حل السلسلة الخامسة :نظرية الإنتاج

✓ حل التمرين 01 :

1 / كتابة معادلة دالة الإنتاج :

بما أنه يوجد عنصر إنتاجي واحد فقط متغير و هو عدد العمال "L" و باقي العناصر ثابتة فإننا بصدد الفترة القصيرة للإنتاج و بالتالي فإن دالة الإنتاج تكون بالشكل التالي :

$$Q = \int (L, K'), K \quad \text{ثابت}$$

2 / إكمال الجدول و إيجاد كل من :ApL ؛ MpL:

$$ApL = \frac{Q}{L}, \quad MpL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Q	4	9	18	30	47	67	86	99	110	119	126	119	110
ApL	4	4.5	6	7.5	9.4	11.16	12.28	12.38	12.22	11.9	11.45	9.91	8.46
MpL	—	5	9	12	17	20	19	13	11	9	7	-7	-9

3 / التمثيل البياني لكل من الإنتاج الكلي "Q" و الحدي "MpL" و المتوسط "ApL " :

4 / تحليل المراحل الثلاثة للإنتاج :

المرحلة I : مرحلة التزايد بمعدل متزايد : $L = 0 \longrightarrow MpL = ApL$

$$<=> L = 0 \longrightarrow L = 8$$

و تمثل مرحلة تزايد الإنتاج الحدي تماما (من نقطة الأصل إلى أن يصل الإنتاج الحدي إلى أعظم قيمة له ($L = 6$ $(L = 0$)

و القانون السائد في هذه المرحلة هو قانون تزايد الغلة .

المرحلة II : مرحلة التزايد بمعدل متناقص $MpL = 0$ و $ApL = MpL$

$$L = 8 \longrightarrow L = 11$$

و تمثل مرحلة تناقص الإنتاج الحدي في المجال الموجب (من أعظم قيمته لـ MpL إلى أن ينعدم ($L = 11$ $L = 6$) و القانون السائد في هذه المرحلة هو قانون تناقص الغلة و هو قانون يعبر عن تناقص الإنتاج الحدي MpL في المجال الموجب و هو قانون خاص بالفترة القصيرة .

المرحلة III : مرحلة التناقص التام: $ApL = 0 \longrightarrow \infty$

$$L = 11 \longrightarrow \infty$$

و تمثل دالة تناقص الإنتاج الكلي عندما يكون الإنتاج الحدي في حالة تناقص في المجال السالب و القانون السائد هو قانون تناقص الغلة في المجال السالب .

5/ شرح قانون تناقص الغلة :

هو قانون خاص بالفترة القصيرة ثابت $Q = Y(L, K'), K$

و هو قانون مرتبط بحالة منحنى الإنتاج الحدي "MpL" الذي يكون في حالة تناقص في المجال الموجب و يبدأ من أعظم قيمة لـ :MpL إلى انعدامه و يختار هذا القانون لأن المنتج يختار فيه قراراته الإنتاجية في المنطقة المفصلة اقتصادي « المرحلة الثانية » .

- ملاحظة :

هناك قانونين آخرين يوجد في الفترة القصيرة و هما :

- قانون تزايد الغلة : و عموما تكون في المرحلة 1 من مراحل الإنتاج .

قانون تناقص الغلة السالبة : و عموما تكون في المرحلة 3 من مراحل الإنتاج و لكن لا يستطيع المنتج اتخاذ قراراته الإنتاجية .

✓حل التمرين 02 :

1 / تحديد تابع الإنتاجية الحدية للعمل MpL :

$$ApL = 30 + 12L - L^2$$

لدينا : $ApL = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = ApL \cdot L$

و منه $Q = 30L + 12L^2 - L^3$

$$\boxed{Q = 30L + 12L^2 - L^3}$$

و لدينا كذلك $MpL = \partial Q / \partial L$

و منه $\boxed{L = 30 + 24\,L - 3\,L}$

2 / تحديد عدد مناصب العمل الموفرة في حدود المنطقة I و II :

في المنطقة I و II لدينا : $MpL = ApL$

$$30 + 24L - 3L^2 = 30 + 12\,L - L^2$$

$$24L - 3L^2 - 12L + L^2 = 0$$

$$12L - 2L^2 = 0$$

$$2L(6L - L) = 0$$

⇨

$$\begin{cases} 2L = 0 \\ 6 - L = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} L = 0 \text{ مرفوض} \\ L = 6 \text{ مقبول} \end{cases}$$

إذن عدد مناصب العمل في المنطقة I و II هو 6 .

3 / عدد مناصب العمل في حدود المنطقة I و III :

في حدود المنطقة I و III لدينا : : MpL = 0

$$30 + 24L - 3L^2 = 0$$

$$-3L^2 + 24L + 30 = 0$$

بما أن المعادلة من الدرجة الثانية نحسب المميز :

$$\Delta = B^2 - 4A.C$$

$$\Delta = (24)^2 - 4(-3)(30) = 936 \,, \sqrt{\Delta} = 30{,}59$$

$$L_1 = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-24 - 30{,}59}{-6} = 9{,}09$$ مقبول

$$L_2 = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-24 + 30{,}59}{-6} = -1{,}09$$ مرفوض

إذن عدد مناصب العمل في المنطقة I و II هو 9 مناصب .

3 / المنطقة المفضلة اقتصاديا :

هي المنطقة II نظرا لأن MPL و APL موجبين رغم تناقصهما :

خصائص المنطقة I : عدد العمال قليل و رأس المال كبير و بالتالي MPL كبير و MPK قليل .

خصائص المنطقة III : عدد العمال كبير و رأس المال قليل و بالتالي MPL قليل و MPK كبير .

خصائص المنطقة II : تكون فيها إنتاجية رأس المال و العمل موجبان و متناقصان في المجال الموجب و هذا فإن المنتج تتركز قراراته الرشيدة في المرحلة و هي المنطقة المفضلة اقتصاديا .

✓حل التمرين 03 :

1 / إيجاد $TMST_{L,K}$ بين النقط المتعاقبة في حدود المدى لكل منحنى :

- بما أنه يوجد عنصرين متغيرين "L,K" فإننا بصدد الفترة الطويلة و بذلك تكون دالة الإنتاج من الشكل :

$$Q = f(L,K)$$

و لدينا المعدل الحدي له خلال التقى عند نقطة التوازن :

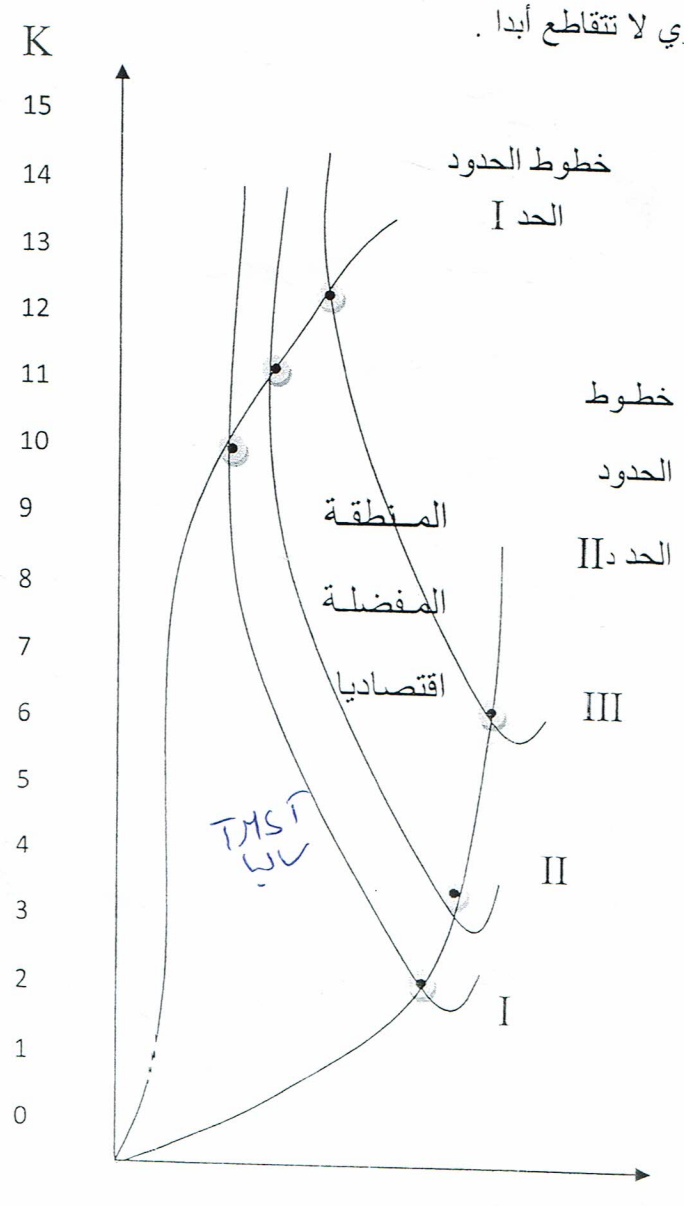
$$TMST_{\lambda K} = \frac{MPL}{MPK} = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{SK}{SL}$$

2 / رسم هذه المنحنيات و تبيين خطوط الحدود و مناطق الإنتاج و تحديد المنطقة المفضلة اقتصاديا :

I			II			III		
L	K	$TMST_{\lambda K}$	L	K	$TMST_{\lambda K}$	L	K	$TMST_{\lambda K}$
3	14	—	4	14	—	5.5	15	—
2	10	−4	3	11	−3	5	12	−6 +
3	6	4	4	8	3	5.5	9	6
4	4.5	1.5	5	6.3	1.7	6	8.3	1,2
5	3.5	1	6	5	1.3	7	7	1,3
6	3	0.5	7	4.4	0.6	8	6	1
7	2.7	0.3	8	4	0.4	9	5.6	0,4
8	3	−0.3	9	4.4	−0,4	10	5	−0,4

المنطقة المفضلة اقتصاديا : هي التي يكون فيها $TMST_{\lambda K}$ موجب و يمكن القول أن من خصائص هذه المنحنيات :

- ميلها سالب لهذا يجلسه ظاهرة الإحلال و هذا في المنطقة الاقتصادية .
- محدبة باتجاه نقطة الأصل و هي الحالة الوحيدة التي يكون فيها المعدل الحدي للإحلال التقنى متناقص .
- منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع أبدا .



3/ المقارنة نظريا بين الإنتاج في الفترة القصيرة والإنتاج في الفترة الطويلة:

الإنتاج في الفترة القصيرة	الإنتاج في الفترة الطويلة
دالة الإنتاج بعامل إنتاجي واحد متغير وباقي العوامل ثابتة	دالة الإنتاج بعدة عوامل متغيرة
القانون السائد قانون الغلة المتناقصة	القانون السائد قانون غلة الحجم
المنطقة الإقتصادية هي المرحلة الثانية حيث الإنتاج الحدي للعمل ولراس المال موجبين رغم تناقصهما	المنطقة المفضلة إقتصاديا هي المنطقة التي يكون فيها المعدل الحدي للإحلال التقني سالبا (ظاهرة الإحلال),

✓حل التمرين 04 :

$$Q = \frac{1}{2} L^{\alpha} K^{B} T^{\delta}$$

1 / الشرط الواجب توفره لكي تصبح هذه الدالة : دالة كوب دوغلاس :

$$Q = \int (L,K) = b \cdot L^{\alpha} K^{B} \cdot T^{\delta} \quad K^{B}$$ بما أن الدالة من الشكل

يجب توفر شرط و هو $\alpha, B, \delta > 0$ حتى تكون كوب دوغلاس .

حيث $\alpha + B + \delta = 1$ ثابتة / $\alpha + B + \delta > 1$ متزايدة / $\alpha + B + \delta < 1$ متناقصة

.

2 / استنتاج دوال الإنتاجية المتوسطة و الإنتاجية الحدية لـ (L,K) :

الإنتاجية المتوسطة

$$ApL_L = \frac{Q}{L} = \frac{L^{\alpha} K^{B} \cdot T^{\delta}}{2L} = \frac{1}{2} L^{\alpha-1} K^{B} \cdot T^{\delta}$$

لـ L,K

$$ApL_K = \frac{Q}{K} = \frac{L^{\alpha} K^{B} \cdot T^{\delta}}{2K} = \frac{1}{2} L^{\alpha} K^{B-1} \cdot T^{\delta}$$

الإنتاجية الحدية لـ L, K

$$MpL_L = \frac{SQ}{L} = \frac{\alpha}{2L} = L^{\alpha-1} K^{B} \cdot T^{\delta}$$

$$MpL_K = \frac{SQ}{K} = \frac{B}{2} L^{\alpha} K^{B-1} \cdot T^{\delta}$$

3 / المعدل الحدى للإحلال التقنى $TMST_{L,K}$:

$$TMST_{L,K} = \frac{MpL}{MpK} = \frac{\frac{\alpha}{2} L^{\alpha-1} K^{B} .T^{\delta}}{\frac{B}{2} L^{\alpha} K^{B-1} .T^{\delta}} = \frac{\alpha K}{BL}$$

$$\boxed{TMST_{L,K} = \frac{\alpha K}{BL}}$$

4 / حساب مرونة كل عنصر من عناصر الإنتاج و مرونة الإنتاج الكلية :

لدينا مرونة الإنتاج الكلية : E = EL + EK + ET

$$EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}.\frac{L}{Q} = \frac{MPL_L}{APL_L} = \frac{\frac{\alpha}{2} L^{\alpha-1} K^{B} .T^{\delta}}{\frac{1}{2} L^{\alpha-1} K^{B} .T^{\delta}} = \alpha = 0,4$$

$$EM = \frac{\Delta Q}{\Delta K}.\frac{K}{Q} = \frac{MPL_K}{APL_K} = \frac{\frac{B}{2} L^{\alpha} K^{B-1} .T^{\delta}}{\frac{1}{2} L^{\alpha} K^{B-1} .T^{\delta}} = \beta = 0,4$$

$$ET = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.\frac{T}{Q} = \frac{MPL_T}{APL_T} = \frac{\frac{T}{2} L^{\alpha} K^{B} .T^{\delta-1}}{\frac{1}{2} L^{\alpha} K^{B} .T^{\delta-1}} = \delta = 0,2$$

$$\alpha + \beta + \delta = 0,4 + 0,4 + 0,2 = 1$$

مرونة الإنتاج الكلية 1

$$\boxed{e = 1}$$

5 / حساب حجم الإنتاج : الذي تعطيه التوليفة T = 2، L = 100 ، K = 200

$\alpha = 0,4$ $\beta = 0,4$ $\delta = 0,2$

$$Q = \frac{1}{2} L^{\alpha} K^{B} .T^{\delta} = \frac{1}{2} (100)^{0,4} (200)^{0,4} (2)^{0,2} = 30,17$$

6 / حساب الزيادة و النقصان في Q حيث :

نقصان رأس المال 5% $\frac{\Delta K}{K}$ ، زيادة العمل 10 % $\frac{\Delta L}{L}$

لدينا: $EL = \frac{\Delta Q}{\Delta L} . \frac{L}{Q} \longrightarrow EL = \frac{\Delta Q}{QL} . \frac{L}{\Delta L} \longrightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta L} = EL . \frac{\Delta L}{L}$ $= 0,4\ (0,05)$

$EK = \frac{\Delta Q}{\Delta K} . \frac{K}{Q} \longrightarrow EK = \frac{\Delta Q}{QK} . \frac{K}{\Delta K} \longrightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta K} = EK . \frac{\Delta K}{K}$ $= 0,4\ (0,1)$

$0,02 + 0,04$