Exercice 1

Un tube à rayons X à anticathode de cuivre fonctionnant sous une tension U de 50 kV est parcouru par un courant d'intensité 40 mA.

1) Quelle est la longueur d'onde minimale λ_0 (en nm) des photons X du rayonnement de freinage ?

$$\mathbf{eU = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_0 = \frac{hc}{eU}}$$

$$\mathbf{\lambda_0 = \frac{6,6261.10^{-34} \times 299792458}{1,60218.10^{-19} \times 50.10^3} = 0,0248\ nm}$$

2) Sachant que la longueur d'onde du maximum d'intensité du rayonnement de freinage est égale à $3\lambda_0/2$, quelle est, pour les électrons ayant pénétré dans l'anticathode, la perte d'énergie cinétique la plus probable lors du processus de freinage ? Exprimer le résultat en keV.

$$\mathbf{\Delta E_c = \frac{hc}{\lambda_{max}} = \frac{2hc}{3\lambda_0} = \frac{2}{3} eU \qquad \Delta E_c = \frac{2}{3} \cdot 50 = 33,3\ keV}$$

3) Quelle est la valeur de λ_0 (en nm) lorsque l'intensité du courant électrique qui parcourt le tube augmente de 20 mA ?

$$\mathbf{\lambda_0 = 0,0248\ nm}$$

4) L'intensité $I_{K\alpha}$ de la raie K_α étant 7,4 fois plus grande que l'intensité $I_{K\beta}$ de la raie K_β, quelle est la valeur du rapport $I_{K\alpha}/I_{K\beta}$ à la sortie de la fenêtre de béryllium ?

On donne :
- l'épaisseur de la fenêtre de béryllium $x = 1,5$ mm,
- le coefficient d'atténuation massique du béryllium pour les photons de la raie K_α $\mu_m(K_\alpha) = 1,01\ cm^2.g^{-1}$,
- le coefficient d'atténuation massique du béryllium pour les photons de la raie K_β $\mu_m(K_\beta) = 0,774\ cm^2.g^{-1}$
- et la masse volumique du béryllium $\rho = 1,85\ g.cm^{-3}$.

Raie K_α $\qquad \mathbf{I_{K_\alpha} = I_{0K_\alpha} \cdot \exp\left(-\mu_{m(K_\alpha)}\rho x\right)}$ **(1)**

Raie K_β $\qquad \mathbf{I_{K_\beta} = I_{0K_\beta} \cdot \exp\left(-\mu_{m(K_\beta)}\rho x\right)}$ **(2)**

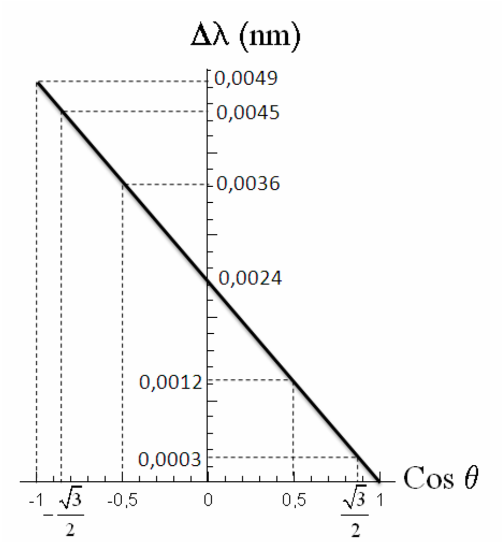
(1) / (2) $\Rightarrow$ $$\frac{I_{K\alpha}}{I_{K\beta}} = \frac{I_{0K\alpha}}{I_{0K\beta}} \cdot \exp\left[\rho x\left(\mu_{m(K\beta)} - \mu_{m(K\alpha)}\right)\right]$$

$$\frac{I_{K\alpha}}{I_{K\beta}} = 7{,}4 \cdot \exp\left[1{,}85 \times 0{,}15\left(0{,}774 - 1{,}01\right)\right]$$

$$\frac{I_{K\alpha}}{I_{K\beta}} = 6{,}93$$

Exercice 2

Un faisceau parallèle et monochromatique de rayons X, de longueur d'onde λ = 0,1530 nm, est envoyé sur une cible diffusante. Le graphe ci-contre représente la différence de longueur d'onde $\Delta\lambda$ entre la longueur d'onde du faisceau diffusé et celle du faisceau incident, en fonction de $\cos\theta$. L'angle θ est l'angle entre la direction du rayonnement incident et celle du rayonnement diffusé.
Par la suite, on considère que le mécanisme de diffusion des photons incidents sur la cible est de type Compton.



1) Déterminer, à partir du graphique, la longueur d'onde des photons diffusés pour $\theta = \pi/3$ rad.

Pour $\theta = \pi/3$ rad alors $\Delta\lambda$ = 0,0012 nm ($\cos\pi/3 = 0{,}5$), donc la longueur d'onde du photon diffusé est : $\lambda(\theta = \pi/3) = \lambda + \Delta\lambda = 0{,}1530 + 0{,}0012 = 0{,}1542$ nm

2) Calculer l'énergie de ces photons diffusés, en keV.

$$E\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right) = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62.10^{-34} \times 3.10^{8}}{0{,}1542.10^{-9}} = 1{,}288.10^{-15}\,\text{J}\ \left(\text{ou } 8049 \text{ eV}\right)$$

3) Calculer la différence de fréquence $\Delta\nu$ entre la fréquence des photons incidents et celle des photons diffusés pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$ rad.

Pour $\theta = 5\pi/6$ rad alors $\Delta\lambda$=0,0045 nm ($\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$), donc la longueur d'onde du photon diffusé à cet angle est :

$$\lambda(\theta = 5\pi/6) = \lambda + \Delta\lambda = 0{,}1530 + 0{,}0045 = 0{,}1575 \text{ nm}$$

$\Rightarrow$ $$\nu(\theta = 5\pi/6) = \frac{c}{\lambda} = \frac{299792458}{0{,}1575.10^{-9}} = 1{,}903.10^{18}\ \text{Hz}$$

La fréquence du photon incident est : $$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{299792458}{0{,}1530.10^{-9}} = 1{,}959.10^{18}\ \text{Hz}$$

Donc $\Delta\nu = 1{,}959.10^{18} - 1{,}903.10^{18} = 5{,}6.10^{16}$ **Hz**

4) À partir du graphique, déterminer une valeur approchée de la longueur d'onde Compton $\frac{h}{mc}$ (justifier votre réponse).

Ordonnée à l'origine : $\frac{h}{mc} = 0,0024$ **nm (ou 0,0024.10^{-9} m)**

(Relation Compton : $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$ **)**

5) Dans le cas où le photon incident est rétrodiffusé, déterminer la vitesse de l'électron de recul (faire l'approximation non relativiste).

La longueur d'onde du photon rétrodiffusé est $(\cos\theta = -1)$ **:**

$$\lambda(\theta=\pi) = \lambda + \Delta\lambda = 0,1530 + 0,0049 = 0,1579 \text{ nm.}$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement on a :

$$\underbrace{\vec{p}_{photon}}_{\text{avant collision}} = \underbrace{\vec{p}_{photon} + \vec{p}_{e^-}}_{\text{après collision}} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{\lambda}\vec{u} = -\frac{h}{\lambda_{(\theta=\pi)}}\vec{u} + mv\vec{u}$$

En projection sur $\vec{u}$ **:**

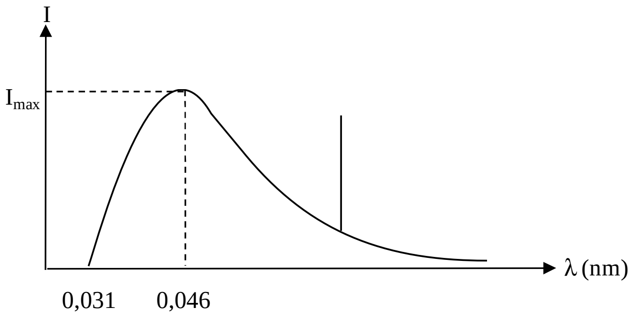
$$\frac{h}{\lambda} = -\frac{h}{\lambda_{(\theta=\pi)}} + mv \quad \Rightarrow \quad h\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_{(\theta=\pi)}}\right) = mv$$

D'où : $v = \frac{h}{m}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_{(\theta=\pi)}}\right) = \frac{6,62.10^{-34}}{9,1.10^{-31}}\left(\frac{1}{0,1530.10^{-9}} + \frac{1}{0,1579.10^{-9}}\right)$ **= 9,36.10^{6} m.s^{-1}**

Exercice 3

Des électrons accélérés sous une différence de potentiel U = 40 kV bombardent une cible en cuivre en créant une émission de rayons X. Le spectre correspondant à cette émission (voir figure ci-dessous) représente l'intensité I du faisceau de rayons X émis en fonction de la longueur d'onde λ, exprimée en nm.

On donne les énergies d'ionisation des niveaux K et L (niveau moyen entre les niveaux L_{II} et L_{III}) du cuivre : E_{iK} = 8995 eV et E_{iL} = 955 eV.



1) Quelle est la longueur d'onde minimale λ_0, en nm, du spectre continu émis par la cible ?

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eU} = 3,1.10^{-11} \text{ m} = 0,031 \text{ nm}$$

2) À partir des valeurs numériques indiquées sur le spectre, déterminer la perte d'énergie cinétique la plus probable, en keV, des électrons arrivant sur la cible.

$I_{max} \quad \leftrightarrow \quad \lambda_{max} = 0{,}046 \text{ nm}$

$$\Delta E_{c\,max} = \frac{hc}{e\lambda_{max}} = 27.10^3 \text{ eV} = 27 \text{ keV}$$

3) Quelle condition doit vérifier l'énergie cinétique des électrons qui bombardent la cible pour observer une raie K ?

$$E_c = eU \geq E_{iK}$$

4) Calculer, en nm, la longueur d'onde de la raie K_α.

$$\frac{hc}{\lambda_{K_\alpha}} = E_{iK} - E_{iL}$$

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{\left(E_{iK} - E_{iL}\right)} = 1{,}54.10^{-10} \text{ m} = 0{,}154 \text{ nm}$$