Chapitre 3 :

Méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion (*)

—— o —— o —— o ——

Introduction : En mécanique des fluide la convection joue un rôle important. Nous allon examiner ici l'application de la méthode des volumes finis pour des situations où la convection à lieu en même temps que la diffusion.
A l'état stationnaire L'equation de transport générale s'écrit pour une propriété physique φ comme suit :

$$\underbrace{\vec{\nabla}(\rho\vec{u}\varphi)}_{\text{terme de convection}} = \underbrace{\vec{\nabla}(\Gamma\vec{\nabla}\varphi)}_{\text{terme de diffusion}} + \underbrace{S_\varphi}_{\text{terme source}} \qquad (1)$$

Pour appliquer la méthode des volumes finis à l'équation (1) nous allons utiliser la même démarche que celle utilisée pour les problemes de diffusion.

---

* - Reference : Versteeg, H.K., and W. Malalasekara. An Introduction to computational Fluid Dynamics: The finite Volume Method. England : Pearson Education Limited 2007.

Considérons le cas monodimensionnel sans terme source, L'équation (1) s'écrit :

$$\frac{d}{dx}(\rho u\varphi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\varphi}{dx}\right) \qquad (2)$$

Le fluide doit satisfaire aussi l'équation de continuité :

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \qquad (3)$$

Considérons le volume de contrôle de la figure (1) centré sur le nœud P.

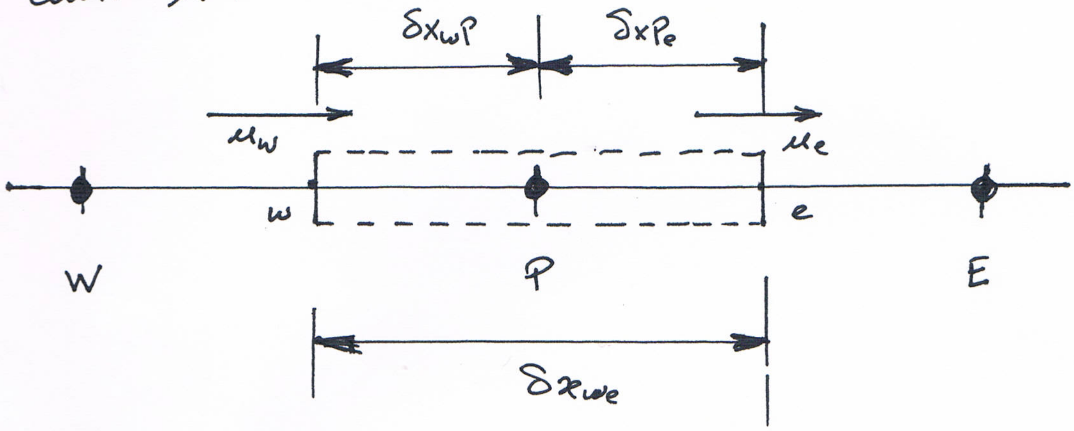

Figure -1-

L'intégration de l'éq. (2) sur le volume de contrôle de la fig. 1 donne :

$$(\rho u A\varphi)_e - (\rho u A\varphi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\varphi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\varphi}{dx}\right)_w \qquad (4)$$

L'intégration de l'éq. de continuité (3) donne

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \qquad (5)$$

Posons $\quad F = \rho u \quad$ et $\quad D = \dfrac{\Gamma}{\delta x}$ $\qquad$ (6)

Alors :

$$F_w = (\rho u)_w \qquad F_e = (\rho u)_e$$
$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \qquad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \qquad (7)$$

Avec ces notations et en utilisant l'approximation d'une fonction affine par morceaux ou différences centrées utilisée pour le problème de diffusion l'équation (4) et l'éq. (5) s'écrivent :

$$F_e \varphi_e - F_w \varphi_w = D_e(\varphi_E - \varphi_P) - D_w(\varphi_P - \varphi_W) \qquad (8)$$

$$F_e - F_w = 0 \qquad (9)$$

Nous admettrons ici que le champs de vitesse u est connu, il nous reste à estimer les valeurs de φ aux points e et w. Pour cela nous allons utiliser, en première approche l'approximation des différences centrées utilisée dans le cas de la diffusion. Pour un grille uniforme nous avons donc :

$$\varphi_e = (\varphi_P + \varphi_E)/2$$
$$\varphi_w = (\varphi_W + \varphi_P)/2 \qquad (10)$$

En portant (10) dans (8) et (9) et après réarrangement nous obtenons l'expression suivante :

$$\boxed{a_P \varphi_P = a_W \varphi_W + a_E \varphi_E} \quad (11)$$

avec

a_W	a_E	a_P
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e + \frac{F_e}{2}$	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$

(12)

Nous pouvons remarquer (11) pour les problèmes de convection-diffusion prend la même forme que celle pour le problème de diffusion. La différence réside dans les coefficients a_W, a_E et a_P qui contiennent de nouveaux termes pour tenir compte de la convection.

_Considérons un exemple simple où

$$D_e = D_w = 1 \quad \text{et} \quad F_e = F_w = 4 \quad (13)$$

Aussi si

a) $\varphi_E = 200$ et $\varphi_W = 100$, l'eq. 11 donne

$$\varphi_P = 50! \quad (14)$$

b) $\varphi_E = 100$ et $\varphi_W = 200$, l'eq. (11) donne

$$\varphi_P = 250! \quad (15)$$

φ_P, en réalité ne doit pas se trouver en dehors de l'intervalle 100 – 200 delimité par ses voisins. Les resultats (14) et (15) ne sont pas réalistes !

Le schéma Upwind

La faille du schéma des différences centrées réside dans l'hypothèse que φ à l'interface e et w est approximée par la moyenne de φ_E et φ_P.

Le schéma Upwind propose une meilleure solution, plus réaliste. En effet et en accord avec les figures 2 et 3 dans le schéma Upwind on pose :

$$\varphi_e = \varphi_P \quad \text{si } F_e > 0 \quad , \quad \varphi_w = \varphi_W \quad \text{si } F_w > 0 \qquad (16)$$

$$\varphi_e = \varphi_E \quad \text{si } F_e < 0 \quad , \quad \varphi_w = \varphi_P \quad \text{si } F_w < 0 \qquad (17)$$

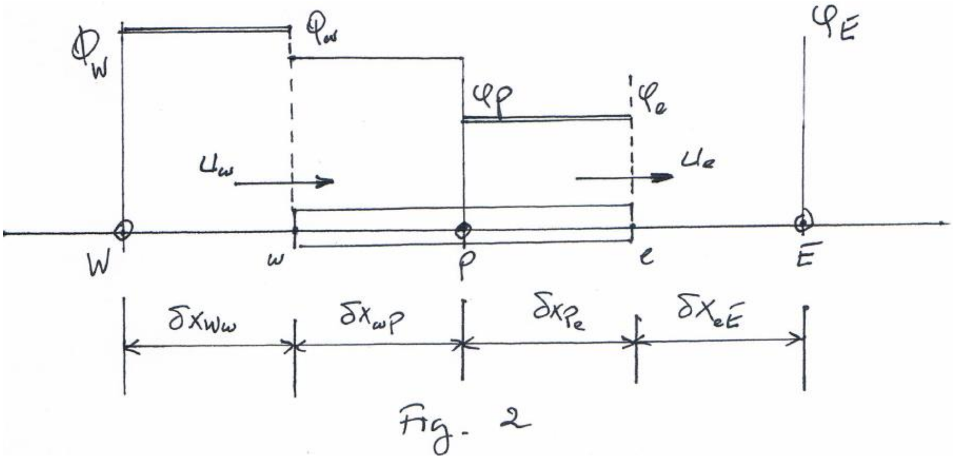

Fig. 2

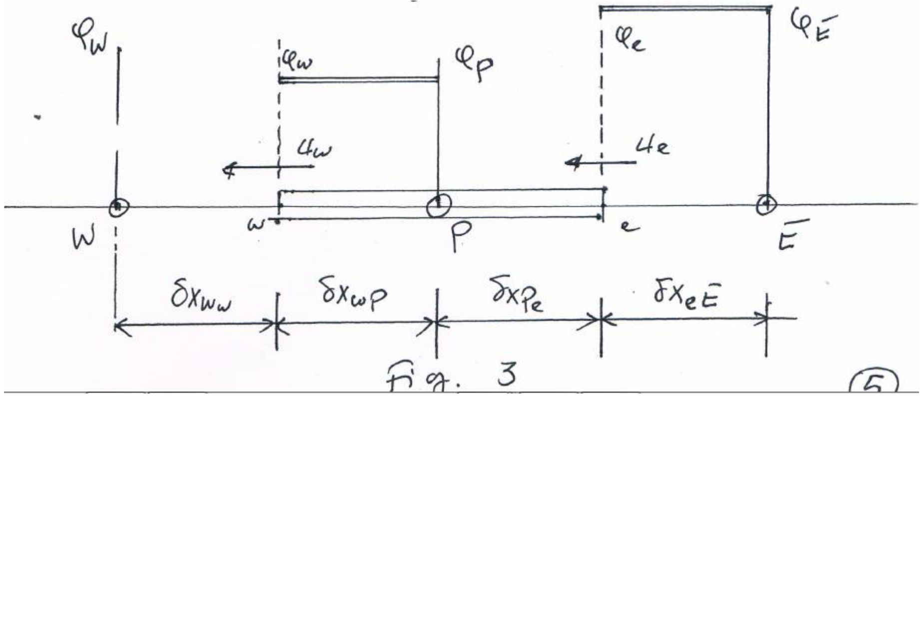

Fig. 3

Les conditions (16) et (17) peuvent etres écrites de manière plus compacte comme suit :

définissons d'abord l'operateur suivant :

$$[\![A,B]\!] = \max(A,B) \qquad (18)$$

les equations (16) et (17) s'écrivent donc en tenant compte de (18)

$$F_e\varphi_e = \varphi_P[\![F_e,0]\!] - \varphi_E[\![-F_e,0]\!] \qquad (19)$$

$$F_w\varphi_w = \varphi_W[\![F_w,0]\!] - \varphi_P[\![-F_w,0]\!] \qquad (20)$$

Lorsqu'on remplace L'eq (10) par le concept (19–20) l'equation de discrétisation (8) s'ecrit avec le schéma upwind :

$$\varphi_P[\![F_e,0]\!] - \varphi_E[\![-F_e,0]\!] - \varphi_W[\![F_w,0]\!] + \varphi_P[\![-F_w,0]\!] = D_e(\varphi_E-\varphi_P) - D_w(\varphi_P-\varphi_W) \qquad (21)$$

L'eq. 21 peut etre arrangée sous la forme suivante :

$$\varphi_P\left([\![-F_w,0]\!] + D_w + [\![F_e,0]\!] + D_e\right) = \varphi_W\left([\![F_w,0]\!] + D_w\right) + \varphi_E\left([\![-F_e,0]\!] + D_e\right) \qquad (22)$$

le coefficient de φ_P peut s'ecrire comme suit

$$a_P = [\![-F_w,0]\!] + D_w + [\![F_e,0]\!] + D_e + [\![F_w,0]\!] - [\![F_w,0]\!] + [\![-F_e,0]\!] - [\![-F_e,0]\!]$$

23

en posant $\quad a_W = [\![F_w, 0]\!] + D_w$

et $\quad a_E = [\![-F_e, 0]\!] + D_e$ (24)

Le coefficient (23) s'écrit :

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (25)$$

Finalement l'équ. de discrétisation s'écrit av[ec] le schéma upwind comme suit :

$$a_P \varphi_P = a_W \varphi_W + a_E \varphi_E \quad (26)$$

avec

$$a_W = [\![F_w, 0]\!] + D_w$$
$$a_E = [\![-F_e, 0]\!] + D_e$$
$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$