(1)

كلية العلوم الاقتصادية والتسيير — مقياس الرياضيات

السنة أولى LMD

حل السلسلة رقم 04

الجمل الخطية

التمرين 1 : حل الجمل الخطية باستخدام مقلوب المصفوفة :

$$(1)\quad \begin{cases} 2x + 6y + z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$$

أولا نقوم بكتابة الجملة الخطية على الشكل المصفوفي :

$$AX = b \longleftarrow (2)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- نلاحظ أنه بضرب طرفي (2) في A^{-1} (مقلوب A)

نجد :

$$[X] = A^{-1}[b]$$

من هنا تأتي فكرة حل الجمل الخطية باستخدام المقلوب

(2)

وعليه المطلوب الآن هو البحث عن A^{-1} :

نعلم أن :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, adj(A)$$

حيث $|A|$ هو محدد المصفوفة A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix} = (0+96+3) - (8+8+0)$$

$$\begin{matrix} 8 & 8 & 0 & & 0 & 96 & 3 \end{matrix}$$

$$= 83$$

بقي الآن حساب $Adj(A)$:

لحساب $adj(A)$ نقوم كما يلي :

$$\cancel{adj(A)}$$

$$(2) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -16 & -5 \\ -1 & -4 & -22 \\ 22 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

نغير الإشارات بواحدة فتصبح (2) كما يلي

$$(2) = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -5 \\ 1 & -4 & 22 \\ 22 & -5 & -14 \end{pmatrix}$$

③

ثم نضع كل سطر هو عمود ومنه

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix}$$

ومنه مجموعة الحلول هي

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{83} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 22 \\ 16 & -4 & -5 \\ -5 & 22 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وحيث:

$$x = \frac{1}{83} \left[(-4 \times 3) + (1 \times 2) + (22 \times 1) \right] = \frac{12}{83}$$

$$y = \frac{1}{83} \left[(16 \times 3) + (-4 \times 2) + (-5 \times 1) \right] = \frac{35}{83}$$

$$z = \frac{1}{83} \left[(-5 \times 3) + (22 \times 2) + (-14 \times 1) \right] = \frac{15}{83}$$

إذن :

$$(x, y, z) = \left(\frac{12}{83}, \frac{35}{83}, \frac{15}{83} \right)$$

للتحقق بالتعويض في إحدى المعادلات من صحة النتائج.

4

التمرين 2 : باستخدام طريقة كرامر لحل الجمل الخطية

1)
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

أولا نقوم بكتابة الجملة الخطية على الشكل المصفوفي :

$$AX = b$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

نقوم الآن بحساب محدد المصفوفة A الذي يجب أن يكون يختلف عن الصفر $(|A| \neq 0)$ حتى يكون لهذه الجملة مجموعة من الحلول وحيدة

إذن $|A| = ?$

$$|A| = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$-2 \quad 6 \quad -1 \qquad -2 \quad -3 \quad 2$

$$= (-2-3+2) - (-2+6-1)$$

$$= -3-3 = \boxed{-6}$$

من العلاقة (1) سنحسب محددات المصفوفات A_x , A_y و A_z بحيث A_x هي المصفوفة التي نستبدل فيها العمود الأول بعناصر b فتصبح

$$A_x = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_x| = \left|\begin{matrix} 6 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 & -1 \\ 8 & -1 \\ 6 & 1 \end{matrix}$$

$$-12 \quad 18 \quad -8 \qquad\qquad -6 \quad -18 \quad 16$$

$$= (-6-18+16) - (-12+18-8)$$

$$|A_x| = \boxed{-6}$$

نفس الشيء لـ A_y نستبدل العمود الثاني بعناصر b فتصبح

$$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه

(6)

$$|A_y| = (16+18+12) - (6+16+36)$$

$$|A_y| = \boxed{-12}$$

لنعين الشيء لـ A_z نبدل العمود الثالث لـ A بعناصر b مصفوفة

$$A_z = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

وطليه

$$|A_z| = \left|\begin{matrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = (-12-8+6)-(-6+16-6)$$

$$|A_z| = \boxed{-18}$$

ومنه مجموعة الحلول هي

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-6}{-6} = \boxed{1} \quad , \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-12}{-6} = \boxed{2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-18}{-6} = \boxed{3}$$