Université: Mohamed Khider
Faculté des Sciences exactes, des Sciences de la nature et de la vie
Département: de Mathématéques
Nivaux Master 01
Module: Lois des probabilités 2020/2021

Cours N^o 01

Définition 1.1. On appelle probabilité P sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ toute application de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes de Kolmogorov:

1) $P(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

2) $P(\Omega) = 1$.

3) Si deux événements A et B $(A, B \in \mathcal{F})$ sont incompatibles et tels que $A \cap B = \varnothing$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, (additivité de P).

4) Soit $\{An\}$ une suite d'événements, décroissante (au sens de l'inclusion) vers $\varnothing$, $A_n \downarrow \varnothing$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq$ ...et $\underset{n\geq 1}{\cap} A_n = \varnothing$, $A_n \in \mathcal{F}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0, \text{ (continuité en 0 de } P).$$

Définition 1.2. Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Définition 1.3. On dit que l'événement A est impossible (négligable), si $P(A) = 0$.

Il est évident que $\varnothing$ est l'événement impossible.

Définition 1.4. On dit qu'une propriété est vérifiée presque partout ou presque sûrement et on note (mod P), si elle est vraie sur un événement Λ, $\Lambda \in \mathcal{F}$, tel que $P(\Lambda) = 1$.

On dit aussi que Λ est un événement certain. Il est évident que Ω est l'événement certain.

Définition 1.5. Deux événements A et B sont incompatibles si $P(A \cap B) = 0$.

Théorème 1.1. La fonction $P(A)$ est σ-additive sur A, i.e. pour chaque suite d'événements $A_n \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$, incompatibles deux a deux on a

$$P\left(\underset{n\geq 1}{\cup} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(A_n).$$

L'indépendance

Définition 1.6. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements, $A, B \in \mathcal{F}$. On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Définition 1.7. Les σ-algèbres $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m$ sont indépendantes si $P(A_1...A_m) = P(A_1)...P(A_m)$ pour tout $A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, ..., m$.

Exemple 1. Si les événements A et B sont indépendents, alors A et $\overline{B}$ sont indépendents aussi. En effet,

$$\begin{aligned} P(B \cap \overline{A}) &= P(B \backslash A \cap B), \\ &= P(B) - P(A \cap B), \\ &= P(B) - P(A)P(B), \\ &= P(B)[1 - P(A)], \\ &= P(B)P(A). \end{aligned}$$

Exemple 2. Si A_1 et B sont indépendants, A_2 et B sont indépendants, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, alors $A_1 \cup A_2$ et B sont indépendants aussi. En effet, comme

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B),$$

on a

$$\begin{aligned} P((A_1 \cup A_2) \cap B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B), \\ &= P(B)[P(A_1) + P(A_2)], \\ &= P(B)P(A_1 \cup A_2). \end{aligned}$$

Théorème de Borel-Cantelli

Définition 1.8. Soit $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ une suite d'événements $A_n \in \mathcal{F}$. Alors les événements

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k, \text{ et } \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k,$$

sont appelés la limite supérieure et la limite inférieure respectivement de la suite $\{A_n\}$.

L'événement $\overline{\lim} A_n$ se produit si et seulement si le nombre infini d'événements de la suite se produisent, puisque

$$\omega \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \geq n : \omega \in A_k.$$

L'événement $\underline{\lim} A_n$ se produit si et seulement si tous les événemets de la suite se produisent sauf peut-être un nombre fini parmi eux, puisque

$$\omega \in \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n : \omega \in A_k.$$