Université de Biskra
Faculté des SENV
Département de Mathématiques

2^{er} semestre, année 2019/2020
$3^{ième}$ année licence Maths
Module: Probabilités Avancées

T.D. N^{0}3

Exercice n^0 01: Une boîte contient quatre boules numérotées 0, 1, 1, 2. On effectue n tirages avec remise. Soit S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer la loi de probabilité de la v.a. S_n.

Exercice n^0 02:

1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :

   a. Géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

   b. Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

2. Calculer les fonctions génératrices des moments pour les lois suivantes :

   a. Uniforme discrète de loi $\frac{1}{n}$.

   b. Uniforme sur $[0,1]$.

   c. Loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice n^0 03: On effectue une suite de parties de pile ou face. Soit u_n $(n \geq 1)$ la probabilité de ne pas avoir trois fois "face" à la suite au cours des n premières parties.

a. On a évidemment $u_1 = u_2 = 1$ et l'on pose $u_0 = 1$. Montrer que pour $n \geq 3$ on a la relation de récurrence
$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2} + \frac{1}{8}u_{n-3}.$$

b. On pose $U(s) = \sum_{n\geq 0} u_n s^n$. En déduire
$$U(s) = \frac{2s^2+4s+8}{8-4s-2s^2-s^3}.$$

Exercice n^0 04: Donner la fonction caractéristique de X :

1. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

2. Si X suit une loi Binomiale $\mathfrak{B}(n,p)$.

3. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice n^0 05 : La densité de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par

$$f(x) = Ce^{-a|x|}; x \in \mathbb{R}; \text{ où } a > 0 \text{ et } C \text{ une constante donnée.}$$

1. Trouver la fonction caractéristique de X.
2. En déduire $E\left(X^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice n^0 06: Donner la fonction caractéristique de X :

1. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. Si Y suit une loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire si Y a pour densité
$$f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$$
3. Si Z suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si Z a pour densité
$$f(z) = \frac{\lambda}{\pi\left(\lambda^2 + z^2\right)}.$$

Exercice n^0 07: Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $\Phi(t)$ sa fonction caractéristique.

1. Montrer que $\Phi'(t) = -t\sigma^2\Phi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. En déduire $\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice n^0 08: Montrer, en utilisant la fonction caractéristique, que

1. La somme de deux v.a. de Poisson indépendantes est une v.a. de Poisson.
2. La somme de deux v.a. Gaussiennes indépendantes est une v.a. Gaussienne.
3. La somme de deux v.a. de Cauchy indépendantes est une v.a. de Cauchy.

Exercice n^0 09: On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi. On suppose que $E[X_1] = 0$ et $Var(X_1) = \sigma^2$ et on note $\varphi(t)$ la fonction caractéristique de X. On considère la variable aléatoire

$$Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n)$$

1. Donner la fonction caractéristique de Y_n, $\Phi_n(t)$, en fonction de φ, t et n.
2. Montrer que, lorsque $x \to 0$, on a $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2x^2 + \circ(x^2)$.
3. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\log\Phi_n(t) \to -\frac{1}{2}\sigma^2t^2$ et donc que $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$, où

$\Phi(t)$ est la fonction caractéristique d'une loi que l'on précisera.