Université de Biskra
Département d'informatique

Niveau : M1(IA)

Matière : MPES
Chragé de matière : L. Kahloul
TD0 : Rappel sur les probabilités

Exercice 1. *Probabilité. .*
On dispose d'un groupe de 100 personnes. Une expérience aléatoire consiste à interroger 5 personnes choisies au hasard. On propose de représenter le résultat de cette expérience par un groupe de variables $x_1 ... x_{100}$, avec x_k=1 veut dire que l'individu k était interrogé et x_k=0 sinon.

- Donner une définition intensive des éléments de l'ensemble Ω représentant l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience ; solution : $\Omega = \{(x_1, ..., x_{100}) \in \{0,1\}^{100}, \Sigma_{i=1}^{i=100} x_i = 5\}$. Tout groupe d'individu tel que leur somme=5, donc 5 individu ont été interrogés
- C'est quoi la probabilité d'un individu $\omega \in \Omega$?.
  solution : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{C_5^{100}}$. En effet la taille de Ω est C_5^{100} et la probabilité est uniforme sur Ω

Exercice 2. *Probabilité Conditionnelle (1). .*
Dans le S2, un module M sera assuré par 2 enseignants (1 pour le cours et 1 pour le TD). Ces deux enseignants ne peuvent être que des informaticiens ou des matheux.

- Quelle est la probabilité que l'un des enseignants soit un informaticien ?
- Quelle est la probabilité que l'un des enseignants soit un matheux ?
- Quelle est la probabilité qu'on a deux enseignants informaticiens ?
- En discutant avec le chef de département, tu apprends que l'un des deux enseignants est certainement un informaticien : (i) Recalculer les deux probabilités précédentes. (ii) Calculer la probabilité de l'événement que l'un des enseignants est informaticien et l'autre est un matheux.

.

Exercice 3. *Probabilité Conditionnelle (2). .*
En utilisant la formule de la loi de probabilité conditionnelle, prouvez les deux formules suivantes :

- Loi de probabilité totale : si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) > 0$ alors $P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_m|A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1})$. Penser à utiliser une preuve par récurrence, commencer par voir si ceci est vérifiée pour m=2, m=3...
- Soit $B_1, \ldots, B_m$ une partition (leur union=Ω et qui sont disjoint 1 à 1) de l'ensemble de résultats Ω et A un événement. Alors, $P(A) = \Sigma_{i=1}^{m} P(A \mid B_i)P(B_i)$. Solution :il est clair que $A = \bigcup_1^m (A \cap B_i)$ d'où : $P(A) = \Sigma_1^m P(A \cap B_i)$

.

Exercice 4. *Variables aléatoires discrètes. .*

- Dans une expérience, on lance 2 pièces.
  1. Déduire l'espace Ω des résultats de cette expérience.
  2. Soit X le nombre de piles obtenus lors du lancer de deux pièces. Déduire l'ensemble des valeurs possibles de X.
  3. C'est quoi la loi de probabilité de X.
- On étudie le lancer de deux dés à six faces équilibrés
  1. Quel est l'espace d'états associé à cette expérience ? Donner son cardinal.
  2. On munit de la probabilité uniforme P. On définit la variable aléatoire X comme la somme des résultats de deux dés. Déterminer la loi de X.
  3. Calculer $E(X)$;
- Prouver que $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$.

Exercice 5. *fonction de répartition. .*

- Prouver que si $a <= b$ alors $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exercice 6. *loi de probabilité pour variables aléatoires discrètes. .*

- Si $X \sim G(p)$ prouver que $Y = X - 1$ suit aussi une loi géométrique à déduire.
- Un réseau Ethernet contient k stations toujours prêtes à transmettre. Une station réussie une transmission si aucune autre station ne transmet en même temps qu'elle. Si chaque station tente de transmettre avec une probabilité p, c'est quoi la probabilité qu'une station réussisse ? Solution : $kp(1-p)^{k-1}$
- En utilisant la formule $e^x = \sum_0^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, Prouver que $E(X) = a$ pour un $X \sim \mathcal{P}(a)$.