

de l'énergie, de la quantité de mouvement) et des modèles (comme la relation effort/déformation dans un ressort, la loi de la gravitation) dans lesquels on peut avoir une confiance raisonnable. Les données (les valeurs des coefficients, conditions aux limites imposées) sont souvent le résultat de mesures et donc peu fiables. Il est souhaitable que la solution de l'équation aux dérivées partielles présente une certaine stabilité si les données venaient à être légèrement perturbées.

1.2 Equations linéaire d'ordre 1

On se place, dans ce qui suit, dans l'espace \mathbb{R}^3 rapporté à un repère orthonormé direct. $\mathbf{M}(x, y, z)$ désigne un point de l'espace ; on notera indifféremment $f(\mathbf{M})$ ou f la valeur d'une fonction f au point \mathbf{M} . Soient P, Q, R trois fonctions, supposées de classe C^1 , des variables x, y, z . On s'intéresse à la résolution du système différentiel

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (1.2)$$

On remarque que le système (1.2) se met également sous la forme

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

ce qui, physiquement, s'interprète comme le fait d'imposer en chaque point que le déplacement infinitésimal soit parallèle à un vecteur donné.

Définition 1.2.1 On appelle solution du système (1.2) une courbe (C) , dont la tangente en tout point \mathbf{M} de coordonnées (x, y, z) en lequel P, Q , et R ne s'annulent pas simultanément, est dirigée par le vecteur de coordonnées $(P(\mathbf{M}), Q(\mathbf{M}), R(\mathbf{M}))$.

Rechercher une solution du système (1.2) revient donc à trouver une représentation paramétrique $t \mapsto \mathbf{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, de la courbe (C) , telle que en tout point de paramètre t :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = k(t) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}_{\mathbf{M}(t)}, \quad (1.4)$$

ce qui traduit bien la colinéarité du vecteur tangent à (C) au point $\mathbf{M}(t)$ et du vecteur de composantes $(P, Q, R)_{\mathbf{M}(t)}$.