

Géométriquement, l'équation (1.7) correspond à l'orthogonalité du gradient de la fonction décrivant la surface Σ_{u, \mathbf{M}_0} et du vecteur tangent à la courbe (C) en \mathbf{M}_0 . En effet, le gradient est normal au plan tangent à la surface. (C) est tracée sur Σ_{u, \mathbf{M}_0} , son vecteur tangent appartient donc au plan tangent à la surface. D'autre part, si u_1 et u_2 sont deux intégrales premières de (1.2), et si \mathbf{M}_0 est un point de la courbe solution (C), alors les surfaces

$$\begin{aligned} \sum_{u_1, \mathbf{M}_0} &: u_1(\mathbf{M}) = u_1(\mathbf{M}_0) \\ \sum_{u_2, \mathbf{M}_0} &: u_2(\mathbf{M}) = u_2(\mathbf{M}_0), \end{aligned}$$

contiennent toutes les deux (C).

Il est intéressant de déterminer si $\sum_{u_1, \mathbf{M}_0} \cap \sum_{u_2, \mathbf{M}_0}$ permet de définir (C) et si d'autres intégrales premières contenant (C) peuvent être définies. C'est l'objet de la sous-section suivante.

1.2.2 Intégrales premières indépendantes

Définition 1.2.6 Trois fonctions f, g, h , de classe C^1 sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 sont dites fonctionnellement indépendantes si les seules fonctions différentiables H telles que la fonction

$$(x, y, z) \mapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

soit constante, sont les fonctions constantes.

Théorème 1.2.7 Soient f, g, h trois fonctions de classe C^1 sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 . Si le Jacobien

$$\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

ne s'annule pas dans Ω alors, f, g, h sont fonctionnellement indépendantes.

Preuve 1.2.8 La fonction $(x, y, z) \mapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ de la définition ci-dessus est constante si et seulement si sa différentielle est nulle. Donc

$$0 = dH = \left(\frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial H}{\partial g} \frac{\partial H}{\partial h} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \forall (dx \, dy \, dz) \quad (1.10)$$