Chapitre 3: Modes de convergences.

Convergence de suites de v.a

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Convergence en probabilité

Définition : On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X, si

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

On note: $X_n \xrightarrow{P} X$.
Exemple : Considérons la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$, alors la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité. En effet si $\varepsilon > 0$, alors deux cas peuvent se présenter :
Premier cas : $\varepsilon > 1$: Pour tout $n \geq 1$, on a

$$P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Deuxième cas : $0 < \varepsilon \leq 1$, Pour tout $n \geq 1$, on a

$$P\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

d'où $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Convergence en moyenne

Définition : Soit X une variable aléatoire réelle.

- On dit que X est intégrable si $E\left(|X|\right) < \infty$.
- On dit que X est de carré intégrable si $E\left(|X|^2\right) < \infty$.
- Si $p \geq 1$, on dit que X est dans $L^p(\Omega)$ si $E\left(|X|^p\right) < \infty$.

Définition :

i) On dit qu'une suite de variables aléatoires intégrables $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne vers une variable aléatoire X, si

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X|\right) = 0.$$

ii) On dit qu'une suite de variables aléatoires de carré intégrable $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X, si

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X|^2\right) = 0.$$

iii) On générale, on dit que la suite de variables aléatoires de carré intégrable $(X_n)_{n\geq 1}$ dans $L^p(\Omega)$ converge en moyenne d'order p vers une variable aléatoire X, si avec $p \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

On note $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Exemple : Considérons la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - e^{-n}$ et e^{-n}, alors la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en moyenne. Pour $n \geq 1$, alors

$$E\left(|X_n - X|\right) = E\left(X_n\right) = 0 \times \left(1 - e^{-n}\right) + 1 \times e^{-n} = e^{-n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Convergence presque sûre

Définition : On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, si

$$P\left(\omega \in \Omega, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

On note $X_n \to X \; p.s$ ou bien $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

Remarque : La limites presque sure n'est pas unique, mais si X' est une autre limite $p.s$, alors $X = X' \; Pp.s$.

Théorème : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geq 1} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) < \infty$$

alors la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque surement vers X.

– Réciproquement, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v. a. r indépendantes qui converge presque sûrement vers X, alors l'inégalité précédante est vérifiée.

Exemple : Considérons la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{n^2}$, alors la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 presque sûrement. Pour $\varepsilon > 0$, alors :

Premier cas : $\varepsilon > 1$

$$P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Deuxième cas : $0 < \varepsilon \leq 1$

$$P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{n^2}$$

et comme $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, on a

$$\sum_{n\geq 1} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) < \infty$$

Donc,la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

Convergence en loi

On rappelle que deux v.a ont même loi ($P_X = P_Y$) si seulement si elles ont la même fonction de répartition ($F_X = F_Y$).
Définition : Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, $(F_{X_n})_{n\geq 1}$ la suite des fonctions de répartitions correspondantes. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X, si

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

pour tout point t, où F_X est continue. On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
Exemple : Soient $\alpha > 0$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même fonction de densité :

$$f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)},$$

si $x \in]1, +\infty[$ et posons pour $n \geq 1$,

$$Y_n = n^{-1/\alpha} \max_{1\leq k\leq n} X_k.$$

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable Y et déduire sa loi.
Solution : En effet, $\forall n > 1$, la fonction de répartition X_n, est

$$F_{X_n}(t) = 1 - t^{-\alpha}$$

et pour Y_n, on peut écrire

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= P(Y_n \leq y) = P\left(n^{-1/\alpha} \max_{1\leq k\leq n} X_k \leq y\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_k \leq n^{1/\alpha} y\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{ny^{\alpha}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \exp\left(-y^{-\alpha}\right) = F_Y(y). \end{aligned}$$

Par conséquent, c.v en loi vers de fonction de répartition F_Y et de densité

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \alpha y^{-(\alpha+1)} \exp\left(-y^{-\alpha}\right), y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Dans bien des situations, il est difficile de montrer la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires en utilisant la définition, c'est pourquoi le résultat suivant peut être d'une grande utilité :
Théorème (Paul-Levy): Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, $\left(\varphi_{X_n}\right)_{n\geq 1}$ la suite des fonctions caractéristiques correspondantes. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$.

Exemple : Soient $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Supposons que pour tout $n \geq 1$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$, avec : $0 < p_n < 1$ et qu'il existe $\lambda > 0$, vérifiant $\lim_{n\to\infty} np_n(t) = \lambda$, alors il existe une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, telle que $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$.
Solution : On si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(it-1))$ et puis que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - np_n\frac{1-e^{it}}{n}\right)^n = \exp(\lambda(it-1)) = \varphi_X(t), \text{ avec } \lim_{n\to\infty} np_n(t) = \lambda.$$

Liens entre différents types de convergence

Converge en moyenne et converge en probabilité

Théorèmé : Soit $p > 0$, la converge d'order p entaîne la converge en probabilité.
Preuve : Elle est de l'inégalité de Markov, puis que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$P(|Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|Y|^p)}{\varepsilon^p}$$

si on pose $Y = X_n - X$, on trouve

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|^p)}{\varepsilon^p} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Exemple : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires où chaque variable $(X_n)_{n\geq 1}$ les valeurs 0 et n avec les probabilité respectives $1 - \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$, il n'est pas difficile de vérifier que cette suite converge en probabilité vers 0.
D'autre part

$$E(|X_n - X|^p) = E(|X_n|^p) = 1.$$

Donc: la convegence en probabilité n'implique pas la convergence en moyenne.

Converge en probabilité et converge en loi

Théorèmé : la converge en probabilité entaîne la converge en loi.
Exemple : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $Y = -X$ et pour $n \geq 1$, $X_n = X$. Une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$ est symétrique, alors X et Y ont la même loi, d'autre part $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$, donc, vers Y aussi. Mais si on prend $Z = X - Y$, alors $E(Z) = 0$ et $V(z) = 4$, alors si $\varepsilon = 2$

$$P(|X_n - Y| \geq 2) = P(|Z| \geq 2) = 1 - P(|Z| < 2) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8} dx > 0.$$

Donc: la convegence en loi n'implique pas la convergence en probabilité.

Convegence presque sûre et la convergence en probabilité

Théorèmé : la converge presque sûre entaîne la converge en probabilité.
Exemple : On a vu, si on considérons la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$, alors la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité. Cependant si $0<\varepsilon\leq 1$, alors

$$\sum_{n\geq 1} P\left(|X_n-0|\geq \varepsilon\right)=\sum_{n\geq 1} P\left(X_n=1\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=\infty.$$

Donc: la convegence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre.

Convegence presque sûre n'implique pas la convergence

en moyenne

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et n^2 avec les probabilités respectives $1-\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$, alors pour tout $\varepsilon>0$

$$\sum_{n\geq 1} P\left(|X_n-0|\geq \varepsilon\right)=\sum_{n\geq 1} P\left(X_n=n^2\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

D'autre coté

$$E\left(|X_n-0|\right)=E\left(|X_n|\right)=1\underset{n\to\to\infty}{\nrightarrow}0$$

Convegence en moyenne n'implique pas la convergence presque sûre

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et n^2 avec les probabilités respectives $1-\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$, alors pour tout $\varepsilon>0$

$$\sum_{n\geq 1} P\left(|X_n-0|\geq \varepsilon\right)=\sum_{n\geq 1} P\left(X_n=n^2\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

D'autre coté

$$E\left(|X_n-0|\right)=E\left(|X_n|\right)=1\underset{n\to\infty}{\nrightarrow}0$$

Convegence en moyenne n'implique pas la convergence presque sûre

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires indépendants, où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et $\sqrt{n}$ avec les probabilités respectives $1-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$, on a

$$E\left(|X_n-0|\right)=E\left(|X_n|\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\rightarrow}0$$

mais, pour tout $0<\varepsilon\leq\sqrt{n}$

$$\sum_{n\geq 1} P\left(|X_n-0|\geq \varepsilon\right)=\sum_{n\geq 1} P\left(X_n=n^2\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=\infty.$$

Convegence en moyenne d'order p implique pas la convergence en moyenne

Théorèmé : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une la suite de variables aléatoires converge en moyenne d'order p vers la variable X, alors

$$E(|X_n - X|) \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Preuve : Par l'inégalité de Cauche Schwarz, on a

$$E(|X_n - X|) \leq E(|X_n - X|^p)^{1/p} E(1^q)^{1/q} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

ce qui preuve l'impliquation.