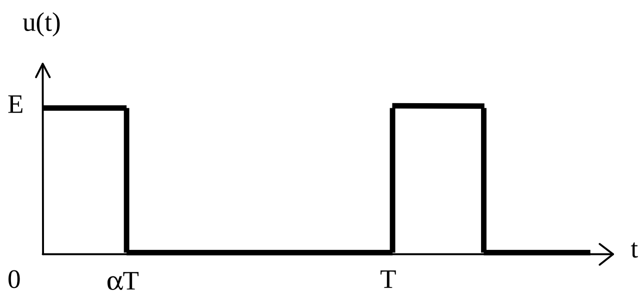
EXERCICES D'ELECTRICITE
REGIME VARIABLE
ENONCES

Exercice 1 : Tension rectangulaire



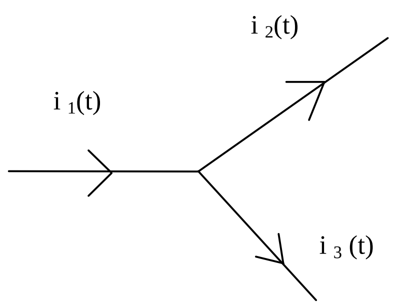
u(t) est une tension de période T et de rapport cyclique α.
Calculer la valeur moyenne <u> et la valeur efficace U de la tension u.

A.N. E = 5V ; α = 0,5.

Avec les valeurs numériques ci-dessus, calculer la valeur efficace U' de la composante alternative.

Vérifier que $U^2 = \langle u\rangle^2 + U'^2$.

Exercice 2 : Régime sinusoïdal

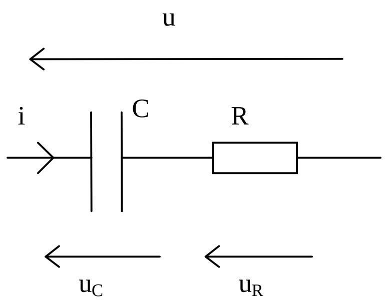


$$i_1(t) = 4\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$i_2(t) = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{5\pi}{6})$$

Déterminer $i_3(t)$ par la méthode des vecteurs de Fresnel et par la méthode des nombres complexes.
Calculer $\varphi_{i1/i2}$, $\varphi_{i2/i3}$ et $\varphi_{i1/i3}$.

Exercice 3 : Régime sinusoïdal



1) Représentation de Fresnel :

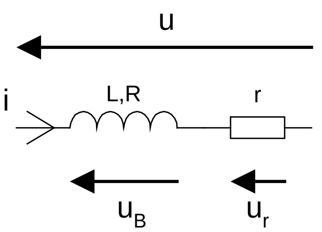
Construire $\vec{U}_R$, $\vec{U}_C$ et $\vec{U}$.
En déduire l'expression de Z_{eq} ainsi que l'expression du déphasage φ de u par rapport à i.
Quelle plage de valeurs peut prendre le déphasage?

2) Utilisation des nombres complexes :
Déterminer $\underline{Z}_{eq}$.
En déduire Z_{eq} et φ.

3) Applications numériques
On donne U = 5 V, f = 10 kHz, R = 1 kΩ et C = 10 nF.
Calculer I, φ, U_R et U_C.
Comparer U et $U_R + U_C$. Commentaires ?
Pour quelle fréquence a-t-on $U_C = U_R$?

<u>Exercice 4</u> : Régime sinusoïdal

Une bobine réelle est équivalente à une résistance R en série avec une inductance L.
On la branche en série avec une résistance r = 8 Ω.

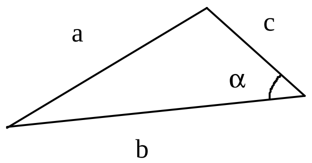


On donne f = 50 Hz, U = 14 V, U_B = 8 V et U_r = 8V.
1) Calculer I.
2) Construction de Fresnel :

a) Construire $\vec{U}_r$, $\vec{U}_B$ et $\vec{U}$.
Calculer $\varphi_{u/i}$ et $\varphi_{uB/i}$.

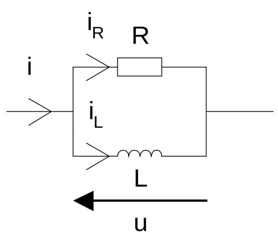
b) A partir de $\vec{U}_B$ construire $\vec{U}_R$ et $\vec{U}_L$.
En déduire R et L.

<u>Rappel</u> : dans un triangle quelconque :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

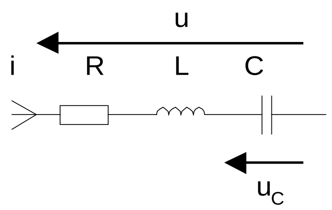
<u>Exercice 5</u> : Régime sinusoïdal



Déterminer $\underline{Y}_{eq}$.
En déduire Y_{eq} et $\varphi_{u/i}$.

Applications numériques
On donne U = 2 V, f = 15 kHz, R = 4,7 kΩ et L = 65 mH.
Calculer I_R, I_L, I, $\varphi_{u/i}$, $\varphi\ i_L/i$ et $\varphi\ i/i_R$.
Pour quelle fréquence a-t-on $\varphi_{u/i}$ = 45° ?

Exercice 6 : Régime sinusoïdal



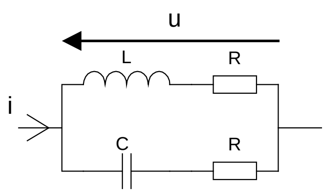
Déterminer $\underline{Z}_{eq}$.
En déduire Z_{eq} et $\varphi_{u/i}$.

Quand u et i sont en phase on dit qu'il y a *résonance*.
Que vaut alors $\underline{Z}_{eq}$?
A quelle pulsation ω_0 a lieu la résonance ?
$Q = \frac{U_C}{U}$ est appelé coefficient de surtension.

Montrer qu'à la résonance $Q_0 = \frac{1}{RC\omega_0}$

A.N.
R = 440 Ω, C = 1 nF/63 V, L = 100 mH et U = 5 V.
Calculer ω_0, Q_0 et U_{C0}. Commentaire ?

Exercice 7 : Régime sinusoïdal



Déterminer $\underline{Z}_{eq}$.
Si $LC\omega^2 = 1$ que vaut le déphasage entre u et i ?

CORRIGES

Exercice 1

$$< u > = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\alpha T} E\,dt + \int_{\alpha T}^{T} 0\,dt\right) = \frac{1}{T}[E\,t]_{t=0}^{\alpha T} = \alpha E = 2{,}5\text{ V}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} E^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}[E^2\,t]_{t=0}^{\alpha T}} = \sqrt{\alpha}E = 3{,}536\text{ V}$$

u(t) = <u> + u'(t) : u'(t) désigne la composante alternative.

0 < t < 0,5T : u'(t) = u(t) - <u> = 5 - 2,5 = +2,5 V
0,5T < t < T : u'(t) = u(t) - <u> = 0 - 2,5 = -2,5 V

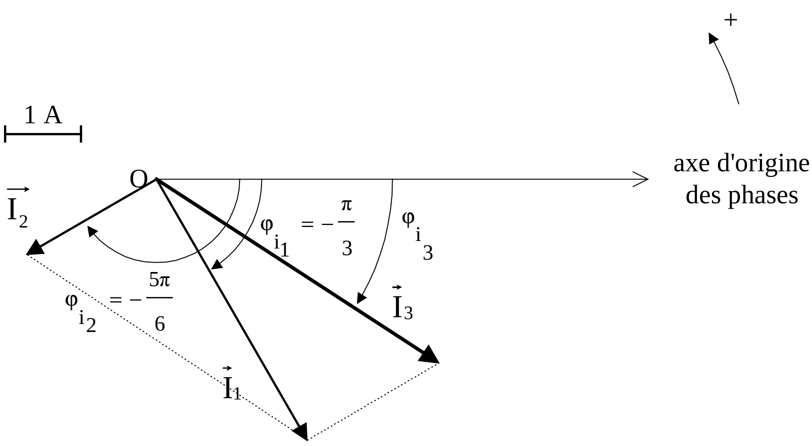
$$U' = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u'^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{0{,}5T} 2{,}5^2\,dt + \int_{0{,}5T}^{T} (-2{,}5)^2\,dt\right)} = 2{,}5\text{ V}$$

On vérifie bien que : $U^2 = <u>^2 + U'^2$.

Exercice 2

- vecteurs de Fresnel

Loi des nœuds : $\vec{I_3} = \vec{I_1} - \vec{I_2}$



Graphiquement :

$I_3 \approx 4{,}5$A
$\varphi_{i3} \approx -33° \approx -0{,}58$ rad
d'où $i_3(t) \approx 4{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t - 0{,}58)$

- nombres complexes

$$\underline{I_3} = \underline{I_1} - \underline{I_2} = (4, -\frac{\pi}{3}) - (2, -\frac{5\pi}{6}) = (2 - 2\sqrt{3}j) - (-\sqrt{3} - j)$$

$$= 2 + \sqrt{3} + (1 - 2\sqrt{3})\ j = (4{,}472\ ;\ -0{,}584\ \text{rad})$$

Finalement: $i_3(t) = 4{,}472\sqrt{2}\sin(\omega t - 0{,}584)$

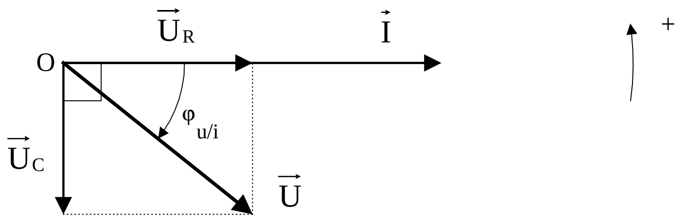
$\varphi_{\ i1/i2} = -\pi/3-(-5\pi/6) = +\pi/2 = +90°$: i_1 est en quadrature avance sur i_2

$\varphi_{\ i2/i3} = -5\pi/6-(-0{,}584) = -2{,}034\ \text{rad} = -116°$

$\varphi_{\ i1/i3} = \varphi_{\ i1/i2} + \varphi_{\ i2/i3} = -0{,}463\ \text{rad} = -26°$

Exercice 3

1) $\vec{U} = \vec{U_C} + \vec{U_R}$



Par définition : $Z_{eq} = \frac{U}{I}$

Théorème de Pythagore : $U^2 = U_R^2 + U_C^2$

Avec : $U_R = RI$ et $U_C = \frac{I}{C\omega}$

D'où : $Z_{eq}{}^2 = \frac{U^2}{I^2} = R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2$

Finalement : $Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$$\tan\varphi = -\frac{U_C}{U_R} = -\frac{1}{RC\omega}$$

soit : $\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$

Le déphasage φ est compris entre –90° et 0°.

2) $\underline{Z}_{eq} = R - \frac{j}{C\omega}$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$\tan\varphi = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R}$ d'où : $\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$

3) Loi d'Ohm : $I = \frac{U}{Z_{eq}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = 2{,}66\ \text{mA}$

$\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) = -\ 58° = -1{,}01\ \text{rad}$

$U_R = RI = 2{,}66\ V$

$$U_C = \frac{I}{C\omega} = 4{,}23\,\text{V}$$

On remarque que : $U \neq U_R + U_C$

Les valeurs efficaces ne s'additionnent pas (sauf cas particulier).

$U_R = U_C \Rightarrow RI = \dfrac{I}{C\omega}$ soit : $RC\omega = 1$

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = 15{,}9\,\text{kHz}$$

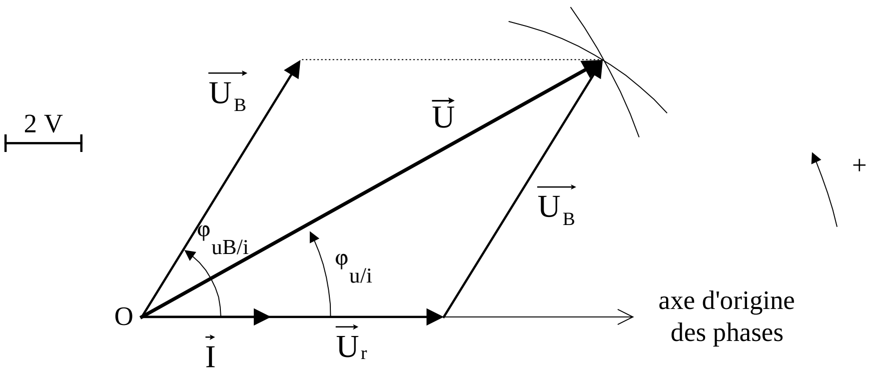
Exercice 4

1) Loi d'Ohm : $U_r = r\,I$

A.N. I = 1 A

2) Construction de Fresnel :

a) $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U_r} + \overrightarrow{U_B}$



Dans le triangle délimité par les trois vecteurs :

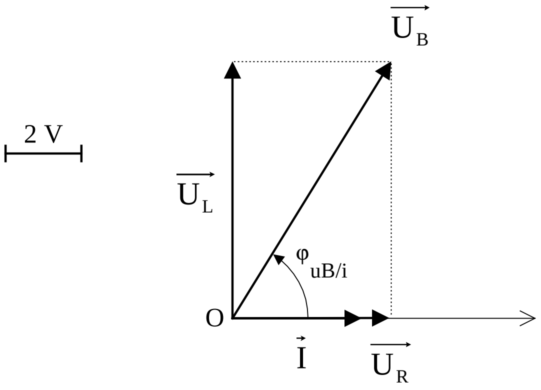
$U_B^2 = U^2 + U_r^2 - 2UU_r \cos\varphi_{u/i}$

$$\cos\varphi_{u/i} = \frac{U^2 + U_r^2 - U_B^2}{2UU_r} = 0{,}875$$

$\varphi_{u/i} \approx +29°$

Pour des raisons de symétrie : $\varphi_{uB/i} = 2\varphi_{u/i} \approx +58°$

b) $\overrightarrow{U_B} = \overrightarrow{U_R} + \overrightarrow{U_L}$



$U_R = U_B \cos \varphi_{uB/i} = 4{,}25$ V

$$R = \frac{U_R}{I} = 4{,}25\,\Omega$$

$U_L = U_B \sin \varphi_{uB/i} = 6{,}78$ V

$$L = \frac{U_L}{\omega I} = 21{,}6\text{ mH}$$

Exercice 5

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}$$

$$Y_{eq} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

$$\varphi_{u/i} = -\arg \underline{Y} = -\arctan\left(\frac{-\frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}}\right) = \arctan\left(\frac{R}{L\omega}\right)$$

Applications numériques

$I_R = U/R = 0{,}43$ mA

$$I_L = \frac{U}{L\omega} = 0{,}33\text{ mA}$$

$I = Y_{eq}U = 0{,}54$ mA

$\varphi_{u/i} = +37°$

$\varphi_{iL/i} = \varphi_{iL/u} + \varphi_{u/i} = -90 + 37 = -53°$

$\varphi_{i/iR} = \varphi_{i/u} = -37°$

$$\tan \varphi_{u/i} = \frac{R}{L\omega}$$

Si $\varphi_{u/i} = 45°$ alors $\frac{R}{L\omega} = 1$

soit : $f = \frac{R}{2\pi L} = 11{,}5$ kHz

Exercice 6

$$\underline{Z}_{eq} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$Z_{eq} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\varphi_{u/i} = \arg \underline{Z} = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

$\varphi_{u/i} = 0 \Rightarrow L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = 0$ et : $\underline{Z}_{eq} = R$

A la résonance, le circuit a un comportement purement résistif.

$L\omega_0 - \dfrac{1}{C\omega_0} = 0$ d'où : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$U = Z_{eq}I$ et : $U_C = \dfrac{I}{C\omega}$ donc : $Q = \dfrac{1}{Z_{eq}C\omega}$

A la résonance : $Q_0 = \dfrac{1}{RC\omega_0}$

A.N. $\omega_0 = 10^5$ rad/s ; $Q_0 = 22{,}7$; $U_{C0} = Q_0U = 114$ V

On dépasse la tension maximale admissible par le condensateur (63 V) : il y a destruction du condensateur (« claquage » du diélectrique).

Exercice 7

$$\underline{Z}_{eq} = (R + jL\omega)//(R - \tfrac{j}{C\omega}) = \frac{(R + jL\omega)(R - \frac{j}{C\omega})}{2R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{R^2 + jR(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + \frac{L}{C}}{2R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

$LC\omega^2 = 1 \Leftrightarrow L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = 0$ et : $\underline{Z}_{eq} = \dfrac{R^2 + \frac{L}{C}}{2R}$

$\underline{Z}_{eq}$ est un réel positif (pas de partie imaginaire) : $\arg \underline{Z}_{eq} = 0$

$\varphi_{u/i} = 0°$: u et i sont en phase.