$$a_P = a_E + a_W + (\rho u)_e - (\rho u)_w.$$

Avec le schéma *upwind*, les coefficients sont tous positifs, respectant ainsi la règle 2 donnée plus haut. En deux dimensions la discrétisation de l'équation générale :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + S}$$

est :

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b$$

où :

$$a_E = D_e + \langle -(\rho u)_e \Delta y, 0\rangle, \quad a_W = D_w + \langle (\rho u)_w \Delta y, 0\rangle$$

$$a_N = D_n + \langle -(\rho v)_n \Delta x, 0\rangle, \quad a_S = D_s + \langle (\rho v)_n \Delta x, 0\rangle$$

$$a_P^n = \frac{\rho_P^n \Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^n \phi_P^n$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s}.$$

Toutes les valeurs de $\phi$ sont prises à l'instant $t + \Delta t$ sauf $\phi_P^n$ et $\rho_P^n$. Le schéma upwind avec une discrétisation implicite ($f = 1$) a été utilisé pour obtenir les formules ci-dessus.

Enfin, en 3-D les discrétisations sont :

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + a_T\phi_T + a_B\phi_B + b$$

où :

$$a_E = D_e + \langle -(\rho u)_e \Delta y \Delta z, 0\rangle, \quad a_W = D_w + \langle (\rho u)_w \Delta y \Delta z, 0\rangle$$

$$a_N = D_n + \langle -(\rho v)_n \Delta x \Delta z, 0\rangle, \quad a_S = D_s + \langle (\rho v)_n \Delta x \Delta z, 0\rangle$$

$$a_T = D_t + \langle -(\rho w)_t \Delta x \Delta y, 0\rangle, \quad a_B = D_b + \langle (\rho w)_b \Delta x \Delta y, 0\rangle$$

$$a_P^n = \frac{\rho_P^n \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}, \quad b = S_C \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^n \phi_P^n$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x \Delta z}{(\delta y)_n}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x \Delta z}{(\delta y)_s}$$

$$D_t = \frac{\Gamma_n \Delta x \Delta y}{(\delta z)_n}, \quad D_b = \frac{\Gamma_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}.$$

Quand l'advection est importante dans un problème donné, la solution obtenue à l'aide d'un schéma upwind est souvent peu précise et l'utilisation d'un



schéma centré produit parfois des oscillations qui ne sont pas réalistes. Des meilleurs schémas de discrétisation des termes d'advection ont été proposés dans la littérature. Parmi ceux-ci, le schéma QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) proposé par B.P. Leonard a connu un certain succès. Ce schéma est incorporé dans la plupart des codes commerciaux disponibles sur le marché. Considérons la variation d'une grandeur $\phi$ dans la direction normale à l'interface entre deux volumes de contrôle, comme le montre la FIG.10.7a. Pour calculer la valeur de $\phi_f$, à mi-distance entre les centres $C$ et $D$ de deux volumes finis adjacents, le schéma QUICK est :

$$\phi_f = \frac{\phi_D + \phi_C}{2} - \frac{\phi_D - 2\phi_C + \phi_U}{8}. \tag{10.4}$$

Le schéma QUICK est obtenu à partir d'une interpolation quadratique de la forme :

$$\phi = a + b\xi + c\xi^2$$

où $\xi$ est la coordonnée normale à la face considérée, positive dans la direction de la vitesse convective comme le montre la FIG.10.7. En fonction des valeurs aux centres des volumes finis, on a :

$$\phi(\xi)0\phi_C + \left(\frac{\phi_D - \phi_U}{2\Delta x}\right)\xi + \left(\frac{\phi_D - 2\phi_C + \phi_U}{2\Delta x^2}\right)\xi^2$$

formule qui est égale à celle donnée plus si $\xi = \Delta x/2$.

Avec la notation de la FIG.10.7a, les schémas upwind et centré donnent les formules :

$$\phi_f = \phi_C, \quad \phi_f = \frac{\phi_D + \phi_c}{2}$$

respectivement. Il est possible de définir une variable normalisée $\tilde{\phi}$ définie comme suit :

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}$$

et écrire l'algorithme QUICK sous la forme :

$$\tilde{\phi}_f = \frac{1 + \tilde{\phi}_C}{2} - \frac{1 - 2\tilde{\phi}_C}{8}$$

où encore :

$$\tilde{\phi}_f = 0.75 + 0.75(\tilde{\phi}_C - 0.5).$$

En fonction de la variable normalisée $\tilde{\phi}$, l'algorithme QUICK implique une droite de pente égale à 0.75 passant par le point (0.5,0.75). Les schémas upwind et centré impliquent :

$$\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_C, \quad \tilde{\phi}_f = 0.75 + 0.5(\tilde{\phi}_C - 0.5)$$

respectivement pour la variable normalisée $\tilde{\phi}$. La FIG.10.7b montre la variation de la varaible normalisée $\tilde{\phi}$.