Mathématiques appliquées : Utilisation pratique des nombres complexes en Electricité et Electronique

Version 1.0.8

Sommaire

1- Forme algébrique (ou forme cartésienne)

Voici un nombre complexe que nous appellerons $\underline{Z}$ (avec une barre en dessous pour bien montrer qu'il s'agit d'un nombre complexe).
La forme algébrique est une façon de représenter un nombre complexe :

$$\underline{Z} = 2 + 3j$$

$$(\text{ou } 2 + 3 \times j)$$

$\underline{Z}$ se lit « Z complexe » ou « nombre complexe Z »
2 + 3j se lit « deux plus trois j »

Remarque :
En mathématiques, on utilise i à la place de j :

$\underline{Z} = 2 + 3i$ « deux plus trois i »

2- Partie réelle et partie imaginaire

Un nombre complexe possède une partie réelle et une partie imaginaire :

$$\underline{Z} = \underbrace{2}_{\text{partie réelle}} + \underbrace{3}_{\text{partie imaginaire}} \times \mathrm{j}$$

j est le nombre imaginaire unité.

Remarques :

- Un nombre réel est un nombre complexe qui n'a pas de partie imaginaire :

  $-12{,}5 + 0\mathrm{j}$

  ou plus simplement :

  $-12{,}5$

- Un nombre imaginaire est un nombre complexe qui n'a pas de partie réelle :

  $0 + 3\mathrm{j}$

  ou plus simplement :

  $3\mathrm{j}$

Question n°1 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe :
5,2 j – 2,5 ?
Question n°2 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre réel π ?
Question n°3 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre imaginaire j ?

(Solution à la fin)

3- Addition ou soustraction des nombres complexes

Les parties réelles s'additionnent (ou se soustraient).
Les parties imaginaires s'additionnent (ou se soustraient).

Soit : $\underline{Z}_1 = 5 + 7\mathrm{j}$

et : $\underline{Z}_2 = -2 + \mathrm{j}$

Addition :

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 5 + 7\mathrm{j} - 2 + \mathrm{j} = (5-2) + (7+1)\mathrm{j} = 3 + 8\mathrm{j}$$

Soustraction :

$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = 5 + 7\mathrm{j} - (-2 + \mathrm{j}) = 5 + 7\mathrm{j} + 2 - \mathrm{j} = (5+2) + (7-1)\mathrm{j} = 7 + 6\mathrm{j}$$

Question n°4 : Additionner les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.
Question n°5 : Soustraire les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

4- Multiplication d'un nombre réel et d'un nombre complexe

Soit : $\underline{Z} = 3 + 5\text{j}$
Multiplions le nombre complexe $\underline{Z}$ par le nombre réel 8 :

$$8 \times \underline{Z} = 8 \times (3 + 5\text{j})$$
On développe :
$$8 \times (3 + 5\text{j}) = 8 \times 3 + 8 \times 5\text{j}$$
$$= 24 + 40\text{j}$$

5- Multiplication de deux nombres complexes

Les choses se compliquent !

j, le nombre imaginaire unité, a la propriété étonnante suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{j} \times \text{j} = -1 \\ \text{ou} \\ \text{j}^2 = -1 \\ \text{ou} \\ \dfrac{1}{\text{j}} = -\text{j} \end{array}}$$

« j fois j est égal à -1 »
« j au carré est égal à -1 »

Soit : $\underline{Z}_1 = 6 + 3\text{j}$
et : $\underline{Z}_2 = 5 + 2\text{j}$
Multiplication :
$$\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 = (6 + 3\text{j}) \times (5 + 2\text{j})$$
On développe :
$$(6 + 3\text{j}) \times (5 + 2\text{j}) = 6 \times 5 + 6 \times 2\text{j} + 3\text{j} \times 5 + 3\text{j} \times 2\text{j}$$
$$= 30 + 12\text{j} + 15\text{j} + 6\text{j}^2 \qquad \text{avec : } \text{j}^2 = -1$$
$$= 30 + 12\text{j} + 15\text{j} - 6$$
$$= (30 - 6) + (12 + 15)\text{j}$$
$$= 24 + 27\text{j}$$

Question n°6 : Multiplier les nombres complexes 1 – j et 4 + 2j.
Question n°7 : Multiplier les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.
Question n°8 : Multiplier les nombres complexes j et 3 + 4j.

6- Forme trigonométrique (ou forme polaire) d'un nombre complexe

La forme trigonométrique est une autre façon de représenter un nombre complexe :

Exemple :

$$\underline{Z} = \left(2\,;+\frac{\pi}{3}\,\text{rad}\right)$$

$$\text{ou} : \underline{Z} = (2\,;+60°)$$

7– Module et argument

Un nombre complexe possède un module et un argument :

$$\underline{Z} = \left(\underbrace{2}_{\text{module}}\ ;\ \underbrace{+\frac{\pi}{3}\,\text{rad}}_{\text{argument}}\right)$$

Le module du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $|\underline{Z}|$ ou Z

Ici : $|\underline{Z}| = 2$

Le module est un nombre réel positif ou nul.

L'argument d'un nombre complexe est un angle que l'on peut exprimer en degrés (°) ou en radians (180° = π radians).

L'argument du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $\arg(\underline{Z})$

Ici : $\arg(\underline{Z}) = +\frac{\pi}{3}\,\text{rad}$

8- Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

C'est très simple :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{partie réelle} = \text{module} \times \text{cosinus de l'argument} \\ \text{partie imaginaire} = \text{module} \times \text{sinus de l'argument}\end{array}}$$

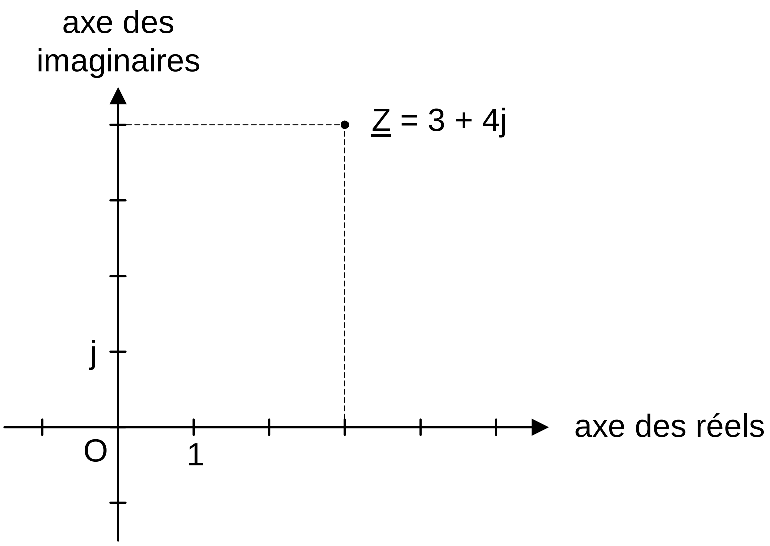
$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \left(2\,;+\frac{\pi}{3}\,\text{rad}\right) \\ &= 2\times\cos\left(+\frac{\pi}{3}\,\text{rad}\right) + 2\times\sin\left(+\frac{\pi}{3}\,\text{rad}\right)\text{j} \\ &= 2\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{j} \\ &= 1+\sqrt{3}\,\text{j}\end{aligned}$$

9- Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

9-1- Plan complexe

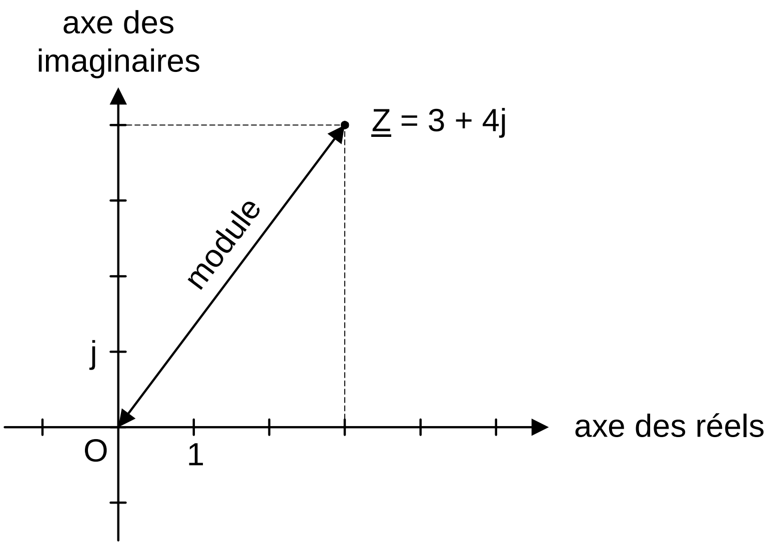
Le plan complexe désigne un plan dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe.

Exemple : $\underline{Z} = 3 + 4j$



En abscisse, nous avons la partie réelle.
En ordonnée, nous avons la partie imaginaire.

9-2- Module



$$\boxed{\text{module d'un nombre complexe} = \sqrt{(\text{partie réelle})^2 + (\text{partie imaginaire})^2}}$$

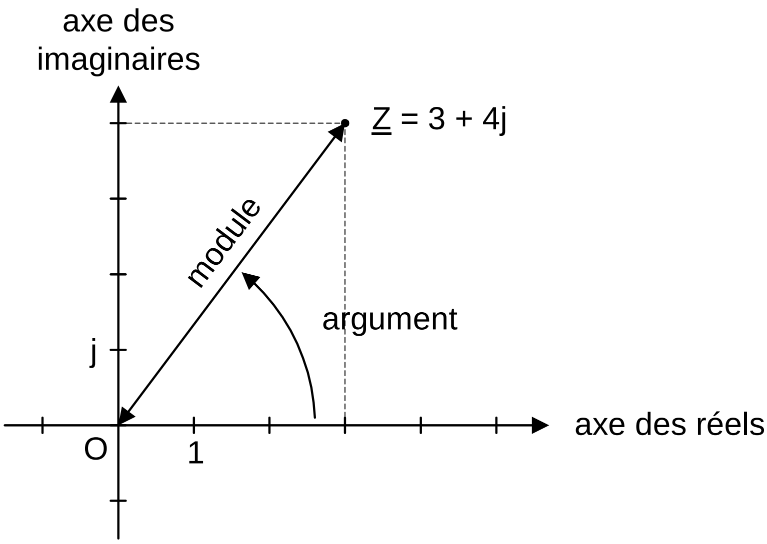
Le module est une grandeur réelle positive (comme la longueur).

Calculons le module du nombre : $\underline{Z} = 3 + 4\text{j}$

$$|\underline{Z}| = |3 + 4\text{j}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Question n°9 : Calculer le module du nombre complexe –1 – 2j.
Question n°10 : Calculer le module du nombre imaginaire 5j.
Question n°11 : Calculer le module du nombre imaginaire –7j.
Question n°12 : Calculer le module du nombre réel – 3,93.

9-3- Argument



L'argument d'un nombre complexe est un angle.

Reprenons le nombre complexe : $\underline{Z} = 3 + 4\text{j}$

L'argument du nombre complexe $\underline{Z}$ se note : $\arg(\underline{Z}) = \arg(3 + 4\text{j})$

Dans le cas particulier où la partie réelle est strictement positive :

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)}$$

Application numérique (avec une calculatrice) :

$$\arg(3 + 4\text{j}) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx +53{,}13°$$

$$\arg(3 - 4\text{j}) = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) \approx -53{,}13°$$

N.B. Suivant la marque de la calculatrice, la fonction réciproque de la tangente se note :
arctan ou **Shift + tan** ou **tan^{-1}** ou **Atn**

Dans le cas particulier où la partie réelle est positive et la partie imaginaire nulle (nombre réel positif), l'argument est nul.

arg(8) = 0°

Dans le cas particulier où la partie réelle est négative et la partie imaginaire nulle (nombre réel négatif), l'argument est 180° (ou π radians)

arg(- 8) = 180°

Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle et la partie imaginaire positive, l'argument est + 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ radian)

arg(+2j) = +90°

Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle et la partie imaginaire négative, l'argument est – 90° (ou $-\frac{\pi}{2}$ radians)

arg(-3j) = - 90°

Dans le cas particulier où la partie réelle est strictement négative :

En degrés :

$$\arg(\underline{Z}) = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)$$

En radians :

$$\arg(\underline{Z}) = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)$$

$$\arg(-3+4j) = 180° + \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) \approx 180° - 53{,}13° \approx +126{,}87°$$

$$\arg(-3-4j) = 180° + \arctan\left(\frac{-4}{-3}\right) \approx 180° + 53{,}13° \approx +233{,}13° \approx -126{,}87°$$

Question n°13 : Calculer l'argument du nombre complexe 2 + 2j.
Question n°14 : Calculer l'argument du nombre imaginaire 5j.
Question n°15 : Calculer l'argument du nombre imaginaire –7j.
Question n°16 : Calculer l'argument du nombre réel – 3,93.

10- Multiplication de deux nombres complexes avec la forme trigonométrique

Module d'un produit = produit des modules
Argument d'un produit = somme des arguments

$$\text{Soit}: \underline{Z}_1 = \left(3 ;+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{et}: \underline{Z}_2 = \left(2 ;-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 = \left(3 ;+\frac{\pi}{4}\right) \times \left(2 ;-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(3 \times 2 ;+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(6 ;+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(6 ;+\frac{\pi}{12}\text{rad}\right)$$

$$= (6 ;+15°)$$

$$\text{Soit}: \underline{Z} = \left(1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$\text{Calculons}: \underline{Z}^2$$

$$\underline{Z}^2 = \left(1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) \times \left(1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$= \left(1 \times 1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$= (1 ;+\pi\,\text{rad})$$

Remarque :

$$\underline{Z} = \left(1 ;+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$

$$= 1 \times \cos\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) + 1 \times \sin\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)\text{j}$$

$$= 0 + \text{j}$$

$$= \text{j}$$

$$\underline{Z}^2 = (1 ;+\pi\,\text{rad})$$

$$= 1 \times \cos(+\pi\,\text{rad}) + 1 \times \sin(+\pi\,\text{rad})\text{j}$$

$$= -1 + 0\,\text{j}$$

$$= -1$$

On retrouve : $\text{j}^2 = -1$

11- Division de deux nombres complexes

Module d’un quotient = quotient des modules du numérateur et du dénominateur
Argument d’un quotient = argument du numérateur – argument du dénominateur

Exemple :

$$\text{Soit : } \underline{Z}_1 = \left(3\,;+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{et : } \underline{Z}_2 = \left(2\,;-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\left(3\,;+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(2\,;-\frac{\pi}{6}\right)} = \left(\frac{3}{2}\,;+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3}{2}\,;+\frac{5\pi}{12}\,\text{rad}\right) = (1{,}5\ ;+75°)$$

Exemple :

$$\left|\frac{5+12\,j}{3-4\,j}\right| = \frac{|5+12\,j|}{|3-4\,j|} = \frac{\sqrt{(5)^2+(12)^2}}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

$$\arg\left(\frac{5+12\,j}{3-4\,j}\right) = \arg(5+12\,j) - \arg(3-4\,j) = \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$\approx 67{,}38° + 53{,}13° \approx +120{,}51°$$

Cas particulier : $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$

alors : $|\underline{Y}| = \left|\dfrac{1}{\underline{Z}}\right| = \dfrac{1}{|\underline{Z}|}$

$$\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$$

$$\text{Soit : } \underline{Z} = \left(1\,;+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)$$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\left(1\,;+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)} = \left(1\,;-\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)$$

Remarque :

$$\underline{Z} = \left(1 ; +\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$
$$= 1\times\cos\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) + 1\times\sin\left(+\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)\text{j}$$
$$= 0 + \text{j}$$
$$= \text{j}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \left(1 ; -\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)$$
$$= 1\times\cos\left(-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right) + 1\times\sin\left(-\frac{\pi}{2}\text{rad}\right)\text{j}$$
$$= -1 + 0\text{j}$$
$$= -1$$

On retrouve : $\frac{1}{\text{j}} = -\text{j}$

12- Nombre complexe conjugué

$\underline{Z}$* désigne le conjugué du nombre complexe $\underline{Z}$.

Par définition :

$$\underline{Z} = \text{x} + \text{yj}$$
$$\underline{Z}^* = \text{x} - \text{yj}$$

x désigne la partie réelle du nombre complexe $\underline{Z}$.
y désigne la partie imaginaire du nombre complexe $\underline{Z}$.

2 – 3j est le conjugué de 2 + 3j.
j est le conjugué de –j.
5 est le conjugué de 5.

Propriétés :

$$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2\text{x}$$
$$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2\text{yj}$$
$$|\underline{Z}| = |\underline{Z}^*| = \sqrt{\text{x}^2 + \text{y}^2}$$
$$\underline{Z}\times\underline{Z}^* = |\underline{Z}|^2 = \text{x}^2 + \text{y}^2$$
$$\arg(\underline{Z}^*) = -\arg(\underline{Z})$$

13- Exemples d'application en électricité : les impédances complexes

En électricité, on peut caractériser le comportement d'un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal avec un nombre complexe que l'on appelle « impédance complexe ».

Ainsi l'impédance complexe d'une résistance est : $\underline{Z}_R = R$

(R est la résistance en ohms).

L'impédance complexe d'une bobine est : $\underline{Z}_L = jL\omega$

(L est l'inductance en henry, et ω la pulsation du courant en rad/s)

L'impédance complexe d'un condensateur est : $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega} = -\dfrac{j}{C\omega}$

(C est la capacité en farad, et ω la pulsation du courant en rad/s)

13-1- Exemple n°1 : Circuit RLC série

On associe une résistance, une bobine et un condensateur en série.
L'impédance complexe de l'association est alors :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

a. Donner l'expression de la partie réelle de l'impédance complexe $\underline{Z}$.

Réponse : R

b. La réactance X correspond à la partie imaginaire de l'impédance complexe $\underline{Z}$.
Donner son expression.

Réponse : $X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$

c. L'impédance de l'association (en ohms) correspond au module de l'impédance complexe.
Donner son expression.

Réponse :

$$\text{module} = \sqrt{(\text{partie réelle})^2 + (\text{partie imaginaire})^2}$$

$$|\underline{Z}| = \left|R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right|$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

d. Le déphasage entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.
Donner son expression.

Réponse :

$$\arg(\underline{Z}) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

13-2- Exemple n°2 : Circuit RL parallèle

On associe une résistance et une bobine en parallèle.
L'impédance complexe de l'association est alors :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_R \times \underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{R \times jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

a. L'impédance de l'association (en ohms) correspond au module de l'impédance complexe.
Donner son expression.

Réponse : $|\underline{Z}| = \left|\dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega}\right| = \dfrac{|jRL\omega|}{|R + jL\omega|} = \dfrac{RL\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$

b. Le déphasage entre tension et courant est donné par l'argument de l'impédance complexe.
Donner son expression.

Réponse : $\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega}\right) = \arg(jRL\omega) - \arg(R + jL\omega) = +\dfrac{\pi}{2}\text{rad} - \tan^{-1}\left(\dfrac{L\omega}{R}\right)$

14- Exemple d'application en électronique : fonction de transfert d'un filtre

En électronique, on peut caractériser le comportement d'un filtre avec un nombre complexe que l'on appelle « fonction de transfert ».

Voici la fonction de transfert d'un filtre RC passe-bas du 1er ordre :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

a. L'amplification du filtre correspond au module de la fonction de transfert.
Donner son expression.

Réponse : $|\underline{T}| = \left|\dfrac{1}{1 + jRC\omega}\right| = \dfrac{|1|}{|1 + jRC\omega|} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (RC\omega)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$

b. Le déphasage entre la sortie et l'entrée est fourni par l'argument de la fonction de transfert. Donner son expression.

Réponse :

$$\arg(\underline{T}) = \arg\left(\frac{1}{1+jRC\omega}\right) = \arg(1) - \arg(1+jRC\omega) = 0 - \arctan\left(\frac{RC\omega}{1}\right)$$
$$= -\arctan(RC\omega)$$

15- Réponse aux questions

Question n°1 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe : 5,2 j – 2,5 ?

Partie réelle : – 2,5
Partie imaginaire : + 5,2

Question n°2 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre réel π ?

π = π + 0j
Partie réelle : π
Partie imaginaire : 0

Question n°3 : Que valent la partie réelle et la partie imaginaire du nombre imaginaire j ?

j = 0 + 1×j
Partie réelle : 0
Partie imaginaire : 1

Question n°4 : Additionner les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

(3 – 4j) + (3 + 4j) = (3 + 3) + (– 4 + 4)j = 6 + 0j = 6
La partie imaginaire est nulle : le résultat est un nombre réel « pur ».

Question n°5 : Soustraire les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

(3 – 4j) – (3 + 4j) = (3 – 3) + (– 4 – 4)j = 0 – 8j = – 8j
La partie réelle est nulle : le résultat est un nombre imaginaire « pur ».

Question n°6 : Multiplier les nombres complexes 1 – j et 4 + 2j.

$(1 - j)\times(4 + 2j) = 1\times4 + 1\times2j - j\times4 - j\times2j = 4 + 2j - 4j - 2j^2$
$= 4 + 2j - 4j + 2 \qquad (j^2 = -1)$
$= 6 - 2j$

Question n°7 : Multiplier les nombres complexes 3 – 4j et 3 + 4j.

$(3 - 4j)(3 + 4j) = 3\times3 + 3\times4j - 4j\times3 - 4j\times4j$
$= 9 + 12j - 12j - 16j^2$

= 9 + 12j – 12j + 16 **(j^2 = –1)**
= 25 + 0j
= 25
La partie imaginaire est nulle : le résultat est un nombre réel « pur ».

Question n°8 : Multiplier les nombres complexes j et 3 + 4j.

j(3 + 4j) = 3j + 4j^2 = 3j – 4 **(j^2 = –1)**
= – 4 + 3j

Question n°9 : Calculer le module du nombre complexe –1 – 2j.

$$|-1-2j| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Question n°10 : Calculer le module du nombre imaginaire 5j.

$$|5j| = |0+5j| = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{5^2} = |5| = 5$$

Question n°11 : Calculer le module du nombre imaginaire –7j.

D'après la question n°10 :
$$|-7j| = |-7| = 7$$

Question n°12 : Calculer le module du nombre réel – 3,93.

$$|-3.93| = 3{,}93$$
Pour un nombre réel, le module correspond à la valeur absolue.

Question n°13 : Calculer l'argument du nombre complexe 2 + 2j.

$$\arg(2+2j) = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = +45°$$

Question n°14 : Calculer l'argument du nombre imaginaire 5j.

arg(5j) = +90°

Question n°15 : Calculer l'argument du nombre imaginaire –7j.

arg(-7j) = - 90°

Question n°16 : Calculer l'argument du nombre réel – 3,93.

arg(-3,93) = 180°