Université M. KHIDER 2019/2020

Faculté S.E.S.N.V.

Déprt. Mathématiques.

Licence 3ème année, Statistique Inférentielle. **T.D. N° -6-**

 **EXERCICE 1:** (Modèle Gamma et Méthode des moments)

On considère le Modèle Statistique de la loi Gamma ($R\_{+},B\_{R\_{+}}$fG$\left(α,β\right) : α>0,β>0$g

On rappelle que la densité d’une v.a. de loi fG$\left(α,β\right) $est :

$$\left\{f\_{α,β}\left(x\right)=\frac{β^{α}}{Г\left(α\right)} x^{α-1}e^{-βx}I\_{\left\{x\geq 0\right\}}\right\}$$

1) Calculer E$\left(X\right) $et $\left(X\right)$.

2) Par la méthode des moments, donner un estimateur du paramètre bidimensionnel

$\left(α,β\right)$ du modèle, basé sur l’observation d’un échantillon 1.

1. Déterminer des estimateurs de $α$ et $β$en utilisant conjointement des estimateurs empiriques des moments et la méthode de substitution.

**EXERCICE 2:** (Modèle de la loi exponentielle et Méthode des moments)

 On a vu en cours que la méthode des moments permet d’obtenir un estimateur du paramètre $λ$dans un modèle de la loi exponentielle : $\hat{λ}$=$\frac{1}{\overbar{X\_{n}}}$basé sur la relation $E(X) =\frac{1}{λ}$. L’intérêt de cet exercice est de montrer que cette méthode permet la

construction de plusieurs estimateurs de ce même paramètre $λ$.

1) On suppose qu’une v.a.r. suit une loi exponentielle E($λ$). Calculer $E(X^{2}).$

2) Écrire la fiabilité (0)=(0) sous forme d’une espérance.

3) On considère le modèle de la loi exponentielle ($R\_{+},B\_{R\_{+}}$f E($λ$) $ : λ>0$g.

En vous inspirant des résultats précédents et en utilisant à chaque fois la méthode des moments, proposer deux autres estimateurs du paramètre$ λ$.

**EXERCICE 3:** (Maximum de vraisemblance pour un modèle gaussien)

1. On considère le modèle gaussien f$ N$($μ$$σ^{2}$):$μ$2 R g.

Donner l’estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $μ$basé sur une observation $x\_{1}$$x\_{n}$d’un échantillon issu de ce modèle.

 2) On considère maintenant le modèle gaussien avec paramètre bidimensionnel, i.e. f$ N$($μ$$σ^{2}$) : $μ$2 R  $σ$0g. Donner l’estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $θ$=($μ$$σ^{2}$), pour le modèle d’échantillonnage associé.

**EXERCICE 4:** (Maximum de vraisemblance pour un modèle de loi uniforme)

On considère le modèle uniforme f$U\_{\left[0,θ\right]}$ : $θ$0g.

1) Montrer que la vraisemblance associée à ce modèle est :

($x\_{1}$$x\_{n}$; $θ$) =$ \frac{1}{θ^{n}} $ $I\_{\left\{x\_{1,n}\geq 0\right\}} I\_{\left\{x\_{n,n}\leq θ\right\}}$**.**

où $x\_{1,n}$ et $x\_{1,n}$ sont les observations des statistiques d’ordre $X\_{1,n}$et $X\_{n,n}$).

2) Donner l’estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre$ θ$.