حلول السلسلة رقم 02

محور التطبيقات الخطية

سلسلة رقم 02

حول تمرين 01 — تطبيق خطي

الرقم السري

1

تعريف : $f: E \longrightarrow F$

نقول عن f أنه خطي إذا كان:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall X \in E, \forall Y \in F:$

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

1

$$f: \mathbb{R}^3 = E \longrightarrow \mathbb{R}^3 = F$$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x,y,0)$$

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$ و $X=(x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$ و $Y=(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$

① $f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha(x_1,y_1,z_1) + \beta(x_2,y_2,z_2))$

$= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0)$ —— ①

② $\alpha f(X) + \beta f(Y) = \alpha f(x_1,y_1,z_1) + \beta f(x_2,y_2,z_2)$

$= \alpha(x_1,y_1,0) + \beta(x_2,y_2,0)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0)$ —— ②

من ① و ② نجد $f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

إذن f تطبيق خطي.

2

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (x+1, y+2)$$

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$ و $X=(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ و $Y=(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$

① $f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha(x_1,y_1) + \beta(x_2,y_2))$

$= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_2 + 1, \alpha y_1 + \beta y_2 + 2)$ —— ①

الرقم السري ②

② $\alpha f(X)+\beta f(Y)=\alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2)$

$=\alpha(x_1+1,y_1+2)+\beta(x_2+1,y_2+2)$

$=(\alpha x_1+\alpha+\beta x_2+\beta,\ \alpha y_1+2\alpha+\beta y_2+2\beta)$ —— ②

من ① و ② نجد: $f(\alpha X+\beta Y)\neq\alpha f(X)+\beta f(Y)$

ومنه f ليس تطبيق خطي.

③
$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\longmapsto f(x,y)=(x+y,x)$$

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$ و $X=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ و $Y=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

① $f(\alpha X+\beta Y)=f(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2))$

$=f(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2,\ \alpha x_1+\beta x_2)$ —— ①

② $\alpha f(X)+\beta f(Y)=\alpha f(x_1,y_1)+\beta f(x_2,y_2)$

$=\alpha(x_1+y_1,x_1)+\beta(x_2+y_2,x_2)$

$=(\alpha x_1+\alpha y_1+\beta x_2+\beta y_2,\ \alpha x_1+\beta x_2)$ —— ②

من ① و ② نجد: $f(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(X)+\beta f(Y)$

ومنه f تطبيق خطي.

④
$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$(x,y,z)\longmapsto f(x,y,z)=2x-3y+4z$$

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$ و $X=(x_1,y_1,z_1)$ و $Y=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$

① $f(\alpha X+\beta Y)=f(\alpha(x_1,y_1,z_1)+\beta(x_2,y_2,z_2))$

$=f(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2,\ \alpha z_1+\beta z_2)$

صفحة ٥٥

الرقم السري: 3

$= 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 - 3\alpha y_1 - 3\beta y_2 + 4\alpha z_1 + 4\beta z_2$ — (1)

(2) $\alpha f(X) + \beta f(Y) = \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2)$

$= \alpha(2x_1 - 3y_1 + 4z_1) + \beta(2x_2 - 3y_2 + 4z_2)$

$= 2\alpha x_1 - 3\alpha y_1 + 4\alpha z_1 + 2\beta x_2 - 3\beta y_2 + 4\beta z_2$ — (2)

من (1) و (2) نجد :

$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

إذن f تطبيق خطي

الرقم السري

حل التمرين 02 :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

وتحقق $f(0,1)=(1,4)$ و $f(1,2)=(2,3)$

① إثبات أنه يوجد تطبيق خطي وحيد يحقق الشروط السابقة.

ملاحظة: لإثبات وحدانية f يكفي إثبات أن صورة أساس مجموعة البدء هي أساس لمجموعة الوصول

① إثبات أن $(0,1)$ و $(1,2)$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$

ⓐ الاستقلال الخطي:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ و $\forall \beta \in \mathbb{R} : \alpha(0,1) + \beta(1,2) = (0,0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = 0}$$

إذن $(0,1)$ و $(1,2)$ مستقلان خطيا.

ⓑ وبما أن:

$\dim \mathbb{R}^2 = 2 =$ عدد الأشعة المستقلة

إذن فهي الأشعة تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^2$

أي $(0,1)$ و $(1,2)$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$ «مجموعة البدء»

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن $(2,3)$ و $(1,4)$ أساس لـ $\mathbb{R}^2$ «مجموعة الوصول»

ومنه: صورة أساس مجموعة البدء بواسطة f هي أساس لمجموعة الوصول

ومنه f تطبيق خطي وحيد حيث

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(1,2) = (2,3)$ $\qquad f(0,1) = (1,4)$

الرقم التسلسلي

تمرين

إيجاد صيغة f :

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ فهو من الشكل:

$$f(x,y)=(\alpha x+\beta y\,,\,\lambda x+\gamma y)$$

حيث ، $\alpha\in\mathbb{R}\,,\ \beta\in\mathbb{R}\,,\ \lambda\in\mathbb{R}\,,\ \gamma\in\mathbb{R}$

لدينا :

$$f(1,2)=(\alpha+2\beta\,,\,\lambda+2\gamma)=(2,3)$$

$$f(0,1)=(\beta\,,\,\gamma)=(1,4)$$

ومنه ،

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=2\\ \lambda+2\gamma=3\\ \beta=1\\ \gamma=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \lambda=-5\\ \beta=1\\ \gamma=4\end{cases}$$

إذن :

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\longrightarrow f(x,y)=(y\,,\,-5x+4y)$$

حساب $f(5,6)$:

$$f(5,6)=(6\,,\,-5\times5+4\times6)=(6\,,\,-1)$$

حساب $f^{-1}(-2,7)$:

$$f^{-1}(2,7)=(x,y)\Rightarrow f(x,y)=(-2,7)$$

$$\Rightarrow(y\,,\,-5x+4y)=(-2,7)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=-2\\ -5x+4y=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-2\\ x=-3\end{cases}$$

$$f^{-1}(-2,7)=(-2,3)$$

الرقم السري

حل التمرين 05:

لنذكر:

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا خطيا

نواة f: $\ker f = \{X \in E \mid f(X) = 0_F\} \subset E$.

$\operatorname{Im} f = \{Y \in F \mid \exists X \in E : f(X) = Y\} \subset F$.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ y + z,\ x + y - 2z)$$

① إيجاد قاعدة صورة f «$\operatorname{Im} f$»

$$\operatorname{Im} f = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = f(x, y, z)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$= \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = (x + 2y - z,\ y + z,\ x + y - 2z)\}$$

$$= \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = (x, 0, x) + (2y, y, y) + (-z, z, -2z)\}$$

$$= \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = x(1, 0, 1) + y(2, 1, 1) + z(-1, 1, -2)\}$$

$$= \langle \underset{u}{(1, 0, 1)}, \underset{v}{(2, 1, 1)}, \underset{w}{(-1, 1, -2)} \rangle$$

أي الأشعة u و v و w تولد $\operatorname{Im} f$

دراسة الاستقلال الخطي

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall \gamma \in \mathbb{R}$:

$\alpha(1, 0, 1) + \beta(2, 1, 1) + \gamma(-1, 1, -2) = (0, 0, 0)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 & \Rightarrow \alpha = +3\gamma \\ \beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \beta = -\gamma \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = +3\gamma \\ \beta = -\gamma \\ +3\gamma - \gamma - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3\gamma,\ \beta = -\gamma$$

$\Rightarrow 0 = 0$ محققة

ومنه الأشعة u و v و w مرتبطة خطيا

وبالتالي نأخذ الأشعة مثنى مثنى

دراسة الاستقلال الخطي لـ u و v

⑥

الرقم السري

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ و $\forall \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha(1,0,1)+\beta(2,1,1)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ \beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

إذن الأشعة u و v مستقلان خطيا
وبما أن u و v تولدان Imf فإن
u و v تشكلان أساس لـ Imf

$\dim Imf = 2 =$ عدد الأشعة التي تشكل أساس لـ Imf

k إيجاد ker f نواة f

$$\ker f=\{(x,y,z)\in \underset{E}{\mathbb{R}^3} : f(x,y,z)=0_{\underset{F}{\mathbb{R}^3}}\}.$$

لدينا : $f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f(x,y,z)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow (x+2y-z, y+z, x+y-2z)=(0,0,0).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \Rightarrow x=3z \\ y+z=0 \Rightarrow y=-z \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3z \\ y=-z \\ 3z-z-2z=0 \Rightarrow 0=0 \text{ محققة} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3z \\ y=-z \end{cases}, z\in\mathbb{R}.$$

وبالتالي $\ker f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)=(3z,-z,z)\}$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)=z(3,-1,1)\}.$$

$$=\langle \underset{u}{(3,-1,1)}\rangle$$

أي u يولد ker f
فهو يشكل أساس لـ ker f

$\dim \ker f = 1 =$ عدد أشعة أساس ker f

⑦

الرقم السري

حل تمرين 08:

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (2x, y+z)$.

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longrightarrow g(x,y,z) = (x-z, y)$

1/ إيجاد $(f+g)(V)$

$*\ (f+g)(V) = f(V) + g(V)$

$= f(x,y,z) + g(x,y,z) \quad / V = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$= (2x, y+z) + (x-z, y)$.

$= (3x - z, 2y + z)$.

$(f+g)(2,3,4) = (3\times2 - 4, 2\times3 + 4) = (2, 10)$

2/ $(3f)(V)$

$(3f)(V) = 3f(V)$

$= 3f(x,y,z) = 3(2x, y+z)$

$= (6x, 3y + 3z)$

$(3f)(V) = (3f)(2,3,4) = (6\times2, 3\times3 + 3\times4)$

$= (12, 21)$.

$(2f - 5g)(W) = 2f(W) - 5g(W) \quad / W = (5,1,3)$

$= 2f(5,1,3) - 5g(5,1,3)$

$= 2(10,4) - 5(2,1) = (10,3)$

الرقم السري

حل تمرين 09

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x,y,z) \rightarrow f(x,y,z) = (x+z, x-y, z+y, x+y+2z)$

قاعدة: ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيق خطي.

نواة f: $\ker f = \{ x \in E : f(x) = 0_F \} \subset E$

صورة f: $\operatorname{Im} f = \{ Y \in F \mid \exists X \in E : f(X) = Y \} \subset F$

1) إيجاد $\ker f$:

$\ker f = \{ (x,y,z) \in \underset{E}{\mathbb{R}^3} : f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^4 = F} \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0,0) \}$

لدينا: $f(x,y,z) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow (x+z, x-y, z+y, x+y+2z) = (0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x-y=0 \\ z+y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ x=y \\ z=-y \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y=-z \\ -z-z-2z=0 \Rightarrow 0=0 \end{cases}$$ محققة

ومنه: $x=y=-z$

إذن:

$\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (-z,-z,z) \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = z(-1,-1,1) \}$

ومنه: $\ker f = \langle(-1,-1,1)\rangle$ مولد بـ $(-1,-1,1)$ = مولد

إذن: $(-1,-1,1)$ هو أساس لـ $\ker f$.

$\Rightarrow \dim \ker f = 1$.

وبما أن $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$ إذن f ليس متباين.

قاعدة: ليكن $f: E \to F$ تطبيق خطي،
إذا كان $\ker f = \{0_E\}$ فإن f متباين.

$$\operatorname{Im} f = \{(x',y',z',t') \in \underbrace{\mathbb{R}^4}_{F} : \exists (x,y,z) \in \underbrace{\mathbb{R}^3}_{E}$$
$$(x',y',z',t') = f(x,y,z)\}$$

$$= \{(x',y',z',t') / (x',y',z',t') = (x+z, x-y, z+y, x+y+2z)\}$$

$$= \{(x',y',z',t') = (x,x,0,x) + (0,-y,y,y) +$$
$$(z,0,z,2z)\}.$$

$$= \{(x',y',z') = x\underbrace{(1,1,0,1)}_{u} + y\underbrace{(0,-1,1,1)}_{v} +$$
$$z\underbrace{(1,0,1,2)}_{w}\}.$$

$= \langle u, v, w \rangle$ (لأن u و v و w تولد $\operatorname{Im} f$)

دراسة الاستقلال الخطي:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(1,1,0,1) + \beta(0,-1,1,1) + \gamma(1,0,1,2) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

ومنه الأشعة u و v و w مستقلة خطيا

وبما أنها تولد Imf فهي أساس لـ Imf.

إذن: عدد أشعة الأساس $3 = \dim(Imf)$

ومنه f ليس غامر لأن: $\dim Imf = 3$

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 \neq \dim Imf.$$

قاعدة: يكون f غامرا إذا كان $\dim F = \dim Imf$

الرقم السري