Chapitre 1

Calcul des probabilités

1.1 Analyse combinatoire

1.1.1 Introduction

L'analyse combinatoire est l'étude des différents manières pour $\ll$ ranger $\gg$ des objets, ces objets peuvent être des nombres, des individus, des lettres, etc....

Mathématiquement, l'analyse combinatoire est la théorie de dénombrement. Elle s'emploie pour dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis. En effet, on entend par analyse combinatoire l'ensemble de méthodes, permettant de déterminer le nombre de tous les résultats possibles d'une expérience particulière. Ces méthodes seront présentées comme suit :

1.1.2 Principe fondamental généralisé

Si nous avons r expériences dont les résultats possibles sont respectivement $n_1, n_2, n_3 \ldots, n_r$, alors nous aurons au total $n_1 \times n_2 \times n_3 \ldots \times n_r$ résultats possibles pour les r expériences prises ensemble.

Exemple 1.1 *Le comité de planification d'un collège est constitué de* 2 *étudiants de première année,* 5 *étudiants de deuxième année,* 3 *étudiants de troisième année et* 6 *étudiants de quatrième année. Un sous-comité de* 4 *étudiants, comportant un représentant de chaque classe, doit être choisi. Combien de choix possibles peut-on former un tel sous-comité ?*

Réponse : nous pouvons considérer le choix d'un sous-comité comme le résultat combiné de 4 *expériences distinctes, chacune consistant à choisir un représentant unique dans l'une des classes. Par conséquent, en appliquant le principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a* $2 \times 5 \times 3 \times 6 = 180$ *possibilités.*

1.1.3 Arrangements

Soit un ensemle de n éléments tous distincts $\{a, b, \ldots s\}$.

Définition 1.1 *On appelle* $\ll$ *Arrangement avec répétition*$\gg$ *de p élément choisi parmi n, toute disposition ordonnée de p élément parmi n avec répétition d'un ou plusieur éléments.*
Le nombre d'arrangements noté A_n^p *est égale à*

$$A_n^p = n^p = \underbrace{n \times n \times n \times \ldots n}_{n \ fois}$$

Exemple 1.2 *Un numéro d'appel est composé de 8 chiffres, ce numéro est une disposition ordonnée avec répétition de 8 éléments parmi 10 :* $\{0, 1, 2, 3, \ldots 9\}$ *donc un numéro est un arrangement avec répétition* $A_{10}^{8} = 10^{8}$.

Définition 1.2 *On appelle ≪ Arrangement sans répétition≫ ou simplement arrangement de p élément choisi parmi n, une disposition ordonnée sans répétition de p élément parmi n.*
Le nombre d'arrangement noté A_n^p *est égale à*

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1)) \quad 1 \le p \le n.$$

Exemple 1.3 *Quel est le nombre de tiercés dand l'ordre, d'une course de 10 chevaux.*
L'ordre est important et on ne peut pas avoir de répétition, donc il s'agit d'arrangement sans répétition de trois éléments choisis parmi 10, *leor nombre est égale à*

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720 \textit{ tiercés possibles.}$$

1.1.4 Permutations

Définition 1.3 *On appelle ≪ Permutation sans répétition≫ ou simplement permutation un rangement, ou un claseement ordonné de n objets.*

Exemple 1.4 *Si nous disposons de trois objets* a, b, c, *les permutations possibles sont les suivantes :*

$$abc, \quad acb, \quad bac, \quad bca, \quad cab, \quad cba.$$

Soit 6 permutations au total i.e

$$n! = 3! = 6.$$

Remarque 1.1 *Le nombre de permutations ou bien une permutation est un arrangement sans répétition de n éléments choisis parmi n :*

$$n! = \frac{n!}{0!} = n!$$

Définition 1.4 *≪ Permutation avec répétition≫*

Le nombre de permutations que l'on peut obtenir si certains des objets sont identiques est plus faible que si tous les objets etaint distincts.

Exemple 1.5 *Nous disirons ≪ ranger≫ trois boules vertes et deux boules bleues toutes identiques excepté leur couleur. Nous avons bien 5 objets à notre disposition, mais nous ne pouvons pas faire la distinction entre les boules vertes ou les boules bleues. Le nombre de permutations sera donc*

$$\frac{5!}{3! \times 2!}.$$

Dans le cas général l'orsque nous avons n objets comprenant respectivement $n_1, n_2, n_3 \ldots n_r$ termes identiques, le nombre de permutation est égale à

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \ldots n_r!}.$$

1.1.5 Combinaisons

Soit un ensemble de n éléments distincts $\{a, b, \dots s\}$

Définition 1.5 *On appelle ≪ Combinaisons sans répétition≫ ou simplement Combinaisons de p éléments, choisis parmi les n, une disposition non ordonnée sans répétition noté par*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Exemple 1.6 *Trouver le nombre de tircés dans le désordre, dans une course de 10 chevaux. Réponse :*

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}.$$

Propriété 1.1 *1)* $C_n^p \stackrel{?}{=} C_n^{n-p}$.

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p.$$

2) $C_n^p \stackrel{?}{=} C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

$$\begin{aligned} C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!\,((n-1)-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!} \\ &= \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} \end{aligned}$$

On remarque que

$$(n-p)! = (n-p)\,(n-p-1)! \text{ et } p! = p\,(p-1)!.$$

Donc

$$\begin{aligned} C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} &= \frac{(n-p)\,(n-1)!}{(n-p)\,p!\,(n-p-1)!} + \frac{p\,(n-1)!}{p\,(p-1)!\,(n-p)!} \\ &= \frac{(n-p)\,(n-1)! + p\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!\,(n-p+p)}{p!\,(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!n}{p!\,(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \\ &= C_n^p. \end{aligned}$$

3) $C_n^n \stackrel{?}{=} 1$.

Théorème 1.1 *Binome de Newton*
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\ &= x^k + n x^{n-1} y + \frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{2} y^2 + \ldots + n x y^{n-1} + y^n. \end{aligned}$$

Exemple 1.7

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \\ &= C_2^0 x^2 y^0 + C_2^1 x^1 y^1 + C_2^2 x^0 y^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Le développement de $(x+y)^n$ possède les propriétés suivantes :

1. *Il ya $n+1$ termes.*
2. *Dans chaque terme la somme des exposants de x et y est égale à n.*
3. *De terme en terme, l'exposant de x décroit de n à 0 et l'exposant de y croit de 0 à n.*
4. *Le coéfficient de chaque terme est C_n^k où k est l'exposant soit de x, soit de y.*
5. *Les coéfficient des terms équidistants des extrémités sont égaux.*

Remarque 1.2 *les coéfficients des puissances successives de $x+y$ peuvent être rangés dans un tableau triangulaire qu'on appelle triangle de Pascal.*

$$\begin{gathered}(x+y)^0 = 1 \\ (x+y)^1 = x+y \\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ (x+y)^6 = x^6 + 6xy + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6\end{gathered}$$

Le triangle de Pascal a les propriétés suivantes :
(a) Le premier et le dernier nombre de chaque ligne est 1.
(b) Chacun des autres nombres du tableau peut s'obtenir en ajoutant les deux nombres situés directement au dessus de lui. Par exemple

$$\begin{aligned}10 &= 4+6, \\ 15 &= 5+10.\end{aligned}$$

Notons que la propriétés (b) est équivalente au

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}.$$