Université de Biskra
Département de Mathématiques
$2^{éme}$ Licence maths
Module : Algébre 4

Série 1

Exercice 1 : Montrer qu'une forme linéaire est déterminée par les valeurs qu'elle prend pour les vecteurs d'une base de E.

L'espace $\mathbb{R}^3$ étant repéré dans la base naturelle déterminer la forme ϕ qui aux vecteurs

$$x_1 = (4, 2, 0),\ x_2 = (1, 2, -3),\ x_3 = (0, 2, 5)$$

associe les scalaires $\phi(x_1) = 2,\ \phi(x_2) = -7$ et $\phi(x_3) = -1$.

Exercice 2 : Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose pour tout $P \in E$, $\phi_1(P) = P(0)$ et $\phi_2(P) = P(1)$ puis $\phi_3(P) = P'(0)$ et $\phi_4(P) = P'(1)$.

Montrer que $(\phi_1; \phi_2; \phi_3; \phi_4)$ est une base de $E^\star$ et trouver la base dont elle est la duale.

Exercice 3 : Soient ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par

$$\phi_1(P) = P(1), \phi_2(P) = P'(1), \phi_3(P) = \int_0^1 P(t)dt$$

Montrer que la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa base antéduale.

Exercice 4 : On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ la base duale de la base canonique de E. On note v et w les éléments de $E^\star$ définis par $v(P) = P(1)$ et $w(P) = \int_0^1 P(t)dt$.
a) Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, v, w)$ est une base de $E^\star$.
b) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
c) Donner la base antéduale de $\mathcal{B}'$.

Exercice 5 : Soit A une partie du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E , on appelle orthogonal (annulateur) de A la partie $A^\perp$ de $E^\star$ définie par :

$$A^\perp = \{\phi \in E^\star / \forall u \in A, \phi(u) = 0\}.$$

1) Déterminer $\{0_E\}^\perp$ et $E^\perp$.
2) Prouver que si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp \subset E^\star$.
3) Prouver que $A^\perp$ est un s.e.v de $E^\star$ et que $A^\perp = (Vect A)^\perp$.
4) Prouver que si E est de dimension finie, alors, pour tout s.e.v F de E on a $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$.
(Indication : Compléter une base de F en une base $\mathcal{B}$ de E et utiliser sa base duale $\mathcal{B}^\perp$.)

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

1. Soient B et B_1 deux bases de E, et M la matrice de passage de la base B à la base B_1. On note $B^\star$ et $B_1^\star$ les bases duales des bases B et B_1. Quelle est la matrice de passage de la base $B^\star$ à la base $B_1^\star$?

2. On suppose $E = \mathbb{R}^3$ et on note $B = (e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de E.

(a) On considère les vecteurs $u_1 = (1; 1; 1)$; $u_2 = (1; 0; 1)$; $u_3 = (1; 1; 0)$: Montrer que $B_1 = (u_1; u_2; u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^{3\star}$. Donner les coordonées dans $B^\star$ des vecteurs de $B_1^\star$, base duale de B_1.

(b) On considère les formes ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 définies par

$$\phi_1(x_1; x_2; x_3) = x_1 - x_2 + x_3$$

$$\phi_2(x_1; x_2; x_3) = x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\phi_3(x_1; x_2; x_3) = -4x_1 + x_2 + x_3$$

Montrer que $D^\star = (\phi_1; \phi_2; \phi_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base duale de $D^\star$ dans B.

3. On considère $E = \mathbb{R}^4$ et on note $B' = (e'_1; e'_2; e'_3; e'_4)$ sa base canonique.

(a) Etant donné les vecteurs

$$u'_1 = (1; 1; 1; 0); u'_2 = (1; 0; 1; 0); u'_3 = (1; 1; 0; 0);$$

déterminer $\{u'_1; u'_2; u'_3\}^\perp$.

(b) On considère les formes

$$\phi'_1 = 2e'^\star_1 + e'^\star_2 + e'^\star_3;$$

$$\phi'_2 = -e'^\star_1 + 2e'^\star_3$$

Déterminer $\{\phi'_1; \phi'_2\}^\perp$.