Corrège-type TD 03

Sol, Exercice N° 3.

On a trois urnes U_1, U_2 et U_3 :

U_1	U_2	U_3
9 (B)	8 (B)	6 (B)
4 (R)	5 (R)	4 (R)
2 (N)	2 (N)	5 (N)

On note par : A_i : i, 1, 2, 3 l'evenement :

A_i : " l'urne choisit est U_i " alors $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

On note par B l'evenement :

B : " on obtient 2 boules blanches et une rouge "

$\Rightarrow$ B : " 2 (B) et 1 (R) "

Alors, on déduit :

$$\left.\begin{aligned} P(B/A_1) &= \frac{C_9^2 \times C_4^1}{C_{15}^3} \\ P(B/A_2) &= \frac{C_8^2\, C_5^1}{C_{15}^3} \\ P(B/A_3) &= \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{15}^3} \end{aligned}\right\}$$

On tire 3 boules simultanément $\Rightarrow$ Combinaisons

① l'objectif est déterminer $P(A_2/B) = ?$

D'après théorème de Bayes, on a

$$P(A_2/B) = \frac{P(B/A_2)\, P(A_2)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3)}$$

$$= \frac{\frac{C_8^2 C_5^1}{\cancel{C_{11}^3}} \cdot \cancel{\frac{1}{3}}}{\frac{C_9^2 C_4^1}{C_{15}^3} \cdot \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{C_8^2 C_5^1}{\cancel{C_{11}^3}} \cdot \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{C_6^2 C_4^1}{C_5^3} \cdot \cancel{\frac{1}{3}}}$$

$$P(A_2/B) = \frac{C_8^2 \, C_5^1}{C_9^2 \, C_4^1 + C_8^2 \, C_5^1 + C_6^2 \, C_4^1}$$

(2) $P(A_1^c/B) = 1 - P(A_1/B)$

$$= 1 - \frac{C_9^2 C_4^1}{C_9^2 C_4^1 + C_8^2 C_5^1 + C_6^2 C_4^1}$$

$$= \frac{C_8^2 C_5^1 + C_6^2 C_4^1}{C_9^2 C_4^1 + C_8^2 C_5^1 + C_6^2 C_4^1}.$$

5] On note par
C : "obtenir une boule blanche, une rouge et une noire"

$P(A_1/C) = ?$

On sait que

$$\begin{cases} P(C/A_1) = \dfrac{C_9^1 \cdot C_4^1 \, C_2^1}{C_{15}^3} \\ P(C/A_2) = \dfrac{C_8^1 \, C_5^1 \, C_2^1}{C_{15}^3} \\ P(C/A_3) = \dfrac{C_6^1 \, C_4^1 \, C_5^1}{C_{15}^3} \end{cases}$$

$$P(A_1/C) = \frac{P(C/A_1)\,P(C/A_1)}{P(C/A_1)\,P(A_1) + P(C/A_2)\,P(A_2) + P(C/A_3)\,P(A_3)}$$

$$\Rightarrow P(A_1/C) = \frac{C_9^1\, C_4^1\, C_2^1}{C_9^1\, C_4^1\, C_2^1 + C_8^1\, C_5^1\, C_2^1 + C_6^1\, C_4^1\, C_5^1}$$

$$= \frac{9\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 4\cdot 2 + 8\cdot 5\cdot 2 + 6\cdot 4\cdot 5}$$

④ $$P(A_1^c \cap A_3^c / C) = P\left\{(A_1 \cup A_3)^c / C\right\}$$

$$= 1 - P\left\{A_1 \cup A_3 / C\right\}$$

$$= 1 - \left[P(A_1/C) + P(A_3/C)\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{9\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 4\cdot 2 + 8\cdot 5\cdot 2 + 6\cdot 4\cdot 5} + \frac{6\cdot 4\cdot 5}{9\cdot 4\cdot 2 + 8\cdot 5\cdot 2 + 6\cdot 4\cdot 5}\right]$$

$$= \frac{8\cdot 5\cdot 2}{9\cdot 4\cdot 2 + 8\cdot 5\cdot 2 + 6\cdot 4\cdot 5}.$$

d'où

$$= P(A_2/C)$$

On note par E : « la boule tirée de U_1 est rouge »

F : « " " U_2 " " »

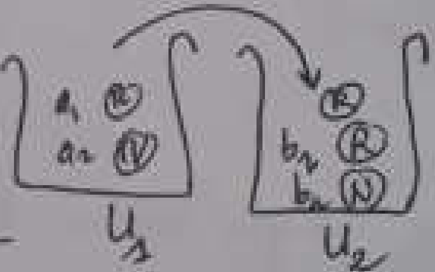
On a :

① $P(E) = \dfrac{a_1}{a_1+a_2} = \dfrac{C^1_{a_1}}{C^1_{a_1+a_2}}$

$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - \dfrac{a_1}{a_1+a_2}$

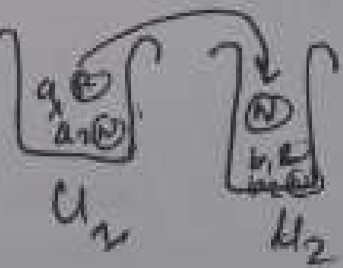
$= \dfrac{a_2}{a_1+a_2}$

$P(F/E) = ?$



$= \dfrac{b_1+1}{b_1+b_2+1}$

$P(F/E^c) = \dfrac{b_1}{b_1+b_2+1}$



② $P(F) = P(F/E)P(E) + P(F/E^c)P(E^c)$

$\overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{a_1}{a_1+a_2} \cdot \dfrac{b_1+1}{b_1+b_2+1} + \dfrac{a_2}{a_1+a_2} \dfrac{b_1}{b_1+b_2+1}$

$$\boxed{P(F) = \dfrac{(b_1+1)a_1 + b_1 a_1}{(a_1+a_2)(b_1+b_2+1)}}.$$

$$\boxed{P(E/F) = ?}$$

On sait que $\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow E \\ A_2 \longrightarrow E^c \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} A_1 \cup A_2 = E \cup E^c = \Omega \\ A_1 \cap A_2 = E \cap E^c = \emptyset \end{array}$

D'après théorème de Bayes on a

$$P(E/F) = \frac{P(F/E) \cdot P(E)}{P(F/E)P(E) + P(F/E^c)P(E^c)}$$

où $\left(P(A_1/B) \overset{def}{=} \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)} \right.$ Bayes : $n=2$ formule

$$= \frac{\frac{b_1+1}{(b_1+b_2+1)} \cdot \frac{a_1}{(a_1+a_2)}}{\frac{b_1+1}{(b_1+b_2+1)}\frac{a_1}{(a_1+a_2)} + \frac{b_1}{(b_1+b_2+1)} \cdot \frac{a_2}{(a_1+a_2)}} = \frac{(b_1+1)a_1}{(b_1+1)a_1 + b_1 a_2}$$

$$\boxed{P(E^c/F) = ?}$$

Méthode ①: $P(E^c/F) = 1 - P(E/F) = 1 - \frac{(b_1+1)a_1}{(b_1+1)a_1 + b_1 a_2}$

$$= \frac{b_1 a_2}{(b_1+1)a_1 + b_1 a_2}$$

Méthode ②, D'après théorème de Bayes

$$P(E^c/F) = \frac{P(F/E^c)\,P(E^c)}{P(F/E^c)P(E^c) + P(F/E)P(F/E)}$$

$$= \frac{\frac{b_1}{(b_1+b_2+1)} \frac{a_2}{(a_1+a_2)}}{\frac{(b_1+1)}{(b_1+b_2+1)}\frac{a_1}{(a_1+a_2)} + \frac{b_1}{(b_1+b_2+1)}\frac{a_2}{(a_1+a_2)}} = \frac{b_1 a_2}{(b_1+1)a_1 + b_1 a_2}$$

Exercice N° 5. on a

$\mathcal{U} = \{6 Ⓑ, 4 Ⓡ, 5 Ⓥ\}$, $\begin{bmatrix} 6Ⓑ \\ 4Ⓡ \\ 5Ⓥ \end{bmatrix}$

- Méthode (1) : on tire trois boules, l'une après l'autre avec remise de la boule tirée.
- Méthode (2) : on tire trois boules, l'une après l'autre sans remise de la boule tirée.

① La probabilité d'obtenir trois boule rouges :

$P\{\text{trois boules rouge}\} = ?$ (Noté P_1)

on note par :

B_i "$\{$la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche B$\}$"

R_i : "la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge R"

V_i : "la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est verte V"

Alors $P_1 =$ $\nearrow$ par la méthode 1. $\searrow$ par la méthode 2.

i) par la méthode 1.

$$P_1 = P\{R_1 \cap R_2 \cap R_3\} = P(R_1) \cdot P(R_2) \, P(R_3)$$

(par cette méthode, les événements sont indép)

$$= \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{15} = \left(\frac{4}{15}\right)^3$$

(ii) par la méthode 2 : $P_1 = P\{R_1 \cap R_2 \cap R_3\}$.

$$= P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) \, P(R_3/R_1 \cap R_2).$$

par cette méthode les événements sont liés. $= \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13}$

② $P\{B_1 \cap B_2 \cap V_3\} = ?$

* <u>par la méthode 1.</u> $P(B_1 \cap B_2 \cap V_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) P(V_3)$

les événements B_1, B_2, V_3 sont indép

$$= \frac{6}{15} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{15}$$

* <u>par la méthode 2</u> $P(B_1 \cap B_2 \cap V_3) = P(B_1) P(B_2/B_1) P(V_3/B_1 \cap B_2)$

les événements B_1, B_2, V_3 ne sont pas indép

$$= \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{5}{13}$$

③ $P\{\text{trois boules la même couleur}\} = (\text{noté par } P_3)$

$$P_3 = P\{(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \text{ ou } (B_1 \cap B_2 \cap B_3) \text{ ou } (V_1 \cap V_2 \cap V_3)\}$$
$$= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

* <u>par la méthode 1.</u> les événements sont indép.

$$P_3 = \underbrace{P(R_1)P(R_2)P(R_3)}_{} + \underbrace{P(B_1)P(B_2)P(B_3)}_{} + \underbrace{P(V_1)P(V_2)P(V_3)}_{}$$
$$= \left(\frac{4}{15}\right)^3 + \left(\frac{6}{15}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^3$$
$$= \frac{4^3 + 6^3 + 5^3}{15^3}$$

* <u>par la méthode 2</u> les événements ne sont pas indép.

$$P_3 = P(R_1)P(R_2/R_1)P(R_3/R_1 \cap R_2) + P(B_1)P(B_2/B_1)P(B_3/B_1 \cap B_2) + P(V_1)P(V_2/V_1)P($$
$$= \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 5}{13 \cdot 14 \cdot 15} =$$