الفهرس

الفصل الأوّل

نظريات المجموعات

1.1 المجموعات

1.1.1. تعاريف

سنحاول أن نرى خصائص المجموعات ، دون التركيز على مثال معين. سوف نجد بسرعة أن العلاقات بين المجموعات لا تقل أهمية عن المجموعات في حد ذاتها و سيكون هذا هو مفهوم التطبيق (أو الدالة) بين مجموعتين.

تعريف 1.1.1 : المجموعة هي جملة من العناصر أو الأفراد تربطهم خواص مشتركة

مثال 1 :

$$\{0,1\};\quad \{\text{أحمر،أزرق}\};\quad \{0,1,2,3,\ldots\}=\mathbb{N}$$

تسميات 1 : .

1) نسمي مجموعة خالية نرمز لها بالرمز $\varnothing$ كل مجموعة لا تحتوي على أي عنصر.

2) نقول أن x عنصر من المجموعة E و نكتب $x \in E$ ، نفي هذه القضية أن العنصر x لا ينتمي للمجموعة E و نكتب $x \notin E$.

3) هناك طرق أخرى لتكوين مجموعة هي تجميع عناصر معينة تربطهم خاصية مميزة

مثال 2 :

$$\{x \in \mathbb{R}, \ \ |x-2| < 3\}$$

$$\left\{z \in \mathbb{C}, \ \ z^2 = 1\right\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}, \ \ -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$$

2.1.1. الخاصية المميزة للمجموعة

تعريف 2.1.1 : تكون عناصر المجموعة مختلفة أي لا يوجد تكرار في عناصرها وقد تكون منتهية كما قد تكون غير منتهية.

مثال 3 : .

1) مجموعة نقاط المستوي
2) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$
3) المجموعة E المعرفة كما يلي

$$E = \{e \in \mathbb{N}, \ \ 0 \leq e \leq 20\}$$

3.1.1. المجموعة الجزئية

تعريف 3.1.1 : نسمي مجموعة جزئية من المجموعة E كل مجموعة A جميع عناصرها تنتمي الى المجموعة E، ونكتب

$$\boxed{A \subset E \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in E.}$$

حيث تتحقق لنا الخواص التالية

1) $\phi \subset E.$
2) $E \subset E.$

إنطلاقا من المجموعة E نستطيع تكوين مجموعة جديدة عناصرها هي جميع المجموعات الجزئية للمجموعة ونرمز لها بالرمز $\mathscr{P}(E)$.

مثال 4 : لتكن المجموعة

$$E = \{1, 2, 3\},$$

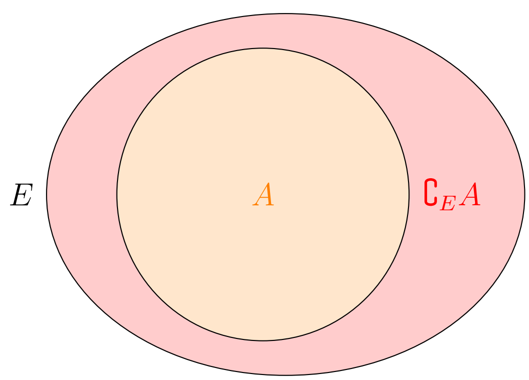
فإن مجموعة أجزاء هذه المجموعة هي

$$\mathscr{P}(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3.$$

4.1.1. متممة مجموعة

تعريف 4.1.1 : لتكن المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة E، نسمي متممة المجموعة A في المجموعة E التي نرمز لها بالرمز $E \setminus A$ أو $\complement_E A$ ونكتب

$$\boxed{\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.}$$



مثال 5 : لتكن المجموعة E و A حيث

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A = \{2, 3\}$$

ومنه متممة المجموعة A فبالمجموعة E هي

$$\overline{A} = \{1, 4, 5\},$$

5.1.1. فرق مجموعتين

تعريف 5.1.1 : لتكن المجموعة A و B مجموعتان جزئيتان من المجموعة E، نعرف فرق المجموعتين A و B الذي نرمز له بالرمز A/B أو $A-B$ ونكتب

$$\boxed{A/B = A - B = \{x \in A \text{ و } x \notin B\}.}$$

مثال 6 : لتكن المجموعة E و A حيث

$$E = \{1,2,3,4,5\}, \quad A = \{1,2,3\}, \quad B = \{3,4,5\}$$

ومنه

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in A \text{ و } x \notin B\}, \\ &= \{1,2\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} B - A &= \{x \in B \text{ و } x \notin A\}, \\ &= \{4,5\} \end{aligned}$$

نلاحظ أن الفرق بين المجموعات ليس تبديلي

6.1.1. الفرق التناظري

تعريف 6.1.1 : لتكن المجموعة A و B مجموعتان جزئيتان من المجموعة E، نعرف الفرق التناظري للمجموعتين A و B الذي نرمز له بالرمز $A\Delta B$ ونكتب

$$\boxed{A\Delta B = (A-B) \cup (B-A).}$$

مثال 7 : لتكن المجموعة E و A من المثال السابق ومنه

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A-B) \cup (B-A) \\ &= \{1,2\} \cup \{4,5\} \\ &= \{1,2,4,5\} \end{aligned}$$

نلاحظ أن الفرق التناظري بين المجموعات تبديلي.

نظرية 1.1.1 : لتكن المجموعة A و B **مجموعتان جزئيتان من المجموعة** E، **فإن الفرق التناظري** يمكن حسابه أيضا بالعلاقة التالية:

$$\boxed{A\Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)\,.}$$

7.1.1. العمليات على المجموعات

الإتحاد و التقاطع

تعريف 7.1.1 : لتكن المجموعة E و F مجموعتان.

1) نرمز لإتحاد المجموعتين E و F بالرمز $E \cup F$ ونكتب

$$\boxed{E \cup F = \{x : x \in E \vee x \in F\}\,.}$$

يسمى الرمز $\vee$ بالفصل المنطقي و يقرأ (أو).

2) نرمز لتقاطع المجموعتين E و F بالرمز $E \cap F$ ونكتب

$$\boxed{E \cap F = \{x : x \in E \wedge x \in F\}\,.}$$

يسمى الرمز $\wedge$ بالوصل المنطقي و يقرأ (و).

3) يمكن تعميم هذان التعريفان في حالة أكثر من مجموعتين و نرمز لتقاطع و اتحاد جملة من المجموعات E_i بالرمز $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ و $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ على الترتيب.

خـــــواص

لتكن المجموعة A و B و C ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة E، لدينا الخواص التالية.

1) الخاصية التبديلية

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2) الخاصية التجميعية

- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$
- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

3) الخاصية التوزيعية

- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

4) خاصية المتمم

- $\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$
- $\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$
- $\complement(\complement A)=A$
- $\complement A\cap A=\phi$
- $\complement A\cup A=E$

الجداء الديكارتي

تعريف 8.1.1 : الجداء الديكارتي هو اسم يطلق في الرياضيات لجداء مجموعتين E و F، ويرمز له بالرمز $F\times E$، أي مجموعة الأزواج المرتبة التي ينتمي عنصرها الأول إلى المجموعة E وينتمي عنصرها الثاني إلى المجموعة F. سمي كذلك نسبة إلى رينيه ديكارت الذي قام بتأسيس الهندسة التحليلية مطلقا هذا المفهوم من جداء المجموعات و نكتب

$$\boxed{E\times F=\{(x,y):x\in E\wedge y\in F\}.}$$

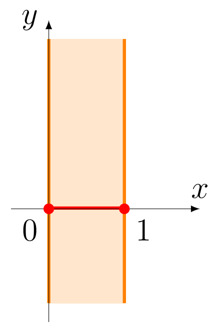
يمكن تعميم الجداء الديكارتي لأكثر من مجموعتين أو لجملة من المجموعات نرمز له عندها بالرمز $\prod_{i=1}^{n}E_i$ و نكتب

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n}E_i=\{(x_1,...,x_n):x_i\in E_i,i=1,...,n\}.}$$

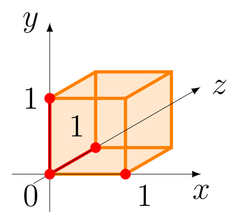
مثال 8 : لدينا الأمثلة التالية

1) المستوي $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

2) $[0,1]\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$



3) $[0,1]\times[0,1]\times[0,1] = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x,y,z \leq 1\}$



خــــواص

لتكن المجموعة A و B و C ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة E، لدينا الخواص التالية.

1) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$

2) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$

8.1.1. تجزئة مجموعة

تعريف 9.1.1 : لتكن E مجموعة كيفية غير خالية و لتكن $E_1, ..., E_n$ مجموعات جزئية من E نقول أن $E_1, ..., E_n$ تشكل تجزئة للمجموعة E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية

1) $\forall i \in \{1, ..., n\} : E_i \neq \phi$

2) $\forall i \neq j : E_i \cap E_j = \phi$

3) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$

9.1.1. أصلي مجموعة منتهية

تعريف 10.1.1 : إذا كانت E مجموعة منتهية عدد عناصرها $n \in \mathbb{N}$. نسمي العدد n بأصلي المجموعة E و نكتب

$$Card(E) = n$$

مثال 9 : لتكن المجموعة

$$E = \{1, 2, 3, 6, 9, 11\},$$

فإن أصلي المجموعة E هو

$$Card(E) = 6.$$

خـــــواص

1) $Card(\phi) = 0.$

2) $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

نظرية 2.1.1 : إذا كانت المجموعة E مجموعة منتهية عدد عناصرها $n \in \mathbb{N}$. فإن عدد عناصر مجموعة أجزائها $\mathscr{P}(E)$ هو

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)} = 2^n.$$

مثال 10 : لتكن المجموعة

$$E = \{1, 2, 3\},$$

فإن

$$\mathscr{P}(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3.$$

نلاحظ جيدا أن

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)} = 2^3 = 8.$$

2.1 العلاقـــات

نسمي العلاقة الثنائية : التعبير عن العلاقة بين الأزواج أو أفراد هذه الثنائية المرتبة.

1.2.1. تعريف العلاقة

تعريف 1.2.1 : لتكن A و B مجموعتين، نعرف العلاقة الثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B بأنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لـ A و B و نرمز لها غالبا بالرمز $(\mathscr{R})$، من أجل كل ثنائية (x, y) نكتب

(1) $(x\mathscr{R}y)$ إذا كان x على علاقة مع y

(2) $(x\not{\mathscr{R}}y)$ إذا كان x ليس على علاقة مع y

العلاقة على مجموعة

تعريف 2.2.1 : لتكن A و B مجموعتين، إذا كانت $(\mathscr{R})$ علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإننا نسمي المجموعة A بساحة العلاقة ونسمي مجموعة الثنائيات من المجموعة الجزئية للجداء الديكارتي لـ A و B و التي تحقق العلاقة بمدى العلاقة.

العلاقة العكسية

تعريف 3.2.1 : لتكن $(\mathscr{R})$ العلاقة المعرفة من المجموعة A نحوالمجموعة B فإننا نعرف معكوس $(\mathscr{R})$ أو العلاقة العكسية ونرمز لها بالرمز $(\mathscr{R}^{-1})$ ونعرف على أنها علاقة من المجموعة B نحوالمجموعة A.

مثال 1 : أوجد معكوس العلاقة

$$\mathscr{R} = \{(1, y), (1, z), (3, x)\}$$

من المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ نحو المجموعة $B = \{x, y, z\}$. العلاقة المعكوسة هي

$$\begin{aligned} \mathscr{R}^{-1} \quad &: \quad B \longrightarrow A \\ &= \quad \{(y, 1), (z, 1), (x, 3)\} \end{aligned}$$

2.2.1. خواص العلاقات

الخاصية الإنعكاسية

لتكن E مجموعة كيفية و لتكن الثنائية (x,y) حيث: $x \in E$ و $y \in E$، ولتكن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة معرفة في المجموعة E. نعرف الخواص التالية

تعريف 4.2.1 : نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة إنعكاسية إذا تحقق الشرط

$$\boxed{\forall x \in E : x\mathscr{R}x.}$$

الخاصية التناظرية

تعريف 5.2.1 : نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة تناظرية إذا تحقق الشرط

$$\boxed{\forall (x,y) \in E \times E : x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x.}$$

الخاصية ضد التناظرية

تعريف 6.2.1 : نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة ضد تناظرية إذا تحقق الشرط

$$\boxed{\forall (x,y) \in E \times E : (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x) \Longrightarrow x = y.}$$

الخاصية المتعدية

تعريف 7.2.1 : و نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة متعدية إذا تحقق الشرط

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in E \times E \times E : (x\mathscr{R}y \vee y\mathscr{R}z) \Longrightarrow x\mathscr{R}z.}$$

3.2.1. علاقة التكافؤ

نعرف الآن علاقتين أساسيتين هما علاقة التكافؤ وعلاقت الترتيب

تعريف 8.2.1 : نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة تكافؤ إذا تحقق ما يلي

(1) $(\mathscr{R})$ علاقة إنعكاسية

(2) $(\mathscr{R})$ علاقة تناظرية

(3) $(\mathscr{R})$ علاقة متعدية

الفكرة العامة وراء علاقة التكافؤ أنها تصنف العناصر المتشابهة بشكل ما.

تعريف 9.2.1 : في الرياضيات علاقة التكافؤ هي علاقة تقسم مجموعة ما إلى عدد من المجموعات الجزئية حيث يصبح كل عنصر من المجموعة الأصلية عنصرا من مجموعة جزئية واحدة، بالتحديد يعتبر عنصران من المجموعة متكافئين إذا وفقط إذا انتميا إلى نفس المجموعة الجزئية.

مثال 2 : .

(1) علاقة $(=)$ على أي مجموعة هي علاقة تكافؤ.

(2) علاقة التوازي على مجموعة المستقيمات هي علاقة تكافؤ.

(3) علاقة التعامد على مجموعة المستقيمات هي ليست علاقة تكافؤ.

صنف التكافؤ

تعريف 10.2.1 : لتكن $(\mathscr{R})$ علاقة تكافؤ في المجموعة E و ليكن $a \in E$.
نعرف صنف تكافؤ العنصر a الذي نرمز له بالرمز $\dot{a}$ كما يلي

$$\boxed{\dot{a} = \{x \in E : x\mathscr{R}a\}}$$

4.2.1. علاقة الترتيب

تعريف 11.2.1 : و نقول أن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب في المجموعة E إذا تحقق ما يلي

(1) $(\mathscr{R})$ علاقة إنعكاسية

(2) $(\mathscr{R})$ علاقة ضد تناظرية

(3) $(\mathscr{R})$ علاقة متعدية

مثال 3 : ليكن

5.2.1. علاقة الترتيب الكلي

لتكن $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب في المجموعة E.

تعريف 12.2.1 : نقول أن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب كلي في المجموعة E إذا تحقق ما يلي

$$\boxed{\forall(x,y)\in E\times E : (x\mathscr{R}y \vee y\mathscr{R}x).}$$

$(\mathscr{R})$

3.1 التطبيقات

1.3.1. تعاريــف

تعريــف التطبيق

تعريف 1.3.1 : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين . نقول أننا عرفنا تطبيقا f من A نحو B إذا عرفنا علاقة تربط كل عنصر x من A بعنصر وحيد y من B. ونكتب:

$$\boxed{f: \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \to & y=f(x) \end{array}}$$

أو

$$\boxed{f(\text{تطبيق}) \iff (\forall x\in A)(\exists! y\in B) : y=f(x)}$$

- y يُسمى صورة x بالتطبيق f.
- x يُسمى سابق y بالتطبيق f.
- المجموعة A تُسمى مجموعة الإنطلاق.
- المجموعة B تُسمى مجموعة الوصول.

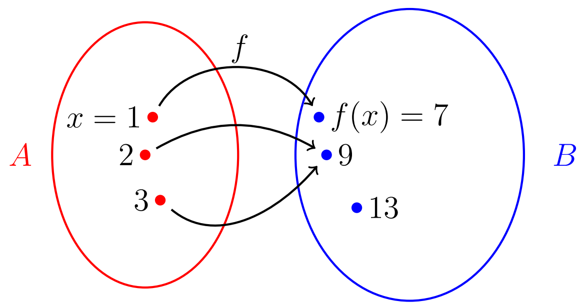
ملاحظة 1 : .

(1) يكون f تطبيق من A نحو B $\iff$ كل عنصر x من A له صورة وحيدة في B .

(2) إذا كان f تطبيق من A نحو B فإنه يُمكن أن يكون للعنصر y من B أكثر من سابقة في A.

(3) يجب التفريق بين $f(x)$ و f : لدينا $f(x) \in B$، بينما f تمثل التطبيق ككل، وهي تنتمي إلى فضاء التطبيقات المعرفة من A نحو B .

مثال 1 : لدينا $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{7, 9, 13\}$.

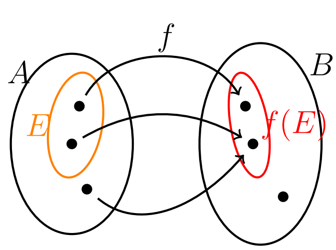


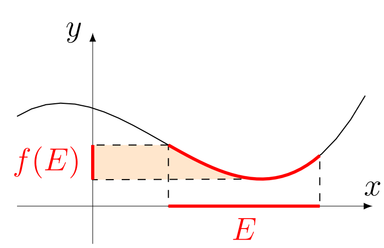
- لدينا $f(1) = 7; f(2) = 9; f(3) = 9$.
- f تطبيق من A نحو B كل عنصر x من A له صورة وحيدة في B.
- هنا العنصر 13 ليس لها سابقة وفق التطبيق f .
- هنا العنصر 9 لها سابقتان : 2 و 3.

الصورة المباشرة و الصورة العكسية

تعريف 2.3.1 : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين. ولتكن E مجموعة جزئية من A، وليكن $f : A \to B$ تطبيق. نعرف الصورة المباشرة للمجموعة E بواسطة التطبيق f المجموعة

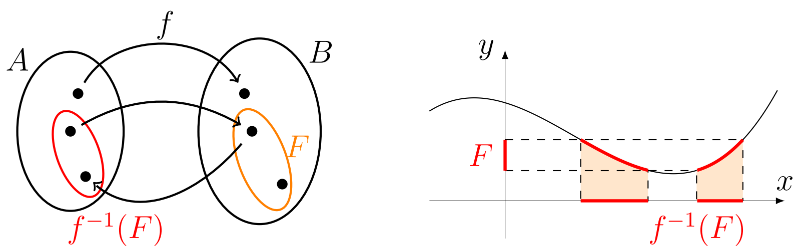
$$\boxed{f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}}$$





تعريف 3.3.1 : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين. ولتكن F مجموعة جزئية من B، وليكن $f : A \to B$ تطبيق. نعرف الصورة العكسية للمجموعة F بواسطة التطبيق f المجموعة

$$\boxed{f^{-1}(F) = \{x \in A \mid f(x) \in F\}}$$



ملاحظة 2 : لدينا المفاهيم التالية

- المجموعة $f(E)$ مجموعة جزئية من المجموعة B ، $f^{-1}(F)$ مجموعة جزئية من المجموع A.

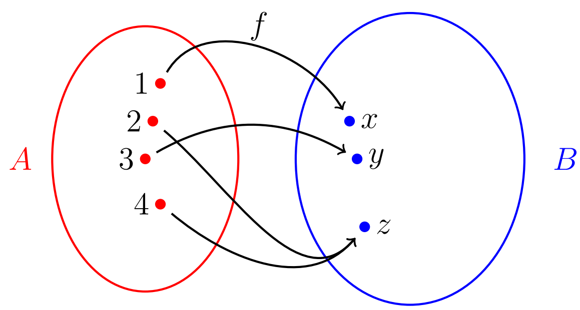
- الصورة المباشرة للعنصر $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ هي صورة مجموعة مفردة تحتوي عنصر واحد. من ناحية أخرى ، فإن الصورة العكسية لـ $f^{-1}(\{y\})$ تعتمد على f. يمكن أن تكون مجموعة مفردة ، أو مجموعة مكونة من عدة عناصر أو حتى المجموعة الفارغة (إذا لم تكن هناك صورة من f تساوي y).

2.3.1. التطبيق الغامر

تعريف 4.3.1 : نقول إن f تطبيق غامر إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من B له سابقة على الأقل في A. و نكتب:

$$\boxed{f(\text{تطبيق غامر}) \iff (\forall y \in B, \exists x \in A) \ : \ y = f(x).}$$

مثال 2 : لدينا $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{x, y, z\}$.



- لدينا $f(1)=x; f(3)=y; f(4)=\{y,z\}$.
- f تطبيق من A نحو B كل عنصر من A له صورة وحيدة في B.
- f تطبيق غامر من A نحو B لأن كل عنصر من B له سابقة على الأقل في A.

3.3.1 التطبيق المتباين

تعريف 5.3.1 : نقول أن التطبيق f متباين إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من B له سابقة واحدة على الأكثر في A ونكتب

$$\boxed{f(\text{تطبيق متباين}) \iff \forall (x,y)\in A^2 : (f(x)=f(y) \Rightarrow x=y).}$$

4.3.1 التطبيق التقابلي

تعريف 6.3.1 : نقول إن f تطبيق تقابلي إذا وفقط إذا متباين و غامر معا، أي إذا كان لكل عنصر y من B سابقة وحيدة في A. ونكتب:

$$\boxed{f\left(\text{تطبيق تقابلي}\right) \iff (\forall y\in B), (\exists ! x\in A) : y=f(x).}$$

5.3.1 تركيب التطبيقات

نعتبر التطبيقين :

$$f : \begin{array}{l} A\to B \\ x\to f(x) \end{array} \quad ; \qquad g : \begin{array}{l} G\to H \\ x\to g(x) \end{array}$$

إذا كان $g(G) \subset A$ نعرف التطبيق $f \circ g$ كما يلي :

$$f \circ g : \begin{array}{l} G \to B \\ x \to f(g(x)) \end{array}$$

ملاحظة 3 : نلاحظ أنه لا يمكننا أن نتكلم عن $f(g(x))$ حتى يكون $g(x) \in A$، لهذا فإن الشرط $g(G) \subset A$ يعتبر أساسيا حتى يكون للتطبيق $f \circ g$ معنى.

6.3.1. التطبيق العكسي

تعريف 7.3.1 : ليكن f تطبيقا تقابليا من A نحو B

$$f : \begin{array}{l} A \to B \\ x \to f(x) \end{array}$$

نعرف التطبيق العكسي لـ f كما يلي :

$$f^{-1} : \begin{array}{l} B \to A \\ y \to f^{-1}(y) \end{array}$$

ليكن $y \in B$، بما أن f تقابل من A نحو B فإنه يوجد x وحيد من A بحيث : $y = f(x)$، لدينا :

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

ملاحظة 4 : إذا كان f تقابل من A نحو B فإن f^{-1} تقابل من B نحو A

ملاحظة 5 : لدينا

$$\begin{aligned} \forall x &\in A, \quad f^{-1}(f(x)) = x, \\ \forall y &\in B, \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y. \end{aligned}$$

ملاحظة 6 : ليكن $y \in B$. لا يمكننا التكلم عن $f^{-1}(y)$ حتى يكون التطبيق f تقابلا من A نحو B.
بينما إذا كان $K \subset B$ يمكننا دائما التكلم عن $f^{-1}(K)$ حتى و إن لم يكن التطبيق تقابلا .

مثال 3 : كما بينا سابقا لدينا التطبيق التالي تقابل

$$f : \begin{array}{c} [0,+\infty[\to [0,+\infty[\\ x \to x^2 \end{array}$$

و تطبيقه العكسي هو التالي :

$$f^{-1} : \begin{array}{c} [0,+\infty[\to [0,+\infty[\\ x \to \sqrt{x} \end{array}$$

7.3.1. تساوي تطبيقين

ليكن التطبيقين:

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \to & y = f(x) \end{array} \quad , \qquad g : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \to & y = g(x) \end{array}$$

نقول أن $f = g$ إذا و فقط اذا كان

$$f = g \iff \begin{cases} A = E, \; B = F \\ (\forall x \in A) \; : \; f(x) = g(x) \end{cases}$$