où

$$a_I = \frac{\lambda_i}{(\delta x)_i}, \quad b = S_C \Delta x + q_B$$
$$a_B = a_I - S_P \Delta x.$$

Si un coefficient d'échange h est connu, de sorte que $q_B = h(T_f - T_B)$, la relation pour T_B devient :

$$a_B T_B = a_I T_I + b$$

avec

$$a_I = \frac{\lambda_i}{(\delta x)_i}$$

10.4 Régime transitoire

Considérons à présent l'équation de diffusion de la chaleur en régime transitoire :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

en 1-D. Afin de simplifier l'écriture, le terme source a été négligé. Pour le volume de contrôle centré sur le point P, la discrétisation s'obtient après intégration dans le temps et dans l'espace :

$$\rho C_p \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt\, dx = \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\, dt$$

de l'équation de conservation. En notant, comme auparavnt, T^n et T^{n+1} les températures à l'instant t et à l'instant $t + \Delta t$ respectivement, le premier terme de cette équation devient :

$$\rho C_p \Delta x (T_P^{n+1} - T_P^n).$$

Le second terme s'écrit, après intégration spatiale :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\lambda_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w}\right] dt.$$

Pour pouvoir poursuivre, la variation des températures T_i entre t et $t + \Delta t$ doit être connue. En écrivant une variation linéaire de la forme :

$$\int_t^{t+\Delta t} T_i dt = \left(f T_i^{n+1} + (1-f) T_i^n\right) \Delta t$$

pour tout volume de contrôle (indice i), f étant un poids compris entre 0 et 1, la discrétisation finale s'écrit :

$$a_P T_P^{n+1} = a_E (f T_E^{n+1} + (1-f) T_E^n) + a_W (f T_W^{n+1} + $$
$$+ (1-f) T_W^n) + (a_P^n - (1-f) a_E - (1-f) a_W) T_P^n$$

où

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}, \quad a_P^n = \frac{\rho C_p \Delta x}{\Delta t}$$
$$a_P = f a_E + f a_W + a_P^n.$$

Si $f = 0$, le schéma est explicite, si $f = 1$ le schéma est implicite et enfin, si $f = 1/2$ le schéma de Crank-Nicolson est obtenu. *Patankar préconise l'utilisation du schéma implicite ($f = 1$) dans tous les cas.* Ainsi, avec le schéma implicite, les équations algébriques s'écrivent :

$$a_P T_P^{n+1} = a_E T_E^{n+1} + a_W T_W^{n+1} + b$$

où

$$a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}, \quad a_P^n = \frac{\rho C_p \Delta x}{\Delta t}$$
$$b = S_C \Delta x + a_P^n T_P^n$$
$$a_P = a_E + a_W + a_P^n - S_P \Delta x$$

quand le terme source est linéarisé.

En deux dimensions, l'équation de diffusion en régime transitoire s'écrit :

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + S$$

et, en notant N et S (pour north et south) les points au-dessus et en dessous du point P, comme le montre la FIG.10.4, la discrétisation mène à :

$$a_P T_P^{n+1} = a_E T_E^{n+1} + a_W T_W^{n+1} + a_N T_N^{n+1} + a_S T_S^{n+1} + b$$

où

$$a_E = \frac{\lambda_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \quad a_N = \frac{\lambda_n \Delta x}{(\delta y)_n}, \quad a_S = \frac{\lambda_s \Delta x}{(\delta y)_s}$$
$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^n T_P^n, \quad a_P^n = \frac{\rho C_p \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$
$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y.$$

Enfin, en trois dimensions, en notant T et B (pour top et bottom) les centres des deux volumes de contrôle au-dessus et en dessous de P, la discrétisation de l'équation de diffusion donne :

$$a_P T_P^{n+1} = a_E T_E^{n+1} + a_W T_W^{n+1} + a_N T_N^{n+1} + a_S T_S^{n+1} + a_T T_T^{n+1} + a_B T_B^{n+1} + b,$$
$$a_E = \frac{\lambda_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}, \quad a_N = \frac{\lambda_n \Delta z \Delta x}{(\delta y)_n}$$
$$a_S = \frac{\lambda_s \Delta z \Delta x}{(\delta y)_s}, \quad a_T = \frac{\lambda_t \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}, \quad a_B = \frac{\lambda_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}$$
$$b = S_C \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^n T_P^n, \quad a_P^n = \frac{\rho C_p \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}$$
$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^n - S_P \Delta x \Delta y \Delta z.$$