Méthode des Vol. finis pour les problèmes de conduction

— o—o —

Cas 2D

— o — o —

<u>Ref</u> : - Versteeg & Malalaseka
- Patankar

— o — o —

Considérons l'eq. de diffusion 2-D stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + S_\varphi = 0 \qquad (1)$$

La figure (1) représente une portion du domaine (D) sur lequel est définie l'eq. (1) ainsi que la numérotation adoptée en 2-D :

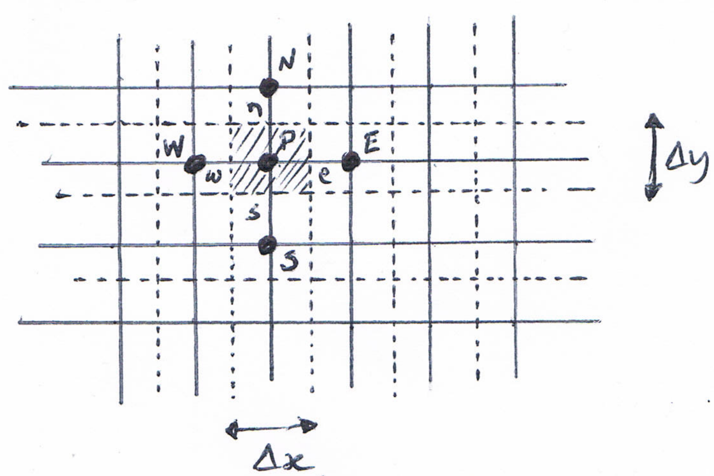

Figure - 1 -

- Par rapport au cas 1-D nous avons rajouté 02 noeuds supplémentaires notés (N) et (S)
- L'intégration de l'eq. (1) sur le vol. finis autour de P s'écrit :

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx.dy + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx dy + \int_{\Delta V} S_\varphi \, dV = 0 \qquad (2)$$

posons $A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$ nous obtenons :

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_w\right] +$$

$$\left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_s\right] + \bar{S} \Delta V = 0 \qquad (3)$$

En utilisant L'approximation introduite précedemment les différents termes de l'eq. (3) s'ecrivent :

$$\Gamma_e A_e \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_e = \Gamma_e A_e \frac{(\varphi_E - \varphi_P)}{\delta x_{PE}} \qquad (3\text{-}1)$$

$$\Gamma_w A_w \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\varphi_P - \varphi_W)}{\delta x_{WP}} \qquad (3\text{-}2)$$

$$\Gamma_n A_n \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\varphi_N - \varphi_P)}{\delta y_{PN}} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\Gamma_s A_s \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\varphi_P - \varphi_S)}{\delta y_{SP}} \qquad (3\text{-}4)$$

le terme source est linéarisé comme suit

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \varphi_p \qquad (3\text{-}5)$$

L'equation (3) s'écrit donc :

$$\Gamma_e A_e \frac{(\varphi_E - \varphi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\varphi_P - \varphi_W)}{\delta x_{WP}} + \Gamma_n A_n \frac{(\varphi_N - \varphi_P)}{\delta y_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\varphi_P - \varphi_S)}{\delta y_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0 \qquad (4)$$

On peut réarranger l'eq. (4) comme suit :

$$\left[\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{PE}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} - S_P \right] \varphi_P =$$

$$\left[\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right] \varphi_W + \left[\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right] \varphi_E + \left[\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \right] \varphi_S + \left[\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right] \varphi_N + S_u \qquad (5)$$

L'eq. (5) s'écrit de manière générale :

$$\boxed{a_P \varphi_P = a_W \varphi_W + a_E \varphi_E + a_S \varphi_S + a_N \varphi_N + S_u \qquad (6)}$$

avec :

(7)

a_W	a_E	a_S	a_N	a_P
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$a_W + a_E + a_S + a_N - S_P$

L'eq. (6) est écrite pour chaque noeud du domaine discrétisé en tenant compte des conditions aux limites, un système d'équations algébriques en résulte, sa résolution ~~donne~~ permet de calculer φ aux différents noeuds.

Cas 3-D

L'equation de diffusion stationnaire s'écrit en 3-D comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + S_\varphi = 0 \qquad (8)$$

le domaine tridimensionnel est subdifisé en petits cubes centré en P avec cette fois-ci 6 noeuds voisins notés : E, W, S, N, B et T comme indiqués sur la figure -2-

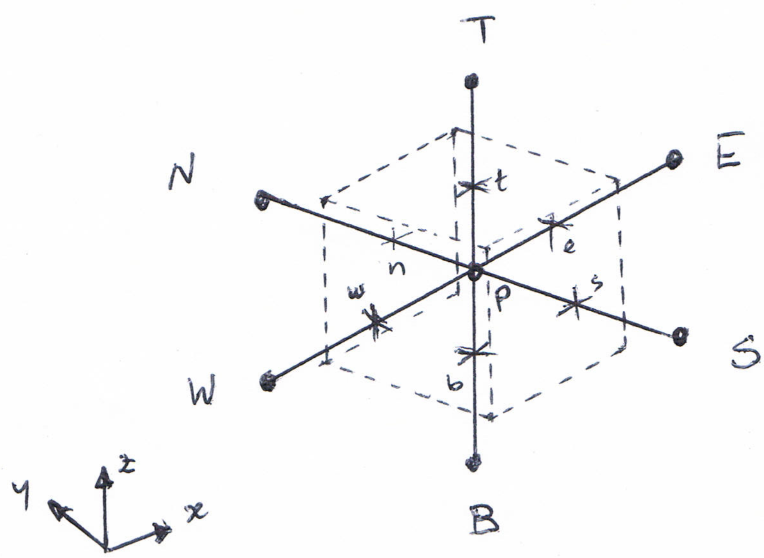

Figure -2-

L'intégration de l'équation 8 sur le volume finis défini sur la figure 2 donne :

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_w\right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_s\right] + \left[\Gamma_t A_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_t - \Gamma_b A_b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_b\right] + \bar{S}\,\Delta V = 0 \quad (9)$$

En utilisant la même procédure utilisée en 1-D et 2-D nous obtenons :

$$\left[\Gamma_e A_e \frac{(\varphi_E - \varphi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\varphi_P - \varphi_W)}{\delta x_{WP}}\right] + \left[\Gamma_n A_n \frac{(\varphi_N - \varphi_P)}{\delta y_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\varphi_P - \varphi_S)}{\delta y_{SP}}\right] + \left[\Gamma_t A_t \frac{(\varphi_T - \varphi_P)}{\delta z_{PT}} - \Gamma_b A_b \frac{(\varphi_P - \varphi_B)}{\delta z_{BP}}\right] + (S_u + S_p \varphi_P) = 0 \quad (10)$$

On peut réarranger l'eq. 10 comme précédemment pour obtenir l'eq. générale :

$$\boxed{a_P \varphi_P = a_W \varphi_W + a_E \varphi_E + a_S \varphi_S + a_N \varphi_N + a_B \varphi_B + a_T \varphi_T + S_u \quad (11)}$$

avec :

a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T	a_P
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$	$a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T - S_P$

(12)

L'eq. 11 est écrite pour chaque nœud du domaine discrétisé en tenant compte des conditions aux limites.