Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématiques
Module: Intro. Proc. Stocha. 2019/2020

Serie N^{0}04

Exercice 01.

1. Calculer pour tout couple (s,t) les quantités $E(B_sB_t^2)$, $E(B_t|F_s)$.
2. Quelle est la loi de B_t+B_s?
3. Soit θ_s une variable aléatoire bornée F_s-mesurable. Calculer pour $t\geq s$, $E\left[\theta_s(B_t-B_s)\right]$ et $E[\theta_s(B_t-B_s)^2]$.
4. Calculer $E\left[1_{\{B_t\leq a\}}\right]$ et $E\left[B_t 1_{\{B_t\leq a\}}\right]$.
5. Montrer que $E(f(B_t))=E(f(G\sqrt{u}+B_{t-u}))$ avec G v.a. indépendante de B_{t-u} et de loi gaussienne centré réduite.

Exercice 02.

Montrer que les processus suivants sont des martingales.

1. $M_t=B_t^3-3\int_0^t B_s ds.$
2. $Z_t=B_t^3-3tB_t.$
3. $X_t=tB_t-\int_0^t B_s ds.$
4. $Y_t=t^2B_t-2\int_0^t B_s ds.$

Exercice 03.

1. Soit B_1 et B_2 deux MB indépendants. Montrer que le produit B_1B_2 est une martingale.
2. Montrer que le processus $Y_t=\int_0^t B_u du$ est gaussien. Calculer son espérance et sa covariance.
3. Montrer que $Z_t=B_t-\displaystyle\int_0^t \frac{B_s}{s}ds$ est un processus gaussien. Calculer sa variance et sa covariance. En déduire que Z est un mouvement Brownien.

Exercice 04.

Soit n fixé et $t_j=\frac{j}{2^n}t$ pour j variant de 0 a 2^n. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{2^n}[B(t_j)-B(t_{j-1})]^2\to t,$$

quand $n\to\infty$, la convergence ayant lieu en moyenne quadratique et p.s.

Exercice 05.

On définit un pont Brownien par $Z_t=B_t-tB_1, 0\leq t\leq 1$.

1. Montrer que Z est un processus gaussien indépendant de B_1. Préciser sa loi, c'est-a-dire sa moyenne et sa fonction de covariance.
2. Montrer que le processus $\tilde{Z}$ avec $\tilde{Z}=Z_1-t$ a même loi que Z.
3. Montrer que le processus Y avec $Y_t=(1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$, $0<t<1$ a même loi que Z.

Exercice 06.

Soit (Ω,F,F_t,P) et B un (F_t)-brownien sur cet espace. Pour tout λ réel, Montrer que le processus

$$exp(\lambda B_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t),\ t\geq 0$$

est une martingale.

Si $X_t=\mu t+\sigma B_t$, Montrer que, pour tout β réel

$$exp(\beta X_t-(\mu\beta+\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)t),\ t\geq 0.$$

est une (F_t)-martingale. Réciproquement, si X est un processus continu tel que $exp(\beta X_t-(\mu\beta+\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2)t)$, $t\geq 0$ est une F_t-martingale, montrer qu'il existe un F_t-brownien B tel que $X_t=\mu t+\sigma B_t$.