Lambda$ ,  $y \in F$ , donc  $\exists S' \in \Lambda : y = \overrightarrow{SS'}$  et comme  $f$  est surjective :  $(M, N) \in \Omega^2 : S = f(M)S' = f(N)$ , alors  $y = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN}) \overrightarrow{MN} \in E$ , donc

$\forall y \in F, \exists x \in E : y = \varphi(x)$ , d'où  $\varphi$  est surjective

$\forall y \in F, \exists x \in E : y = \varphi(x)$ , d'où  $\varphi$  est surjective

•  $\varphi$  surjective  $\implies f$  surjective?

Soient  $S \in \Omega$ ,  $N \in \Omega : f(N) = S'$ , soit  $y = \overrightarrow{SS'} \in F$ , alors  $\exists x \in E : y = \overrightarrow{SS'} = \varphi(x)$ , on a  $N \in \Omega, x \in E \implies \exists M \in \Omega : x = \overrightarrow{MN}$ , d'où  $\varphi(x) = \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{SS'}$ , comme  $f(N) = S'$ , alors  $f(M) = S$ , d'où  $f$  est surjective

$\varphi(x)$ , on a  $N \in \Omega, x \in E \implies \exists M \in \Omega : x = \overrightarrow{MN}$ , d'où  $\varphi(x) = \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{SS'}$ , comme  $f(N) = S'$ , alors  $f(M) = S$ , d'où  $f$  est surjective

— 3) Soient  $f : \Omega \longrightarrow \Lambda$  une application affine d'application linéaire associée  $\varphi : E \longrightarrow F$  et  $G$  une variété affine de  $\Omega$  de direction  $H = \{\overrightarrow{AM}/M \in G\}$

$E \longrightarrow F$  et  $G$  une variété affine de  $\Omega$  de direction  $H = \{\overrightarrow{AM}/M \in G\}$

$f(G)$  est une variété affine de  $\Lambda$ ?

Soit  $B = f(A)$  et  $H' = \{\overrightarrow{BN}/N \in f(G)\} = \{\overrightarrow{f(A)f(M)}/M \in G\} = \{\varphi(\overrightarrow{AM})/M \in G\} = \varphi(H)$

$G\} = \varphi(H)$

alors  $\varphi$  linéaire implique  $\varphi(H)$  est un sous espace vectoriel de  $F$

■

**Théorème 4.2.1** Soient  $\Omega, \Lambda$  deux espaces affines sur  $E$  et  $F$  respectivement et  $f : \Omega \longrightarrow \Lambda$  une application affine d'application linéaire associée  $\varphi$  alors

$\Lambda$  une application affine d'application linéaire associée  $\varphi$  alors

Si  $G$  est le barycentre de la famille  $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$  alors  $f(G)$  est le barycentre de la famille  $\{(f(A_i), \alpha_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$

**Preuve.** Comme  $G$  est le barycentre de la famille  $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$ , alors  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$ , et comme  $f$  est affine alors  $\overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \varphi(\overrightarrow{GA_i})$ , d'où

et comme  $f$  est affine alors  $\overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \varphi(\overrightarrow{GA_i})$ , d'où

$$\sum_{i=1}^n \alpha_j \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_j \varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_j \overrightarrow{GA_i}\right) = \varphi(0) = 0$$

alors  $f(G)$  est le barycentre de la famille  $\{(f(A_i), \alpha_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$  ■

## 4.2.2 Repères

**Définition 4.2.2** Soit  $\Omega$  un espace affine sur  $E$ , de dimension  $n$ . On appelle repère cartésien : le système composé d'un point de  $\Omega$  et une base de  $E$ . Si  $O \in \Omega$  et  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ , alors  $R = \{O, e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est un repère cartésien de  $\Omega$

Pour tout point  $M$  de  $\Omega$ , il existe unique  $\{x_i\}_{i=1,2,\dots,n}$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ , s'appellent composantes cartésiennes de  $M$  dans  $R$

**Définition 4.2.3** On dit que la famille de points  $\{A_i\}_{i=0,1,\dots,n}$  de  $\Omega$  est un repère affine si le système  $R = \{A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$  est un repère cartésien de  $\Omega$

**Théorème 4.2.2** Soient  $\Omega$  espace affine sur  $E$ ,  $\Lambda$  espace affine sur  $F$ ,  $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  repère affine de  $\Omega$ ,  $\{B_0, B_1, \dots, B_n\}$  ensemble de points de  $\Lambda$ , alors il existe une application affine unique  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  tel que  $f(A_i) = B_i, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$

**Preuve.** On cherche une application affine  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  tel que  $f(A_i) = B_i, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$ , alors son application linéaire associée  $\varphi$  doit vérifier  $\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Comme  $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  repère affine de  $\Omega$ , alors  $\{\overrightarrow{A_0A_i}\}$  est une base de l'espace vectoriel  $E$ , et d'après un résultat de l'algèbre linéaire, il existe une unique application linéaire  $\varphi : E \rightarrow F$  tel que  $\varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , donc il existe une application affine unique tel que  $\overrightarrow{B_0B_i} = \varphi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{f(A_0)f(A_i)}$ , de cette égalité, on déduit que  $f(A_i) = B_i, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$  ■

## 4.2.3 Formule d'une application affine

Soient :

- •  $\Omega$  espace affine sur  $E$ ,



- •  $\Lambda$  espace affine sur  $F$ ,
- •  $R = \{O, e_1, e_2, \dots, e_n\}$  repère affine de  $\Omega$ ,
- •  $R' = \{O, e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  repère affine de  $\Lambda$ ,
- •  $f : \Omega \rightarrow \Lambda$  application affine
- •  $\varphi : E \rightarrow F$  l'application linéaire associée à  $f$
- •  $A$  la matrice de  $\varphi$

- •  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  composantes de  $f(O)$  dans  $R'$

- •  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  composantes d'un point  $M$  de  $\Omega$  dans  $R$

- •  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$  les composantes de  $f(M)$

On a  $X = \overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{f(O)f(M)} = Y - b$  et  $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi \overrightarrow{OM} = AX$ , donc  $Y - b = AX$ , d'où  $Y = AX + b$  cette dernière s'appelle formule de l'application affine  $f$

## 4.3 Transformations affines

### 4.3.1 Points fixes

**Définition 4.3.1** Soient  $\Omega$  espace affine sur  $E$ ,  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  application affine.

On dit qu'un point  $p$  de  $\Omega$  est un point fixe si  $f(p) = p$

**Proposition 4.3.1** L'ensemble de points fixes d'une application affine  $f$  est une variété

affine de direction  $\ker(\text{Id}_E - \varphi)$ , où  $\varphi$  est l'application linéaire associée à  $f$

**Preuve.** Soient  $p, q$  deux points fixes de  $f$ , on a  $f(p) = p$  et  $f(q) = q$ , donc  $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \varphi(\overrightarrow{pq}) \Leftrightarrow \overrightarrow{pq} = \varphi(\overrightarrow{pq}) \Leftrightarrow \overrightarrow{pq} - \varphi(\overrightarrow{pq}) = 0_E \Leftrightarrow (\text{Id}_E - \varphi)(\overrightarrow{pq}) = 0_E \Leftrightarrow \overrightarrow{pq} \in \ker(\text{Id}_E - \varphi)$

Donc  $H = \ker(\text{Id}_E - \varphi)$  est la direction de l'ensemble de points fixes et qui est un sous espace vectoriel de  $E$ , d'où l'ensemble de points fixes est une variété affine de direction  $\ker(\text{Id}_E - \varphi)$  ■

### 4.3.2 Projection affine

**Définition 4.3.2** Soient  $G$  et  $F$  deux variétés affines d'un espace affine  $\Omega$ , tel que la direction de l'une est le complémentaire de l'autre. La projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  est l'application  $P : \Omega \rightarrow \Omega$  définie comme suit :

Si  $G'$  est l'unique variété affine passe par le point  $p$  est parallèle à  $G$ , alors  $p' = P(p) = F \cap G'$ , on note que l'intersection est un point parce que les directions de variétés  $F$  et  $G'$  sont somme directe de  $E$

**Proposition 4.3.2** Si  $P : \Omega \rightarrow \Omega$  est une projection alors :

- 1)  $P \circ P = P$
- 2)  $P$  est affine

**Preuve.**

- 1) Soit  $P$  la projection sur la variété affine  $F$  parallèle à  $G$ , on a  $p' = P(p) = F \cap G'$  où  $G'$  est l'unique variété affine passe par le point  $p$  est parallèle à  $G$ ,  $(P \circ P)(p) = P(P(p)) = P(p')$ .  $G'$  est aussi l'unique variété affine passe par le point  $p'$  est parallèle à  $G$ , donc elle coupe  $F$  dans  $p'$ , d'où  $P(p') = p' = P(p)$
- 2) Soit  $P$  la projection sur la variété affine  $F$  parallèle à  $G$ ,  $H$  et  $H'$  les directions de  $G$  et  $F$  respectivement. Pour montrer que  $P$  est affine, il faut chercher une application linéaire  $\varphi : E \rightarrow E$  tel que  $\forall (M, N) \in \Omega^2 : \overrightarrow{P(M)P(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$ .

On pose  $P(M) = M'$  et  $P(N) = N'$ , on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'N} \\ &= \left(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}\right) + \overrightarrow{M'N'} \\ &= \left(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}\right) + \overrightarrow{P(M)P(N)}\end{aligned}$$

On a  $\left(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N}\right) \in H$  et  $\overrightarrow{P(M)P(N)} \in H'$  et  $E = H \oplus H'$ , si on pose  $\varphi(\overrightarrow{MN})$ ,  $\varphi$  est la projection sur  $H'$  parallèle à  $H$ , donc  $\varphi$  est linéaire, d'où  $P$  est affine

■

### 4.3.3 Translation et homotétie affines

**Définition 4.3.3** Soit  $\Omega$  un espace affine sur  $E$ , on sait que :

$\forall x \in E, \forall M \in \Omega, \exists ! M' : x = \overrightarrow{MM'}$ , on définit l'application  $T_x : \Omega \rightarrow \Omega$  par  $T_x(M) = M'$  ;  $\overrightarrow{MT_x(M)} = x$ ,  $T_x$  est une application affine, son application linéaire associée est l'identité et on l'appelle **translation affine** de vecteur  $x$

**Définition 4.3.4** Soit  $\Omega$  un espace affine sur  $E$ ,  $O \in \Omega, \lambda \in \mathbb{K}/\{1\}$ . Pour  $M \in \Omega, \exists ! M' \in \Omega : \overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ , on définit l'application  $H_\lambda : \Omega \rightarrow \Omega$  par  $H_\lambda(M) = M'$  ;  $\overrightarrow{OH_\lambda(M)} = \lambda \overrightarrow{OM}$ ,  $H_\lambda$  est une application affine, d'application linéaire associée l'homotétie du quotient  $\lambda$  et l'appelle **homotétie affine** de centre  $O$  et quotient  $\lambda$

**Remarque 4.3.1** — 1) Si  $x \neq 0$ , alors la translation  $T_x$  n'a pas de points fixes

— 2) Le point  $O$  est l'unique point fixe de l'homotétie de centre  $O$  et quotient  $\lambda$

# Bibliographie

- [1] Boris Thibert, Courbes et surfaces 2ème Année Maths, Université Joseph Fourier, Grenoble I, (source <http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/cs/cs.pdf>)
- [2] Lecomte, P. Courbes et surfaces. (source [http://www.geothalg.ulg.ac.be/Courbes\\_surfaces.pdf](http://www.geothalg.ulg.ac.be/Courbes_surfaces.pdf))
- [3] J.LELONG-FERRAND, Jacqueline et ARNAUDIS, Jean-Marie. Les Cours de référence. Cours de mathématiques. T. 3. Géométrie et cinématique. Dunod Paris, 2001 Collection :
- [4] B. Buoni (2016). Courbes paramétrées. Ecole polytechnique de Lausanne, Section de mathématiques
- [5] Vincent GUEDJ (2015). Géométrie différentielle. Univ de Toulouse. (source [www.math.univ-toulouse.fr/guedj/fichierspdf/GeomDiff2015.pdf](http://www.math.univ-toulouse.fr/guedj/fichierspdf/GeomDiff2015.pdf))
- [6] Cours de Géométrie Affine et Euclidienne pour la Licence de Mathématiques, Emmanuel Pedon, Université de Reims-Champagne Ardenne 2015.
- [7] Michel Audin, Géométrie, Collection enseignement sup.
- [8] Y.Kerbrat et Braemer, Géométrie des courbes et surfaces et sous variété de  $\mathbb{R}^n$ .