Matière: MPES
Chragé de matière: L. Kahloul
TD4: encore des Chaînes de Markov

Exercice 1. .
On reprend l'exercice de la série 3 (machines en panne). On considère qu'il y a 4 machines et 2 techniciens qui travaillent dans les mêmes conditions de l'exercice précédent. On s'intéresse à étudier la chaîne X_n: nombre de machine en panne à la matinée n.

- Identifier l'espace d'états de X_n;
- Identifier la matrice stochastique de X_n

Exercice 2. .

On entraîne un animal pour prendre un objet A parmi deux objets A et B. Pour cela, on lui fait subir des essais consécutifs dans lesquels il reçoit une récompense si il choisit le bon objet. Cet animal peut être dans un des trois états suivants : (1) Il ne sait pas quel objet est récompensé et choisit A ou B avec équiprobabilité. (2) Il se rappelle que A est récompensé et choisit A, mais peut oublier par la suite. (3) Il choisit toujours A.

On propose la matrice suivante qui décrit la probabilité de transition d'un état vers un autre d'un essai vers un autre.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On suppose que l'animal est dans l'état 1 avant qu'on commence les essais.

- Calculer les probabilités: $P(X_1 = 1), P(X_1 = 2), P(X_1 = 3)$;
- Calculer $P(X_2 = 3)$;
- Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
- Exprimer $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
- Montrer par récurrence que la suite le vecteur ligne $\pi_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ vérifie la propriété: $pi_n = \pi_0 * Q^n$. La matrice Q est définie par:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/12 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Distribution de probabilité invariante.* .

- soit la matrice stochastique suivante:
  Prouver que le vecteur $(1/3, 2/3)$ est un vecteur invariant pour la chaîne concernée.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

- soit la matrice stochastique suivante:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

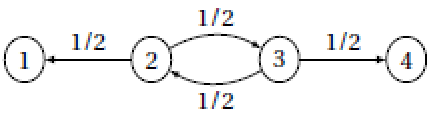
Quelle condition doit satisfaire α? Déterminer les distributions invariantes en fonction de ce α.

Exercice 4. *Classes de communication d'une chaîne de Markov. .*
Soit la chaîne de Markov, représentée par la matrice suivant:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Identifier les différentes classes de communication de cette chaîne.

Soit la chaîne de Markov suivante:



- Identifier les différentes classes de communication.
- Y a-t-il des états absorbants?