

Si  $P$ ,  $Q$ , et  $R$  ne s'annulent pas en  $\mathbf{M}(t)$ , alors

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{P(\mathbf{M}(t))} = \frac{\frac{dy}{dt}}{Q(\mathbf{M}(t))} = \frac{\frac{dz}{dt}}{R(\mathbf{M}(t))} \quad (1.5)$$

Si  $P$  (respectivement  $Q$ ,  $R$ ) s'annule en  $\mathbf{M}(t)$ , alors, il en est de même pour  $\frac{dx}{dt}$  (respectivement  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$ ). On supposera donc, dans ce qui suit,  $P$ ,  $Q$ , et  $R$  non simultanément nuls. Quand elle est possible, la résolution directe du système (1.4) donne une représentation paramétrique d'une courbe solution de (1.2). Puisque le problème est posé dans  $\mathbb{R}^3$ , une technique alternative pour caractériser une courbe est de la définir comme l'intersection de deux surfaces, ce qui est l'objet de la section suivante.

### 1.2.1 Méthode des courbes caractéristiques

**Définition 1.2.2** On appelle *intégrale première* du système (1.2) une fonction  $u$  de classe  $C^1$  des trois variables  $x, y, z$ , non constante, et telle que, pour toute solution  $C : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  de (1.2), la fonction  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  soit constante.

**Remarque 1.2.3** Dans cette définition, on voit directement que si  $\mathbf{M}_0$  est un point de la courbe solution  $(C)$ , alors celle-ci est tracée sur la surface  $\Sigma_{u, \mathbf{M}_0}$  décrite implicitement par

$$\Sigma_{u, \mathbf{M}_0} = \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 / u(\mathbf{M}) = u(\mathbf{M}_0)\} \quad (1.6)$$

**Théorème 1.2.4** Une fonction  $u$  de classe  $C^1$  des trois variables  $x, y, z$  est une *intégrale première* de (1.2) si et seulement si, dans tout domaine où les solutions de (1.2) sont définies, elle vérifie :

$$P(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + Q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) + R(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = 0. \quad (1.7)$$

**Preuve 1.2.5** Soit  $t \mapsto \mathbf{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  une solution de (1.2), et  $u$  une *intégrale première*. Par dérivation composée

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{M}(t)) = \frac{dx}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{M}(t)) + \frac{dy}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{M}(t)) + \frac{dz}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{M}(t)). \quad (1.8)$$

On conclut en utilisant le fait que  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  et  $\frac{dz}{dt}$  sont respectivement proportionnels à  $dt$   $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , et que la fonction  $t \mapsto u(x(t), y(t), z(t))$  étant constante, le membre de gauche est nul.