Chapitre 1

Résolution d'un système d'équations linéaires

Un problème mathématique qu'on rencontre assez souvent est la résolution d'équations linéaires c'est-à-dire :

$$A.X = Y \tag{1.1}$$

$$\text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & . \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

Le but est de calculer la valeur des composantes de X, une fois les éléments de la matrice A et le vecteur Y sont donnés.

Ce problème à une solution unique ;

$$X = A^{-1}Y \tag{1.2}$$

si, et seulement si, $d\acute{e}t(A) \neq 0$.

L'ennui est que l'obtention de X demande d'effectuer un nombre d'opérations de l'ordre de $(n^2 n!)$ pour n grand (dans la pratique la résolution approchée d'un problème aux dérivées partielles peut conduire à la résolution d'un système linéaire oŭ $n = 10^4$). Pour des raisons évidentes d'encombrement, et de destruction de toute précision par la propagation des erreurs d'arondis, il est imposible de tenter un tel calcul.

De cette dernière remarque, découle la nécesseté de construire des algorithmes numériques qui "coutent" moins en nombre d'opérations.

1.1 Méthode directe

1.1.1 Méthode d'élimination de Gauss

Question Pour

L'idée de la méthode de Gauss est de réduire la matrice A en une matrice triangulaire et de calculer par la suite, les composantes x_i de X. La raison pour laquelle cette méthode est efficace, est que, si A est triangulaire, on peut calculer les x_i facilement.

1.1.2 Système triangulaire

Question Pour

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & .. & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & .. & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & a_{ii} & .. & .. & a_{in} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 & a_{nn} \end{bmatrix},$$

on trouve immédiatement $x_n = \frac{y_n}{a_{nn}}$, calculer x_i et puis écrire l'algorithme qui nous permet de calculer X .

Système quelconque

Pour une matrice quelconque, supposons que tous les a_{ii} **(les pivots)** sont différents de 0, le problème à résoudre alors, consiste à transformer A en matrice triangulaire. On procède de la manière suivante :

étape1 On remplace l'équation 2 par une combinaison linéaire d'elle et de la première équation, de telle sorte que l'élément a_{21}soit égal à 0, et on refait ceci pour les lingnes $3, ..., n$. .On continue, de cette façon, à annuller les éléments de la première colonne à l'exception de a_{11},biensûr(evidement, les y_i changent !).

étape2 Refaire l'étape 1 avec la matrice A dépourvu de la ligne 1 et la colonne 1 ; c-à-dire la matrice d'ordre $(n-1)$, puis avec la matrice d'ordre $(n-2)$ etc... j'usqu'a ce que la matrice A se tranforme en une matrice triangulaire.

étape3 Résoudre le système triangulaire

Question1 Ecrire l'algorithme de l'élimination de Gauss.

Question2 Si les a_{ii} ne sont pas forcément différent de 0, reécrire l'algorithme de l'élimination de Gauss dans ce cas.

1.1.3 La décomposition L.U

Cette méthode se base sur l'idée suivante : on cherche a exprimer la matrice A comme le produit de deux matrices, dont une triangulaire inférieure (Lower) et l'autre triangulaire supérieure (Upper) .

$AX = (LU)X = L(UX) = Y$

et, si on pose $f = UX$ on peut calculer les composantes de f immédiatement, par substitution, ainsi que les composantes de X par la suite.

Alors comment trouver les matrices L et U?.Prenons l'exemple d'une matrice 4×4.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{22} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{22} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

1. Vérifier que l'équation (1.3) est un système de n^2équations (autant d'éléments de la matrice A) et $n^2 + n$ inconnus (les variables l_{ij} et u_{ij}). Ce qui veut dire qu'on peut imposer n conditions.
2. Un choix, qui simplifie les choses, est $l_{ii} = 1, i = \overline{1, n}$. Calculer les autres éléments (algorithme de Crout), on faisant la multiplication des deux vecteurs :$(l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, ..., l_{ii-1}, 1)$ $(u_{1j}, u_{2j}, ..., u_{j-1j}, u_{jj})^T$ dans les deux situations $i \leq j$ et $i \succ j$.
3. Ecrire l'algorithme correspondant (qui calcule le vecteur x)

NB pour $j = 1, n$,

si $i \leq j$ $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$

sinon $(i = j + 1, n)$ $l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj})$

1.2 Méthodes itératives

La résolution du système 1.1 par les méthodes diresctes qui viennent d'être examinées ne peut être envisagées lorsque le nombre des équations est grand (n au dela de 100). Il devient en effet imposible de calculer la solution à cause des erreurs d'arrondi propagées par le nombre d'opérations à effectuer.

1.2.1 Méthode itérative simple

Considérons le système linéaire 1.1 avec $A \in R^{n\times n}$ et $Y \in R^n$. se transforme facilement en

$$X = \alpha X + \beta \tag{1.4}$$

Cherchons la solution du système 1.4, prenons par exemple pour approximation initiale la colonne des termes $X^{(0)} = \beta$ puis construisons successivement les matrices colonnes $X^{(1)} = \alpha X^{(0)} + \beta$, $1^{ère}$ approximation, $X^{(2)} = \alpha X^{(1)} + \beta$, $2^{ème}$approximation, ainsi de suite la $(k+1)^{ème}$ approximation se calcule en général d'après la formule $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta; k = 0, 1, 2...$

Si la suite $\left(X^{(0)}, X^{(1)}, ..., X^{(k)}, ..\right)$ possède une limite $X = \lim_{k\to\infty} X^{(k)}$, cette limite est une solution du système 1.4

En effet, en passant à la limite dans $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$, on aura $X = \alpha X + \beta$,c-a-d le vecteur X est une solution du système 1.4 et par conséquent de 1.1

Convergence de la méthode itérative simple

Nous considerons le l'algorithme sous la forme $X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta$,s'il y a convergence alors $X = \alpha X + \beta$,

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta = \alpha X^{(k)} - (X - \alpha X)$$
$$X^{(k+1)} - X = \alpha(X^{(k)} - X) = \alpha^2(X^{(k-1)} - X) = ... = \alpha^{k+1}(X^{(0)} - X)$$

La convergence est donc assurée, quel que soit le vecteur initial si $\lim_{k\to\infty} \alpha^{k+1} = 0$.

Remarque 1.2.1 *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\lim_{k\to\infty} \alpha^{k+1} = 0$ *est que* $\max_k |\lambda_k| < 1, \lambda_k$ *étant une valeur propre de* α.

Exercices

Exercice 1

1. Résoudre de quatre manières différentes le système suivant (par substitution, par la méthode du pivot de Gauss, en inversant la matrice des coefficients, par la formule de Cramer) : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 7y = -2 \end{cases}$
2. Choisir la méthode qui vous paraît la plus rapide pour résoudre, selon les valeurs de a, les systèmes suivants : $\begin{cases} ax + y = 2 \\ (a^2+1)x + 2ay = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$

Exercice 2

Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré ≤ 3 on ait : $\int_2^4 P(x)dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

Exercice 4

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

Le système $AX = Y$ est appelé système tridiagonal lorsque sa matrice a la forme :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & . & . & 0 \\ a_2 & b_2 & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & c_{n-1} \\ 0. & . & 0. & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

Ecrire un algorithme de résolution d'un système tridiagonal $AX = Y$, en factorisant la matrice du système en un produit de deux matrices triangulaires L et U.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0. & . & . & 0 \\ \alpha_2 & 1 & . & . & . \\ 0. & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0. & . & 0 & \alpha_n & 1 \end{bmatrix} . \ U = \begin{bmatrix} \beta_1 & c_1 & . & . & 0 \\ 0 & \beta_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & c_{n-1} \\ 0. & . & . & 0 & \beta_n \end{bmatrix}$$

Exercice 6

Résoudre $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,par la décompostion LU.

Exercice 7

Résoudre le système suivant par la méthode itérative $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$ (on prendera 3 itérations)