الرقم السري

حل تمرين 10:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$

إيجاد نواة f ← ker f

① $\ker f = \{ X \in \mathbb{R}^2 : f(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$.

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0,0) \}$

لدينا : $f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (x+y, x-y, x+y) = (0,0,0)$.

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

ومنه ، $\ker f = \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$

بما أن : $\ker f = \{(0,0)\}$ فإن f متباين

صورة f

② $\mathrm{Im} f = \{ Y \in F \,/\, \exists X \in E : Y = f(X) \}$.

$= \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x',y',z') = f(x,y) \}$

$= \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z') = (x+y, x-y, x+y) \}$

$= \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z') = (x,x,x) + (y,-y,y) \}$

$= \{ (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : (x',y',z') = x(1,1,1) + y(1,-1,1) \}$

$= \langle \overset{u}{(1,1,1)}, \overset{v}{(1,-1,1)} \rangle \longrightarrow$ أي u و V تولد Im f

دراسة الاستقلال الخطي لـ u و V

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha u + \beta u = (0,0,0) \Rightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,1) = (0,0,0)$

الرقم السري

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

أي أن u و v مستقلين خطيا.

بما أن u و v تولدان Imf و مستقلين خطيا
فهما أساس لـ Imf

$$\dim Imf = \boxed{2} \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

إذن f ليس غامر.

الرقم السري

حل تمرين 11: $B=\{e_1=(1,0,0)\,,\ e_2=(0,1,0)\,,\ e_3=(0,0,1)\}$

أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(e_1)=-2e_1+2e_3\ ,\quad f(e_2)=3e_2$$

1/ تعيين f :

بما أن e_1 و e_2 و e_3 أساس قانوني لـ $\mathbb{R}^3$ فإن

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)=x e_1+y e_2+z e_3$$

$$\Rightarrow f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)$$

$$= x f(e_1)+y f(e_2)+z f(e_3)$$ (من خواص التطبيق الخطي f)

$$= x[-2e_1+2e_3]+y(3e_2)+z(-4e_1+4e_3)$$

$$= x[-2(1,0,0)+2(0,0,1)]+y(3(0,1,0))+z(-4(1,0,0)+4(0,0,1))$$

$$= (-2x,0,2x)+(0,3y,0)+(-4z,0,4z)$$

$$= (-2x-4z,\ 3y,\ 2x+4z)$$

إذن،

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)=(-2x-4z,\ 3y,\ 2x+4z)$$

2/ إيجاد نواة f :

$$\ker f=\{X\in E\ ,\ f(X)=0_F\}$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\ ,\ f(x,y,z)=(0,0,0)\}$$

لدينا :

الرقم السري

$f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2z \end{cases}$$

ومنه: $\ker f = \{(x,y,z) = (-2z, 0, z)\}$

$= \{(x,y,z) = z(-2,0,1)\}$

$= \{(x,y,z) = z(-2,0,1)\}$

$= \langle \underbrace{(-2,0,1)}_{u} \rangle$ أي $\ker f$ مولد بـ u

و منه u هو أساس لـ $\ker f$

إذن:

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = z(-2,0,1)\}$.

$\Leftarrow \dim \ker f = 1$ ومنه f ليس متباين.

قاعدة: $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\dim \ker f = 1 \Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Im} f = 2}$

ولكي يكون f غامر يجب أن يكون:

$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = \dim F$

ولكن $\dim \operatorname{Im} f = 2 \neq \dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

أي f ليس غامر

إيجاد صورة f : $\operatorname{Im} f$

$Imf = \{ y \in F / \exists x \in E : y = f(x) \}$

$Imf = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = f(x, y, z) \}$

$= \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z) \}$

$= \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = (-2x, 0, 2x) + (0, 3y, 0) + (-4z, 0, 4z) \}.$

$= \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 : (x', y', z') = x(-2, 0, 2) + y(0, 3, 0) + z(-4, 0, 4) \}$

$= \langle \underbrace{(-2, 0, 2)}_{u}, \underbrace{(0, 3, 0)}_{v}, \underbrace{(-4, 0, 4)}_{w} \rangle$

أي
u و v و w تولد Imf :

علما أن : $\dim Imf = 2$ ⟸ u و v و w مرتبطة خطيا

أي عدد الأشعة المشكلة للأساس هي 2

~~نلاحظ~~

نلاحظ : أن $w = 2(\overset{u}{-2, 0, 2}) = 2u$

أي : u و w مرتبطين خطيا

وبالتالي يمكن أخذ : u و v كأساس لـ Imf

ومنه أساس Imf هو : $(-2, 0, 2)$ و $(0, 3, 0)$

* رتبة f ($rg f$) = عدد أشعة أساس Imf = $rg f$

$$\Rightarrow \boxed{rg f = \dim Imf = 2}$$