

Chapitre I : flexion plane des poutres symétriques –rappel-

1.1 Flexion d'un barreau – définitions

On appelle flexion, la déformation du barreau accompagnée de l'incurvation de son axe, initialement droit, ou de changement de courbure de l'axe, initialement courbé.

La flexion est dite simple, si le barreau subit l'action de charges transversales ou de couples extérieurs engendrant dans les sections droites des moments de flexion M et des efforts tranchants Q . Le barreau travaillant essentiellement à la flexion s'appelle poutre. Lorsque l'axe du barreau est situé dans un plan, qui est le plan de sollicitation (plan du moment fléchissant) ; de plus, lorsque ce plan coïncide avec l'un des axes centraux principaux de la section, la flexion est dite plane ou droite. Si l'effort $Q = 0$, la flexion simple devient flexion pure.

Dans ce chapitre nous allons envisager les barreaux de section symétrique, chargés dans leur plan de symétrie.

1.2 Efforts intérieurs dans la poutre

Considérons une poutre droite à plan moyen et section constante, soumise à un système de forces extérieures agissant dans le plan de symétrie de la poutre. Par une coupe perpendiculaire à l'axe, on partage la poutre en deux fragments. Rejetons l'un d'entre eux, par exemple, celui de gauche et gardons la partie droite. Ecrivons ensuite les équations d'équilibre de la partie droite fig.1.1.

L'effort tranchant Q_y dans une section de la poutre est numériquement égal à la somme algébrique des projections, sur l'axe y , de toutes les forces extérieures, actives et réactives, appliquées d'un côté de la section.

Le moment fléchissant M_z dans une section de la poutre est numériquement égal à la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe central z de cette section, de toutes les forces et couples extérieurs actifs et réactifs agissant d'un côté de la section considérée.

Ecrivons les équations d'équilibre $\sum y = 0$ et $\sum m_z = 0$

$$Q_y = P + \int_{x_0}^x q(x) dx ; \quad (1')$$

$$M_z = M' + Px + \int_{x_0}^x x q(x) dx . \quad (2')$$

Selon le principe d'équivalence qui s'énonce : l'action des forces intérieures spécifiques – contraintes- agissant sur une section d'un solide en équilibre est équivalente à l'action des forces extérieures, appliquées sur l'une des parties du solide séparées par la section considérée :

La résultante de forces tangentielles intérieures

$$Q_y = \int_F \tau_y dF ; \quad (1)$$

et le couple résultant de l'action des forces normales intérieures

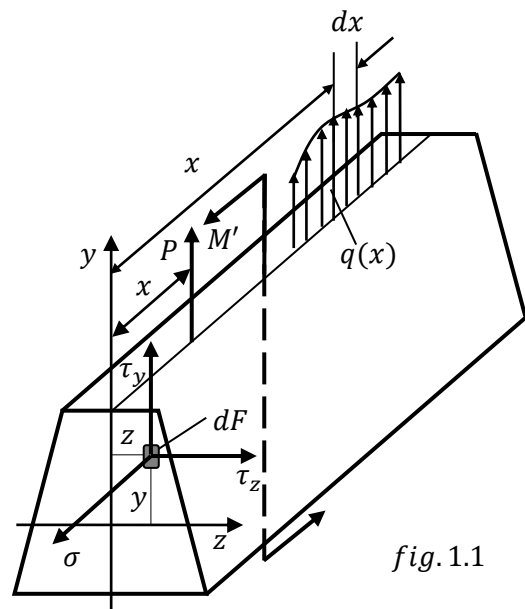


fig. 1.1

$$M_z = - \int_F y \sigma dF. \quad (2)$$

Les quatre autres équations exprimant l'équilibre de la partie sectionnée de la poutre sont, en flexion simple, toutes nulles :

$$N = \int_F \sigma dF = 0; \quad (3)$$

$$Q_z = \int_F \tau_z dF = 0; \quad (4)$$

$$M_y = \int_F \sigma z dF = 0; \quad (5)$$

$$M_t = \int_F (y \tau_z - z \tau_y) dF = 0; \quad (6)$$

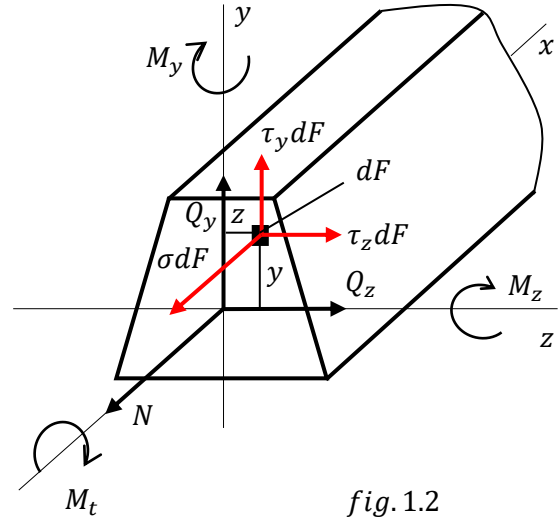


fig.1.2

Convention de signe

Pour les efforts intérieurs NQM , on adopte la convention suivante (fig.1.3) : l'effort normal positif agit en traction et l'effort négatif en compression ; l'effort tranchant positif est déduit de l'effort normal positif par une rotation de $\pi/2$ dans le sens horaire ; le moment fléchissant est positif s'il arque la poutre vers le bas, il est négatif dans le cas contraire.

1.3 Equations différentielles d'équilibre en flexion

1.3.1 Propriétés des efforts intérieurs Q et M

Etablissons quelques particularités caractéristiques des épures des efforts intérieurs Q et M , très utiles pour construire rapidement ces épures et contrôler, dans une certaine mesure, leur validité.

Considérons une poutre quelconque, soumise à un chargement arbitraire (fig.1.4, a). A l'abscisse x , isolons un petit élément dx de la poutre (fig.1.4, b) ; sur la face gauche naissent les efforts intérieurs Q, M et sur la face droite, les mêmes efforts, accrus de leurs variations dQ et dM sur l'intervalle dx .

L'équilibre de l'élément dx de la poutre fournit les relations suivantes :

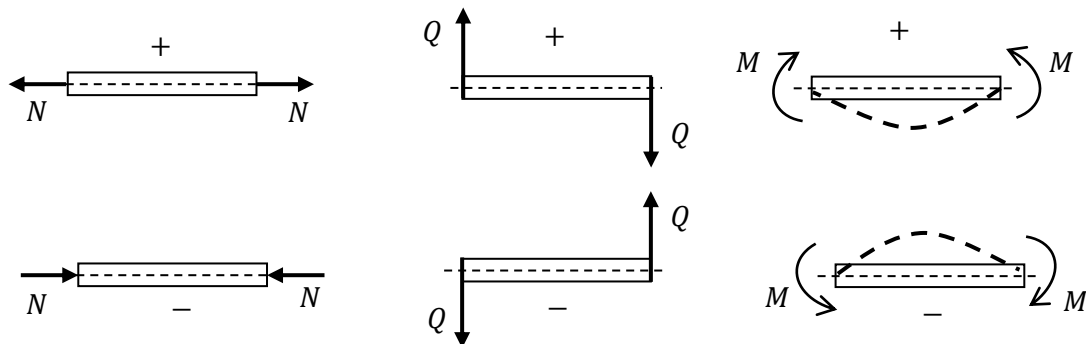


fig.1.3

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= Q + qdx - (Q + dQ) = 0; \\ \Sigma M_A &= M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.\end{aligned}$$

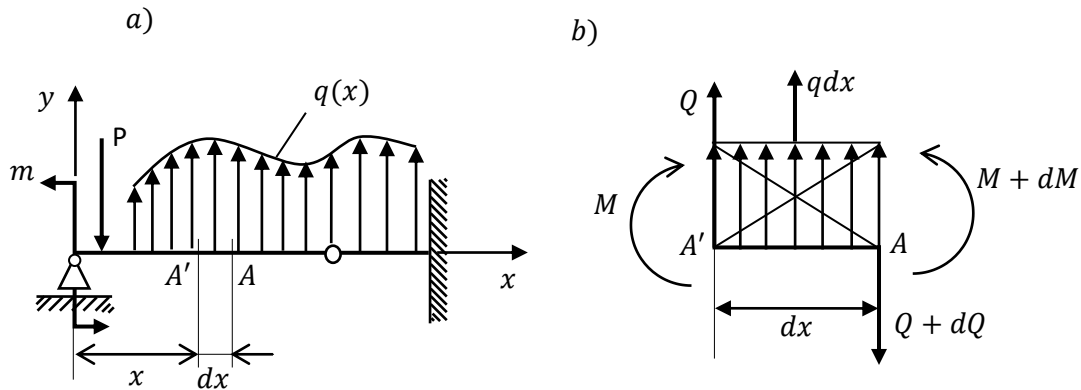


fig.1.4

On en déduit, le terme $qdx \frac{dx}{2}$ étant négligeable devant les autres dans la somme des moments

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (7)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (8)$$

Des équations (7) et (8), il résulte

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q. \quad (9)$$

Ces relations présentent les équations différentielles d'équilibre de la poutre droite en flexion. Leur intérêt réside dans les règles qu'on peut en extraire, utiles pour la construction des épures Q et M .

1.3.2 Règle des diagrammes QM

- Si la charge répartie, sur un tronçon, est exprimée par une fonction algébrique ; le degré de la fonction Q dans le tronçon correspondant est supérieur d'une unité à celui de la fonction q et est inférieur d'une unité à celui de la fonction M .
- Si la charge répartie est nulle ($q = 0$) , l'effort tranchant Q est constant et le moment M varie linéairement.
- Si la charge q est répartie uniformément ($q = const.$), l'effort tranchant varie linéairement et le moment fléchissant paraboliquement.
- L'effort tranchant est égal à la dérivée du moment fléchissant. Dans une section droite où l'effort tranchant est nul, le moment fléchissant atteint sa valeur extrême.
- Aux points d'application des forces concentrées, l'épure Q présente **un saut** (discontinuité) correspondant à la grandeur de la force extérieure, et l'épure M présente un point anguleux.
- Au point d'application d'un moment concentré, l'épure M fait **un saut** de discontinuité de même grandeur que ce moment.
- Si sur une des parties de la poutre ou sur toute sa longueur l'épure de l'effort tranchant est anti symétrique, sur ces mêmes parties le diagramme du moment est symétrique, et vice-versa.
- Si l'axe de la poutre est orienté de droite vers la gauche :

$$Q = -dM/dx.$$

1.4 Appuis et réactions d'appui des poutres en flexion plane

L'appui empêche certaines composantes du déplacement d'un point de la structure. Chacune d'elles porte le nom de blocage. Chaque blocage fait naître la réaction d'appui qui s'y associe.

Le système de forces (actives et réactives) agissant sur une structure doit garantir son équilibre.

1.4.1 Appuis usuels

En pratique, les appuis les plus couramment utilisés sont groupés en quatre types, selon les blocages qu'ils introduisent.



fig. 1.5

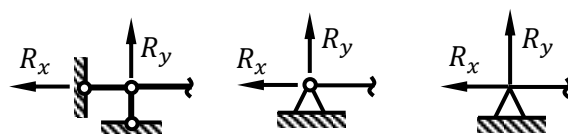


fig. 1.6

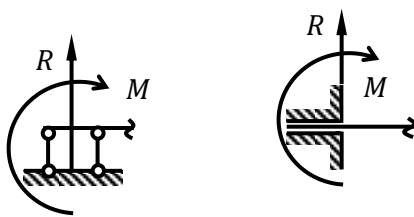


fig. 1.7

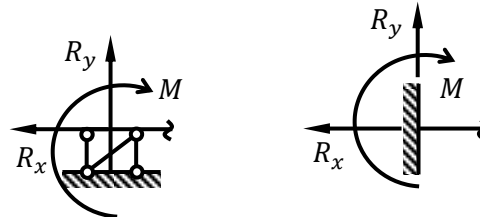


fig. 1.8

1.4.1.1 Appui cylindrique mobile (ou appui à rouleau)

Il impose un seul blocage de translation, tolérant les autres composantes de déplacements (rotation de la section d'appui de la poutre et son déplacement parallèlement au plan d'appui). Il est identique à un contact lisse, sans frottement. La réaction est perpendiculaire au plan d'appui. Un tel appui peut encore être représenté par une barre rigide, dite bielle d'appui, qui impose le support de la réaction. La représentation symbolique d'appui à rouleau est donnée par la figure 1.5.

1.4.1.2 Appui cylindrique fixe (ou appui articulé)

Il est appelé encore articulation ou rotule : impose deux blocages de translation qui font naître deux réactions d'appui, composante d'une force passant par l'axe de l'articulation (fig.1.6). Il ne tolère que la rotation de la section d'appui.

1.4.1.3 Encastrement mobile

Il laisse libre le déplacement de la section d'appui parallèlement aux plans d'appui. La réaction se compose d'une force perpendiculaire aux plans d'appui et d'un couple, fig.1.7.

1.4.1.4 Encastrement

L'encastrement constitue le blocage total du point d'appui, tant en translation qu'en rotation. Ce qui fait naître trois réactions d'appui, figure 1.8.

1.5 Construction des diagrammes MQ

Avec un peu d'exercice, on peut construire rapidement les épures des efforts intérieurs, sans pour autant avoir recours aux expressions analytiques. Il suffit pour cela d'avoir en vue les règles des diagrammes QM énoncées précédemment, (paragraphe 1.3.2). Les diagrammes présentés ci-dessous montrent ce qui suit :

Les diagrammes des poutres droites soumises aux forces et moments concentrés se résument à des segments de droite reliant les points caractéristiques, il suffit donc de calculer les valeurs QM en ces points.

En présence de charges réparties, le moment varie paraboliquement et est extrémum là où l'effort Q est nul. Même dans les cas les plus compliqués, charge répartie quelconque ou poutres courbes, par exemple, généralement le calcul de quelques points suffit pour tracer les diagrammes appropriés.

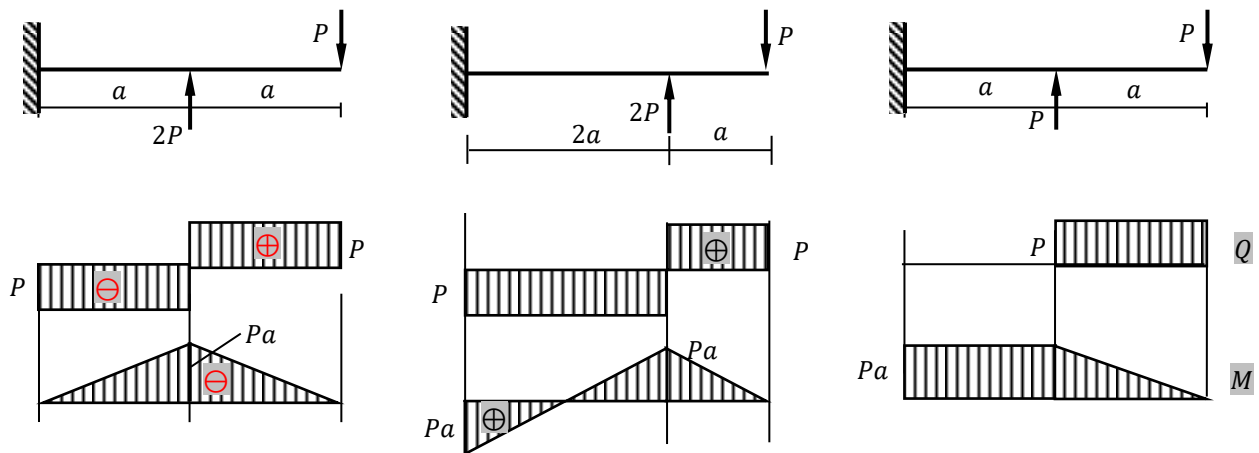


fig. 1.9

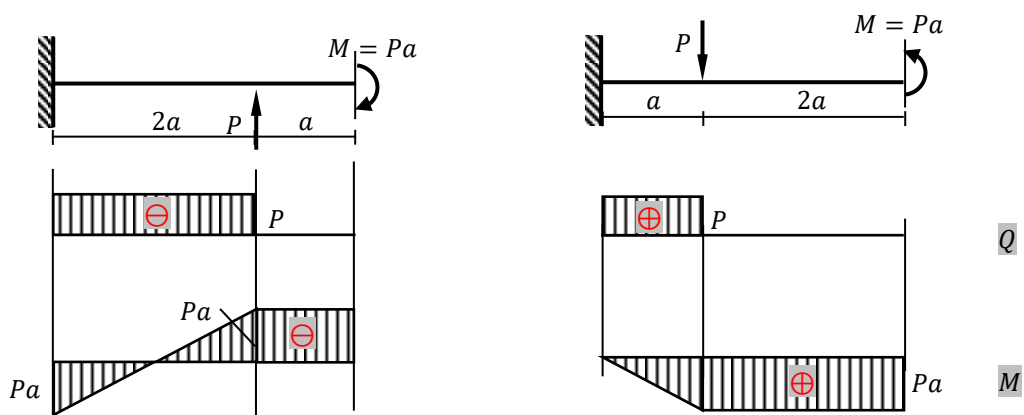


fig. 1.10

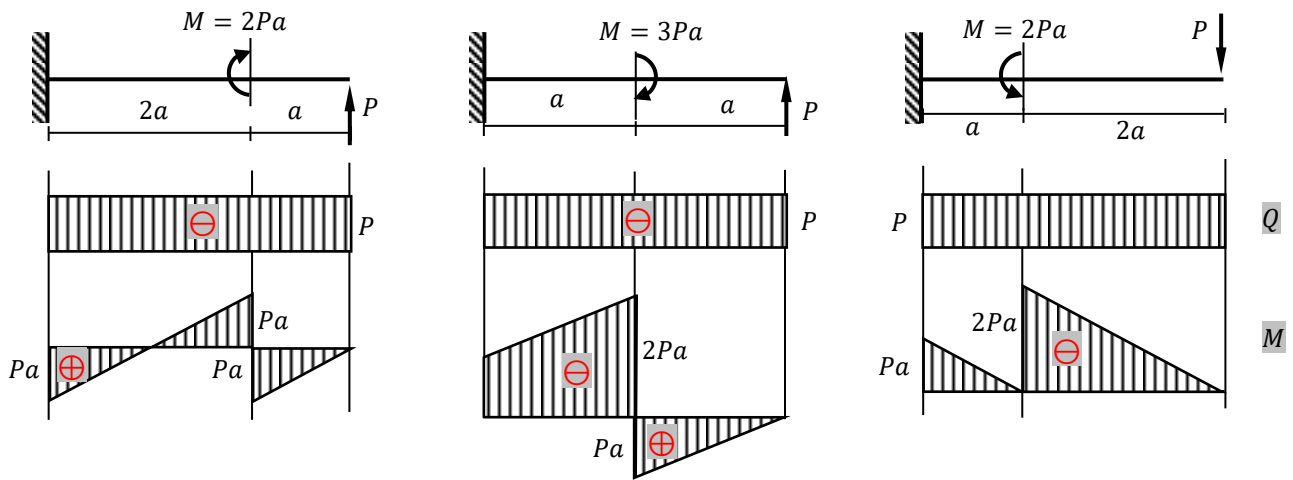


fig. 1.11

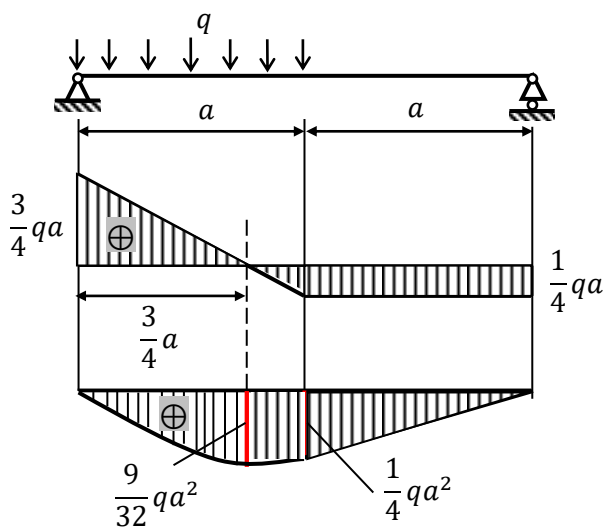


fig. 1.12

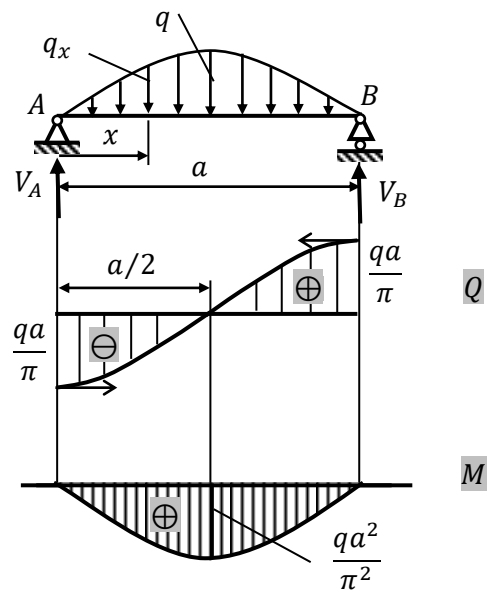


fig. 1.13

Exemple 1.1 : Vérifier, pour la poutre simple de la figure 1.13, les diagrammes QM si l'on prend

$$q(x) = q \sin \frac{\pi}{a} x.$$

Solution : en vertu de la symétrie de la charge, les réactions d'appui $V_A = V_B$;

La résultante de la charge répartie est égale à l'aire de la fonction du chargement :

$$R = \int_0^a q(x) dx = \int_0^a q \sin \frac{\pi x}{a} dx = -q \frac{a}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \Big|_0^a = \frac{2qa}{\pi}$$

$$d'où \quad V_A = V_B = \frac{R}{2} = \frac{qa}{\pi}$$

La variation de l'effort tranchant le long de la poutre s'écrit

$$Q(x) = V_A - \int_0^x q(x)dx = \frac{qa}{\pi} - \int_0^x q \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{qa}{\pi} + \frac{qa}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \Big|_0^x = \frac{qa}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \quad (*)$$

Pour déterminer la variation du moment fléchissant sur la longueur a, utilisons l'équation

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

$$M(x) = M_0 + \int_0^x Q(x)dx = \int_0^x \frac{qa}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} dx = \frac{qa}{\pi} \cdot \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \Big|_0^x = \frac{qa^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (**)$$

ici $M_0 = 0$, valeur du moment à l'origine des coordonnées $M(x = 0) = M_0 = 0$.

D'après les expressions (*) et (**), on constate que les courbes des efforts intérieurs sont des sinusoides, déterminons maintenant les

valeurs Q et M dans les sections caractéristiques :

$$x = 0 \quad \begin{cases} M = 0; \\ Q = V_A = \frac{qa}{\pi}; \end{cases}$$

$$x = \frac{a}{2} \quad \begin{cases} M = M_{max} = \frac{qa^2}{\pi^2}; \\ Q = 0; \end{cases}$$

$$x = a \quad \begin{cases} M = 0; \\ Q = -V_B = -\frac{qa}{\pi}. \end{cases}$$

Les résultats trouvés s'accordent bien avec les diagrammes des efforts MQ de la figure 1.13.

Exemple 1.2

Ecrire pour le tronçon, de la poutre fig.1.14, soumis à la charge trapézoïdale, les expressions des efforts intérieurs Q et M , et déterminer ensuite les valeurs caractéristiques de ces efforts. Commenter les résultats.

Solution

Pour calculer Q et M , on décompose le trapèze sur l'épure Q en rectangle et triangle, il vient alors

$$M(x) = \frac{7}{18} qax - q \frac{(x-a)^2}{2} - q \frac{(x-a)^3}{6a};$$

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{7}{18} qa - q(x-a) - \frac{q}{a} \cdot \frac{(x-a)^2}{2} = \frac{8}{9} qa - \frac{q}{2a} x^2.$$

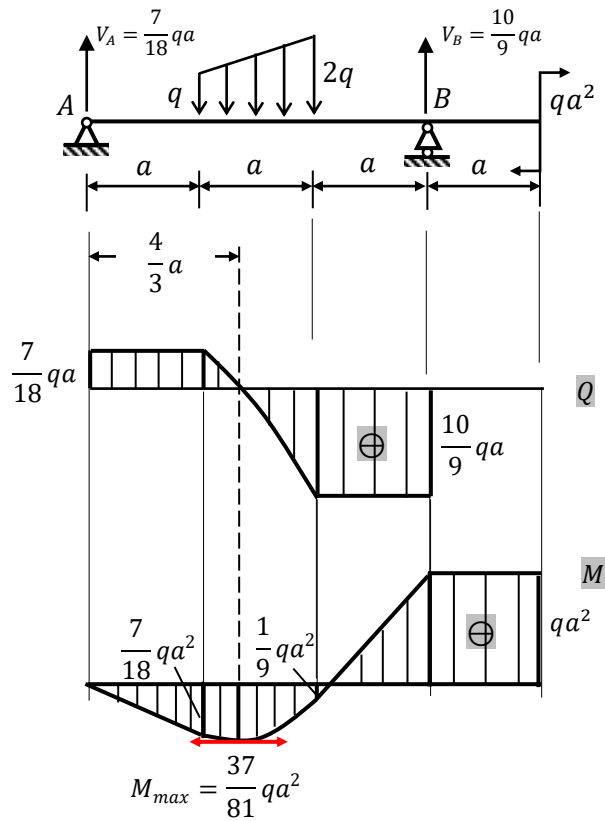


fig.1.14

Il n'est pas difficile de voir que la courbe M est une parabole du troisième degré et que Q est du second. Ce qui est caractéristique pour la charge triangulaire. Déterminons, à présent, les valeurs de ces efforts aux extrémités du tronçon :

$$\begin{cases} Q(a) = \frac{7}{18}qa; & Q(2a) = -\frac{10}{9}qa; \\ M(a) = \frac{7}{18}qa^2; & M(2a) = \frac{1}{9}qa^2. \end{cases}$$

Ce tronçon est soumis à une charge qui varie linéairement ; le diagramme de l'effort Q est une parabole du second degré et celui du moment M - parabole du troisième degré. Comme l'effort tranchant Q est égal à la dérivée du moment M , ce dernier est extremum dans la section où s'annule l'effort tranchant, de la sorte que

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{8}{9}qa - \frac{q}{2a}x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}a;$$

$$M_{max} = M\left(\frac{4}{3}a\right) = \frac{37}{81}qa^2$$

Ces résultats cadrent bien avec les diagrammes Q et M , sur le segment $[a, 2a]$, de la figure 1.14.

Maintenant, on laisse à l'étudiant le soin de vérifier, les résultats des diagrammes des figures (1.9-1.12) et d'en tirer les conclusions appropriées.

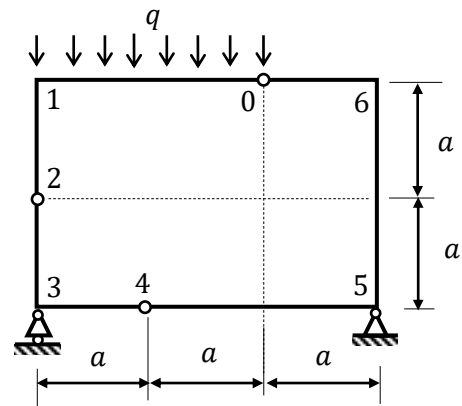


fig. 1.15

Exemple 1.3 Cadre plan fermé à trois articulations intermédiaires, comprenant une seule boucle (fig.1.15)

Pour le contour, à trois articulations, de la figure 1.15, construire les épures M, N, Q .

Solution

Les réactions étant déterminées ; en coupant l'une des articulations, par exemple l'articulation $0 \equiv C$, on peut en déterminer les forces de liaison associées (fig.1.15, a).

$$\sum M_B = 0: A_y = \frac{4}{3}qa; \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0: B_y = \frac{2}{3}qa; \quad (2)$$

$$\sum M_2^g = 0: C_x + 2C_y = 2qa; \quad (3)$$

$$\sum M_4^g = 0: 2C_x + C_y = \frac{4}{3}qa; \quad (4)$$

En résolvant le système de deux dernières équations, on obtient

$$C_x = \frac{2}{9}qa \quad \text{et} \quad C_y = \frac{8}{9}qa.$$

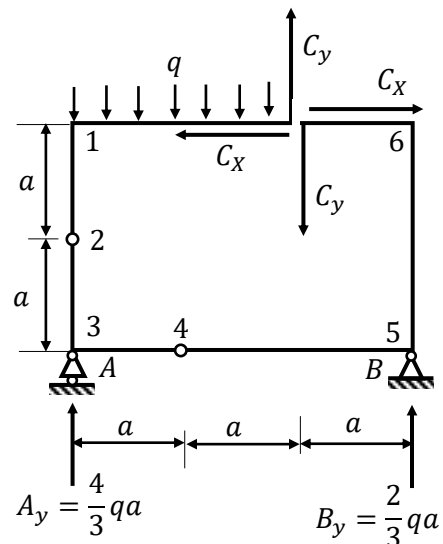


fig. 1.15, a

Les résultats peuvent être vérifiés en écrivant $\sum M_4^d = 0: C_x \cdot 2a + C_y \cdot a - B_y \cdot 2a = 0$.

a) Calcul des efforts normaux N (fig.1.16, a)

$$N_{0-1} = N_{0-6} = -C_x = -\frac{2}{9}qa \text{ (compression)}; N_{6-5} = -C_y = -\frac{8}{9}qa \text{ (compression)};$$

$$N_{5-3} = C_x = \frac{2}{9}qa \text{ (traction)}; N_{1-3} = C_y - 2qa = -\frac{10}{9}qa \text{ (compression)}.$$

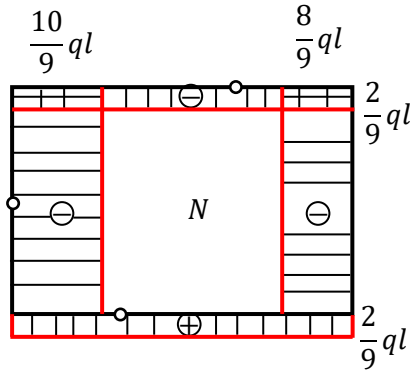


fig.1.16, a

b) Calcul des efforts tranchants Q (fig.1.16, b)

$$\text{Tronçon } 0-1 : Q(x) = -\frac{8}{9}qa + qx; Q(0) = -\frac{8}{9}qa; Q(2a) = \frac{10}{9}qa.$$

$$Q_{0-6} = -C_y = -\frac{8}{9}qa; \quad Q_{6-5} = C_x = \frac{2}{9}qa; \quad Q_{5-3} = C_y - B_y = \frac{2}{9}qa;$$

$$Q_{1-3} = -C_x = -\frac{2}{9}qa.$$

c) Moments de flexion (fig.1.16, c)

$$\text{Tronçon } 0-1 : M(x) = C_y x - q \frac{x^2}{2}; \quad M(0) = 0, \quad M(2a) = M_1 = -\frac{2}{9}qa^2;$$

$$\frac{dM}{dx} = 0: x = \frac{8}{9}a \rightarrow M_{max} = M\left(\frac{8}{9}qa\right) = \frac{32}{81}qa^2;$$

Il reste à calculer les moments dans les nœuds 3, 5 et 6

$$M_6 = -C_y \cdot a = -\frac{8}{9}qa^2; \quad M_5 = C_x \cdot 2a - C_y \cdot a = -\frac{4}{9}qa^2;$$

$$M_3 = M_1 + C_x \cdot 2a = -\frac{2}{9}qa^2 + \frac{2}{9}qa \cdot 2a = \frac{2}{9}qa^2;$$

$$\text{ou } M_3 = C_y \cdot 2a + C_x \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = \frac{2}{9}qa^2.$$

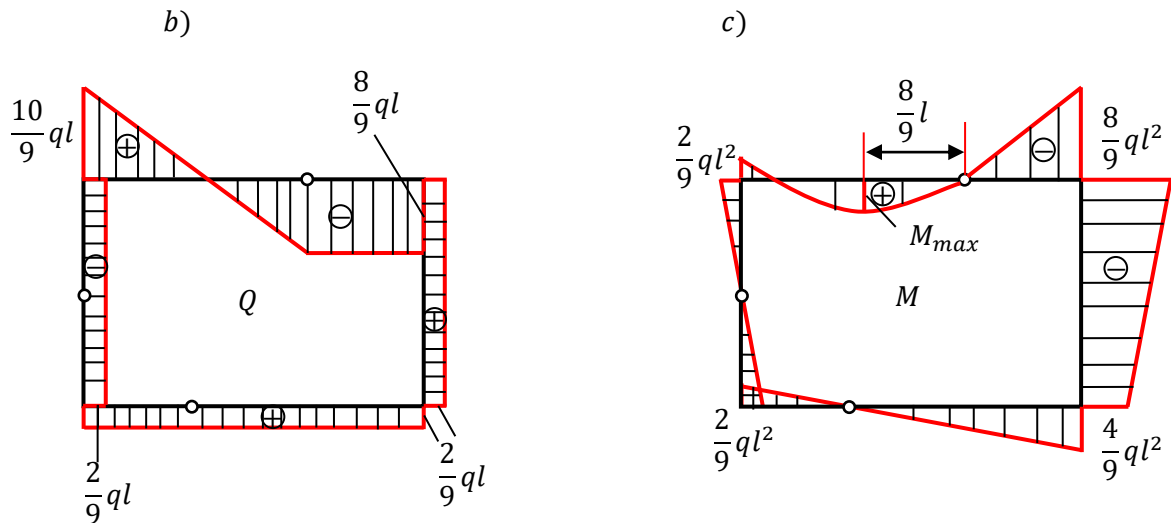


fig. 1.16, b - c

Exemple 1.4

Tracer les diagrammes des efforts intérieurs NQM pour le cadre présenté à la figure (1.17, a)

Solution : calcul des réactions aux appuis A et B (fig.1.17, a)

$$\sum M_B = V_A \cdot r - \frac{qr^2}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{qr}{2},$$

$$\sum X = 0: H_B = qr, \quad \sum Y = 0: V_B = \frac{qr}{2}.$$

Détermination des forces de liaison dans la rotule C (fig.1.17, b)

$$\sum M_B^g = 0 \rightarrow C_Y = 0;$$

$$\sum M_A^g = C_X \cdot r + \frac{qr^2}{2} - qr^2 = 0 \rightarrow C_X = \frac{qr}{2}.$$

Ce résultat aurait été obtenu en coupant la barre BC (fig.1.17, c), travaillant uniquement à la traction-compression, et en écrivant :

$$\sum M_A^d = N \cdot r + \frac{qr^2}{2} = 0 \rightarrow N = -qr/2$$

c) Détermination des efforts intérieurs NQM

Barre AB (articlée aux extrémités et n'est pas chargée, elle ne peut travailler qu'à la traction-compression)

$$N = -\frac{qr}{2}; Q = 0, \quad M = 0.$$

Barre AC

Identique à une poutre simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie,

$$Q_A = -Q_C = -\frac{qr}{2}; M_{max} = M\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{qr^2}{8}.$$

Barre BC

Est une poutre courbe ayant la forme d'un quart d'anneau circulaire de rayon r : en utilisant les coordonnées polaires r et φ , on écrit la somme des projections de toutes les forces, se situant d'un côté de la section t-t, sur les axes n et t , (fig.1.17, d), on obtient,

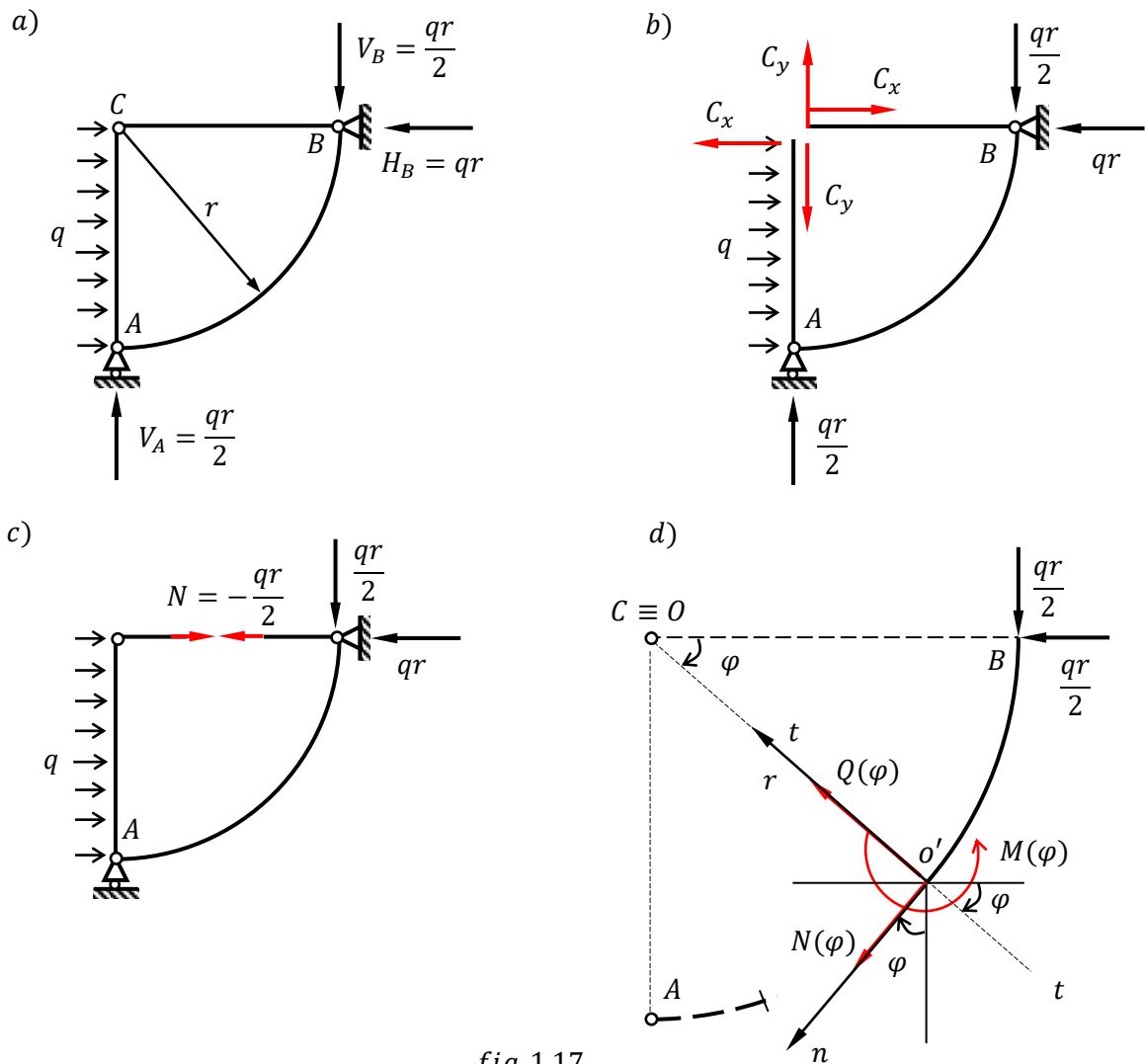


fig. 1.17

$$\sum F_t = 0 : Q(\varphi) + \frac{qr}{2} \cos\varphi - \frac{qr}{2} \sin\varphi = 0$$

$$\sum F_n = 0 : N(\varphi) + \frac{qr}{2} \cos\varphi + \frac{qr}{2} \sin\varphi = 0$$

d'où

$$\begin{cases} Q(\varphi) = \frac{qr}{2} (\cos\varphi - \sin\varphi), & (*) \\ N(\varphi) = -\frac{qr}{2} (\sin\varphi + \cos\varphi). & (**) \end{cases}$$

Ici r et φ sont les coordonnées polaires de l'arc BC ; $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

de l'équation (*), on a

$$\frac{dQ(\varphi)}{d\varphi} = \frac{qr}{2} (\sin\varphi + \cos\varphi) > 0 \uparrow,$$

$$\begin{cases} Q(0) = -qr/2; \\ Q(\pi/4) = 0; \\ Q(\pi/2) = qr/2; \end{cases}$$

de l'équation (**), on a

$$\frac{dN(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{qr}{2} (\cos\varphi - \sin\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$N_{max} = N(\pi/4) = -\sqrt{2}qr/2$$

$$\begin{cases} N(0) = -qr/2; \\ N(\pi/4) = N_{max} = -\sqrt{2}qr/2; \\ N(\pi/2) = -qr/2; \end{cases}$$

Calcul du moment fléchissant : la somme des moments de toutes les forces par rapport au point o' (fig.1.17, d) fournit :

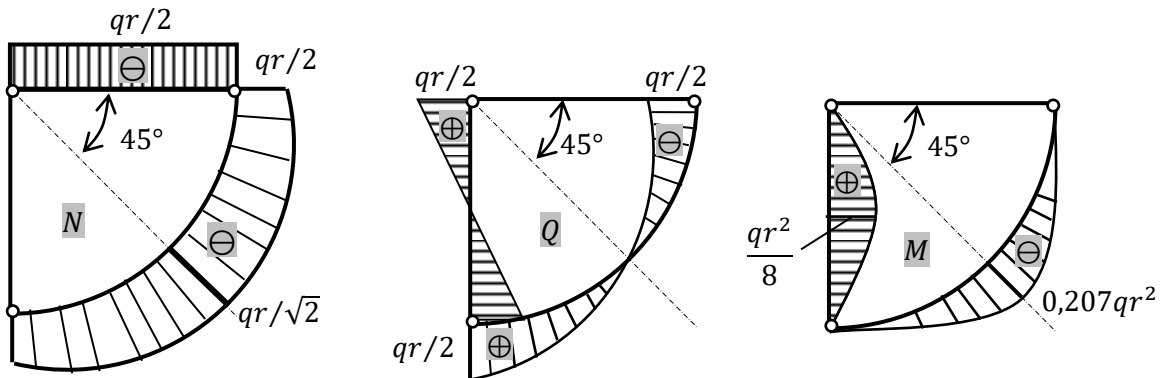


fig.1.18

$$\sum M_{o'} = \frac{qr}{2} \cdot r \sin\varphi - \frac{qr}{2} \cdot r(1 - \cos\varphi) - M(\varphi) = 0;$$

$$M(\varphi) = \frac{qr^2}{2} (1 - \cos\varphi - \sin\varphi); \quad (***)$$

$$\text{ainsi, } M(0) = M(\pi/2) = 0,$$

$$\frac{dM(\varphi)}{d\varphi} = \frac{qr^2}{2} (-\cos\varphi + \sin\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$M_{max} = M(\pi/4) = \frac{qr^2}{2} (1 - \sqrt{2}) = -0,207qr^2 \cdot$$

Les diagrammes des efforts NQM sont présentés à la figure 1.18.

1.6 Contraintes normales en flexion pure

Pour illustrer la loi de répartition des contraintes normales sur la section droite et en déduire les formules nécessaires, on adopte les hypothèses suivantes

1. en flexion pure, les sections droites planes avant déformation restent planes et perpendiculaires à l'axe de la poutre après déformation (hypothèse de Bernoulli) ;
2. au cours de déformation, les fibres longitudinales de la poutre n'exercent pas de pression les unes sur les autres ;
3. la couche n'éprouvant, en flexion, ni traction ni compression est la couche neutre.

Envisageons le cas de la flexion pure : en considérant une poutre droite à plan moyen et section constante fig.1.19, soumise à deux moments de flexion égaux et opposés M . Comme le moment est constant le long de toute la poutre, la déformation est partout la même. Ainsi, l'axe de la poutre prend la forme d'une courbe à courbure constante (ou arc de cercle de centre O). Par symétrie, cet arc de cercle est situé dans le plan moyen (x, y) , d'où vient la dénomination flexion plane.

Les fibres de la poutre s'incurvent suivant des arcs de cercle parallèles. Dans la partie convexe, elles éprouvent la traction, et dans la partie concave— la compression. Ainsi, il doit exister une couche pour laquelle les fibres en s'incurvant conservent leur longueur initiale. Cette couche est appelée couche neutre ($\sigma = 0, \varepsilon = 0$), et la ligne d'intersection de cette couche avec le plan de la section s'appelle ligne (ou axe) neutre de la section.

Si la section médiane doit, par symétrie, rester plane et perpendiculaire à l'axe fléchi, il en est de même de toute autre section droite (fig.1.19, b) ; cette hypothèse est confirmée par la théorie et l'expérience : c'est l'hypothèse des sections planes.

Ainsi les sections droites tournent les unes par rapport aux autres en restant planes et perpendiculaires tant à l'axe incurvé qu'à toutes les fibres. Le plan de ces sections passe par le centre O .

Isolons par deux coupes perpendiculaires à l'axe fléchi une tranche de poutre déformée fig.1.20, et déterminons l'allongement relatif de la fibre A_1B_1 située à distance y de la couche neutre. Avant déformation, cette fibre a la même longueur que la fibre neutre $ds = \rho d\alpha$ (les fibres neutres s'incurvent, mais elles conservent leur longueur initiale), après déformation sa longueur sera égale à $(\rho + y)d\alpha$; Ainsi

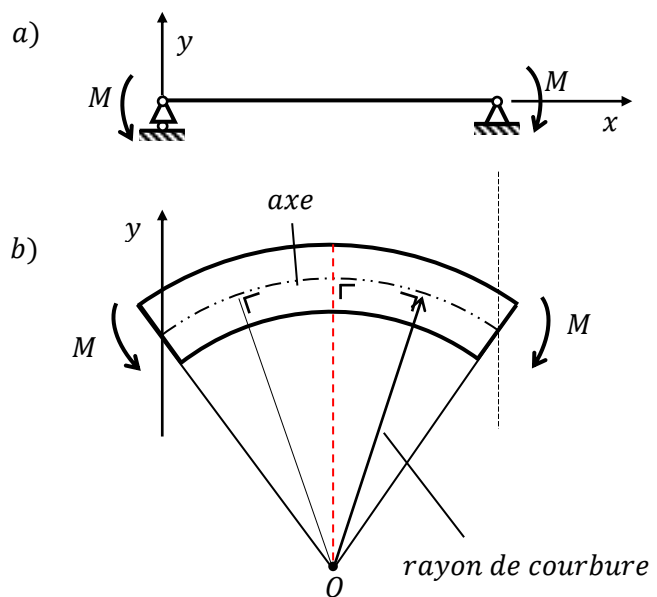


fig.1.19

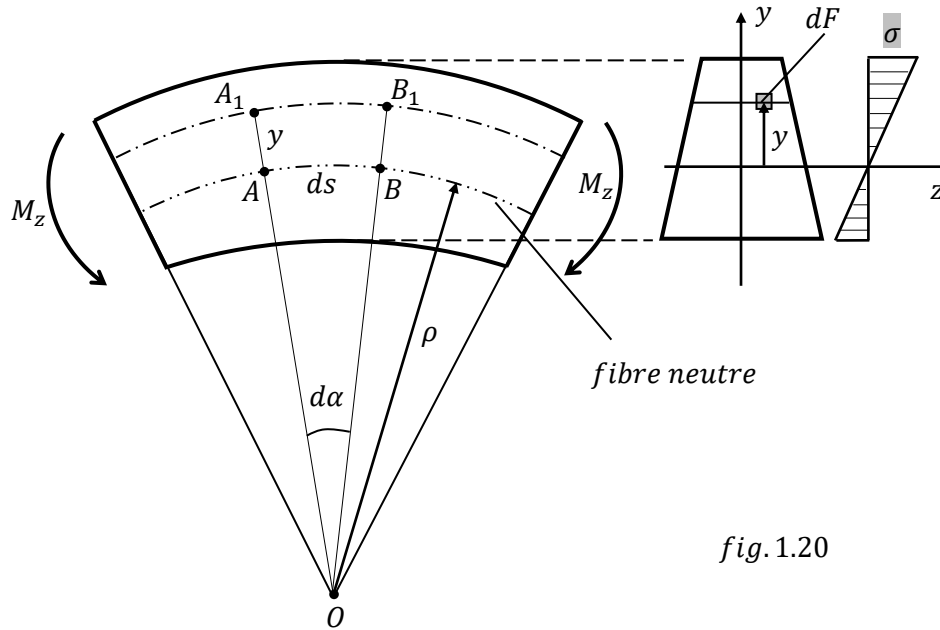


fig. 1.20

$$\varepsilon(y) = \frac{\Delta(ds)}{ds} = \frac{(\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho}; \quad (10)$$

Ainsi donc, les allongements des fibres longitudinales varient linéairement sur la hauteur de la section droite, toutes les fibres situées à la même cote y ont même allongement. Ce qui découle immédiatement de l'hypothèse des sections planes.

Introduisons la seconde hypothèse simplificatrice, qui suppose qu'en flexion les fibres longitudinales de la poutre n'exercent pas de pression les unes sur les autres, c'est-à-dire que dans le sens perpendiculaire à l'axe les contraintes sont nulles, autrement dit les fibres longitudinales se trouvent en état de compression ou traction monoaxial. Conformément à cette hypothèse, la relation entre les déformations des fibres ε et contraintes σ dans les sections droites s'exprime à l'aide de la loi de Hooke pour un état de contrainte monodimensionnel: $\sigma = E\varepsilon$. Sans cette hypothèse, on aurait utilisé la loi de Hooke pour un état de contrainte triaxial.

Par la loi de Hooke, on trouve la répartition des contraintes, également linéaire et proportionnelle à la distance à l'axe neutre,

$$\sigma = E\varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (11)$$

Les contraintes sont donc maximales aux bords de la section. Leur diagramme est présenté à la figure 1.20 ; les contraintes de traction sont positives, celles de compression—négatives.

Après avoir établi la loi de distribution des contraintes, on peut déterminer leur valeur à partir des conditions d'équilibre.

Déterminons d'abord la position de l'axe neutre à partir de la condition de nullité de l'effort normal, dans les sections de la poutre, en flexion simple :

$$N = \int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0, \quad \text{d'où} \quad \int_F y dF = 0.$$

Cette dernière intégrale n'est rien d'autre que le moment statique de l'aire de la section droite de la poutre par rapport à l'axe neutre. Elle est nulle, par conséquent, en flexion l'axe neutre passe par le

centre de gravité de la section. De plus, il est perpendiculaire à l'axe de symétrie de la section, ainsi, il présente un axe principal d'inertie de la section.

Annulons la somme des moments des forces par rapport à l'axe z :

$$\sum M_z = 0: -M_z + \int_F y \sigma dF = 0;$$

d'où l'on tire

$$M_z = \int_F y \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} I_z.$$

ensuite, la formule pour la détermination de la courbure de la couche neutre de la poutre

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (12)$$

Cette équation est analogue aux expressions $\varepsilon = \frac{N}{EF}$ et $\theta = \frac{M_t}{GI_t}$ et présente, proprement

parlant, l'équation de déformation en flexion.

En éliminant des équations (11) et (12) le rayon de courbure, on trouve l'expression des contraintes normales en flexion

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (13)$$

Ici, I_z est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre, et y – la distance de l'axe neutre à la fibre considérée.

La contrainte normale σ est ainsi positive – traction – pour $y > 0$ et négative – compression – pour $y < 0$; elle est d'autant plus grande que les fibres sont plus éloignées de l'axe neutre; elle atteint ses valeurs extrémales aux fibres extrêmes où elle vaut :

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} h_1; \\ \sigma_{\min} = -\frac{M_z}{I_z} h_2 \end{cases} \quad (14)$$

où h_1 et h_2 sont des distances des fibres extérieures à l'axe neutre (fig. 1.21).

Si l'on introduit la notion de moments de résistance à la flexion W_z , définis par les rapports

$$\begin{cases} W_{z1} = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{h_1}; \\ W_{z2} = \frac{I_z}{y_{\min}} = \frac{I_z}{h_2}; \end{cases} \quad (15)$$

on peut réécrire les contraintes (14) sous forme

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_{z1}} \quad \text{et} \quad \sigma_{\min} = -\frac{M_z}{W_{z2}}$$

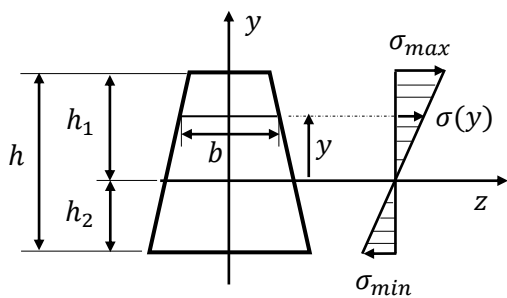


fig.1.21

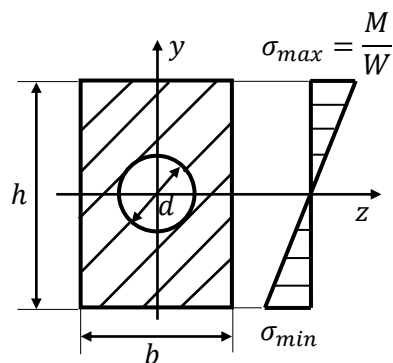


fig.1.22

D'habitude, la notion de moments de résistance s'introduit, seulement, pour les sections symétriques par rapport à l'axe neutre. Le moment de résistance à la flexion d'une section rectangulaire vaut

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6};$$

pour un anneau de diamètres extérieurs D et intérieurs d :

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right);$$

et pour la section présentée à la figure 1.22 :

$$W_z = \left(\frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right) : \frac{h}{2}.$$

Notons que le moment de résistance d'une figure composée ne vaut pas la somme des moments de résistance de ses parties simples.

Remarque : comme aucune confusion n'est à craindre, dans ce qui suit l'indice z sera omis.

1.7 Contraintes tangentielles en flexion simple

Lorsque le moment fléchissant M varie le long de la poutre, il s'accompagne forcément d'un effort tranchant Q . Ce dernier entraîne des contraintes tangentielles dans les sections droites et, en vertu de la loi de parité, dans les sections longitudinales également ; mais n'a que peu d'influence sur les contraintes normales. De sorte que les formules de détermination des contraintes normales (1.13) et (1.14), établies pour la flexion pure, restent aussi valables pour la flexion simple.

Afin d'établir la distribution des contraintes tangentielles en flexion simple, considérons deux sections infiniment voisines F_1 et F_2 distantes de dx (fig. 1.23) ; par une section longitudinale à distance y de la couche neutre, découpons l'élément en deux parties et considérons l'équilibre de la partie supérieure : les contraintes normales agissant sur les faces verticales sont respectivement σ et $\sigma + d\sigma$, l'accroissement $d\sigma$ résultant de la variation du moment M . Les contraintes tangentielles associées τ et $\tau + d\tau$ apparaissent simultanément sur les faces verticales et la face horizontale de largeur $b(y)$ au niveau de l'ordonnée y . De plus, elles sont considérées, compte tenu

de la petite largeur de la poutre, comme uniformément réparties suivant la largeur de la section

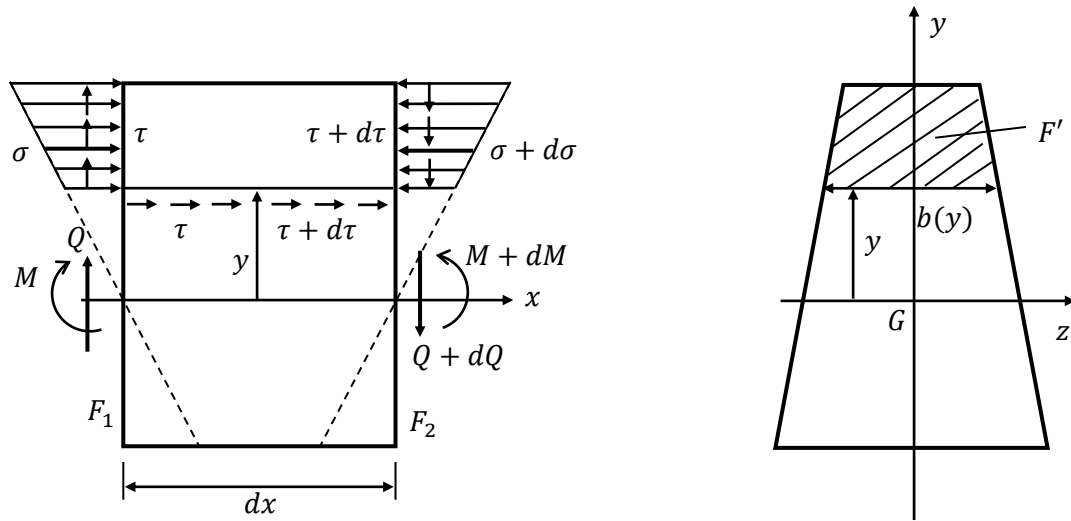


fig. 1.23

droite.

Ecrivons l'équation d'équilibre selon l'axe x de l'élément de poutre de section F' et de longueur dx

$$\sum x = \int_{F'} \sigma dF' - \int_{F'} (\sigma + d\sigma) dF' + b(y) dx \left(\tau + \frac{d\tau}{2} \right) = 0; \quad (16)$$

où $\int_{F'} \sigma dF'$ – résultante des forces normales élémentaires $\sigma dF'$, dans la section F_1 ;

$\int_{F'} (\sigma + d\sigma) dF'$ – résultante des forces élémentaires $(\sigma + d\sigma) dF'$, dans la section F_2 ;

$\left(\tau + \frac{d\tau}{2} \right) b(y) dx$ – résultante des forces tangentielles, dans la face horizontale;

$b(y)$ – largeur de la section au niveau y .

En portant dans équation (16) les expressions σ et $\sigma + d\sigma$ de l'équation (13) et en négligeant l'infiniment petit du second ordre $d\tau dx$, on obtient

$$\tau b(y) dx = \frac{dM}{I} \int_{F'} y dF'$$

L'intégrale figurant dans cette expression n'est rien d'autre que le moment statique de la section partielle F' , par rapport à l'axe Gz , noté S' et défini par l'égalité

$$S' = \int_{F'} y dF' \quad (17)$$

En prenant en considération que $dM = Qdx$, compte tenu des relations précédentes, l'expression de contraintes de cisaillement en flexion simple prend finalement la forme suivante

$$\tau = \frac{QS'}{Ib(y)} \quad (18)$$

Cette relation a été établie pour la première fois par Jourawski et porte son nom.

On relève que la contrainte τ est toujours nulle sur les fibres extrêmes puisque le rapport $S'/b(y)$ y est nul, même si la largeur $b(y)$ l'est aussi. En effet, quelle que soit la forme de la section de la poutre, le moment statique S' tend plus vite vers zéro que la quantité $b(y)$ au niveau y .

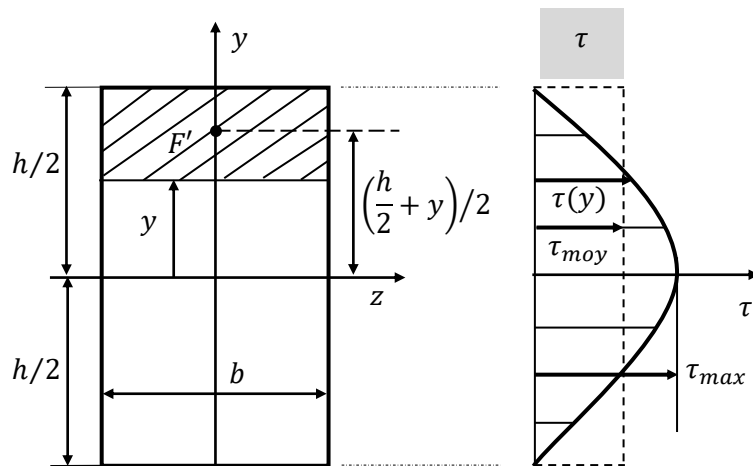


fig. 1.24

Exemple 1.5

Calculer les contraintes tangentielles τ dans une section rectangulaire de hauteur h et de largeur b d'une poutre soumise à la flexion simple. Refaire les calculs pour une section circulaire de rayon R .

Solution

Le moment statique de la section partielle F' se calcule immédiatement d'après la figure 1.24

$$S' = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$\text{ou à l'aide de l'intégrale (17); } S' = \int_y^{h/2} y dF' = \int_y^{h/2} y b dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Comme la largeur de la section est constante $b(y) = b$ et son moment d'inertie $I = bh^3/12$; les contraintes tangentielles τ s'écrivent d'après la relation (18)

$$\tau = \frac{QS'}{Ib} = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (19)$$

En prenant trois points, on a

$$\tau(y = 0) = \tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \tau_{moy}; \quad \tau \left(y = \frac{h}{2} \right) = \tau \left(y = -\frac{h}{2} \right) = 0$$

Où τ_{moy} représente la contrainte tangentielle moyenne dans la section, définie par le rapport

$$\tau_{moy} = \frac{Q}{F} = \frac{Q}{bh}$$

Remarquons que la répartition (19) des contraintes tangentielles τ le long de l'axe des y d'une section rectangulaire est parabolique et que la contrainte tangentielle maximale τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{moy} \text{ apparaît sur l'axe neutre: } y = 0.$$

Autrement dit, la contrainte tangentielle maximale est de 1,5 fois plus grande que la contrainte qui s'obtient sous l'hypothèse de distribution uniforme des τ suivant la section.

Exemple 1.6

Pour la section circulaire (fig.1.25), nous avons

$$I = \frac{\pi R^4}{4}; \quad dF' = b(y)dy;$$

$$b(y) = 2R \cos \varphi; \quad y = R \sin \varphi; \quad dy = R \cos \varphi d\varphi;$$

$$dF' = 2R^2 \cos^2 \varphi d\varphi;$$

Le moment statique de la section F' par rapport à l'axe z est calculé d'après la relation (8)

$$S' = \int_{F'} y dF' = \int_{F'} y b(y) dy$$

$$S' = \int_{\varphi}^{\pi/2} 2R^3 \cos^2 \varphi d(-\varphi) = \left| -\frac{2}{3} R^3 \cos^3 \varphi \right|_{\varphi}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{3} R^3 \cos^3 \varphi.$$

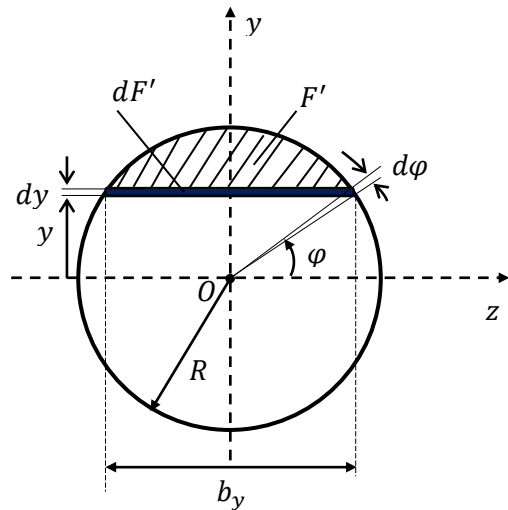


fig. 1.25

Les contraintes tangentielles (18) s'écrivent

$$\tau = \frac{QS'}{Ib(y)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) = \frac{4}{3} \tau_{moy} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$$

Comme pour la section rectangulaire, la contrainte tangentielle dans une section circulaire est une fonction parabolique, sa valeur maximale est atteinte sur l'axe neutre

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \tau_{moy}.$$

Exemple 1.7

Pour la section triangulaire de base b et de hauteur h (fig.1.26), on a

$$S'_z = S' = \frac{b(y)}{3} \left(\frac{2}{3}h - y\right) \left(\frac{h}{3} - y\right); I_z = I = \frac{bh^3}{36}.$$

En introduisant ces expressions dans (18), on a

$$\tau = \frac{12Q}{bh^3} \left(\frac{2}{3}h - y\right) \left(\frac{h}{3} + y\right);$$

La contrainte maximale a lieu sur la droite $y = h/6$,

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2F}.$$

Il faut retenir que, la formule de Jourawski ne détermine pas la contrainte tangentielle totale τ dans les points de la section, mais seulement la composante τ_{xy} de cette contrainte, parallèle au plan de sollicitation ou plus exactement à l'effort tranchant.

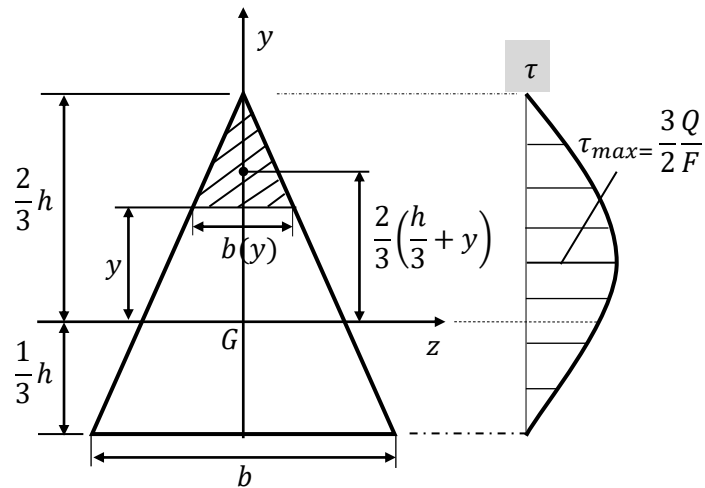


fig.1.26

Exemple 1.8

Evaluer les contraintes normales σ et tangentielles τ dans la section en forme de T d'une poutre droite soumise à un moment fléchissant $M = 11 \text{ kNm}$ et à un effort tranchant $Q = 8 \text{ kN}$ (fig.1.27, a).

Solution

Déterminons l'aire de la section F

$$F = bh_s + h_a t = 3t^2 + 5t^2 = 8t^2$$

Le centre de gravité G de la section

$$z_G = 0; y_G = \frac{S'_{z'}}{F} = \frac{bh_s(h_a + h_s/2) + th_a h_a/2}{F} = \frac{29}{8} t = 3,625t = h_t$$

Nous avons en définitive les distances h_t et h_c du centre de gravité G de la section aux fibres extrêmes

$$h_t = \frac{29}{8}t = 3,625t; \quad h_c = \frac{19}{8}t = 2,375t.$$

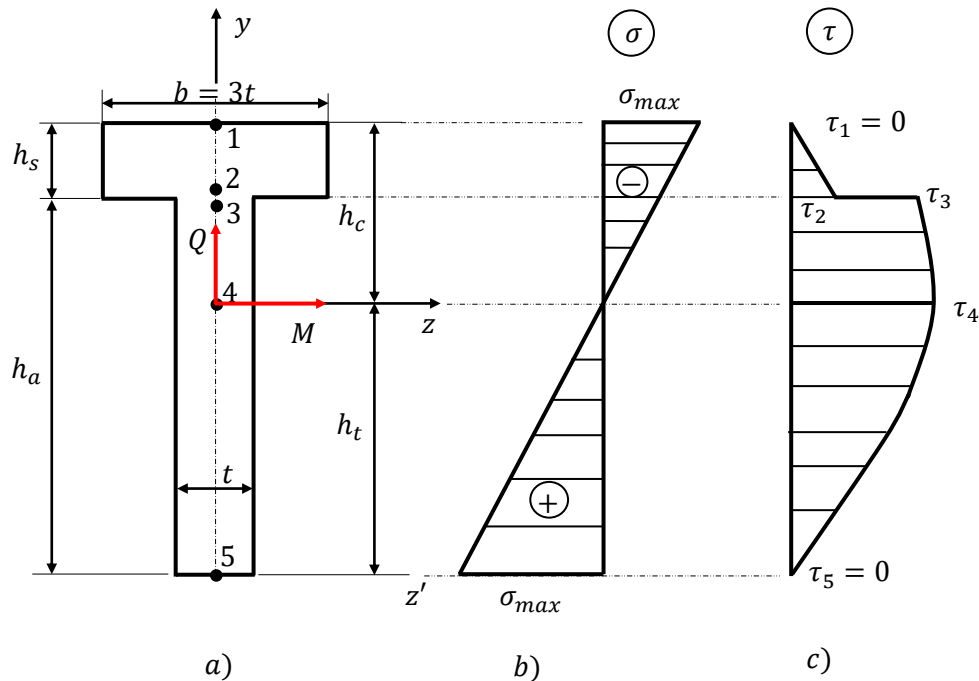


fig. 1.27

Les valeurs extrémales des contraintes normales σ sont atteintes sur les fibres extrêmes de la section.

Calculons le moment d'inertie axial de la section par rapport à l'axe z

$$\begin{aligned} I_z = I &= \frac{bh_s^3}{12} + \left(h_c - \frac{h_s}{2}\right)^2 bh_s + \frac{th_a^3}{12} + \left(h_t - \frac{h_a}{2}\right)^2 h_a t \\ &= \frac{t^4}{4} + \left(\frac{15t}{8}\right)^2 3t^2 + \frac{125t^4}{12} + \left(\frac{9t}{8}\right)^2 5t^2 = \frac{661}{24}t^4. \end{aligned}$$

Malgré le changement brusque de la largeur, les contraintes normales restent continues sur la hauteur de la section. Leur distribution est linéaire et a pour expression

$$\sigma(y) = \frac{M}{I}y$$

La contrainte de traction maximale en flexion vaut

$$\sigma_{tmax} = \frac{M}{I}h_t = \frac{11 \cdot 24}{661t^4} \cdot \frac{29}{8}t \cdot 10^{-3} = \frac{1,45}{t^3} \cdot 10^{-3} MPa$$

La contrainte de compression maximale a pour valeur

$$\sigma_{cmax} = -\frac{M}{I} h_c = -\frac{11 \cdot 24}{661t^4} \cdot \frac{19}{8} t \cdot 10^{-3} = -\frac{0,95}{t^3} \cdot 10^{-3} MPa$$

L'épure des contraintes normales est présentée à la figure 1.27, b.

Déterminons maintenant les contraintes tangentielles dans les points caractéristiques de la section, à l'aide de la formule de Jourawski

$$\tau = \frac{QS'}{Ib(y)} = \frac{8 \cdot 24 \cdot 10^{-3}}{661t^4 b(y)} S' = \frac{0,29 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{S'}{b(y)} MPa$$

Pour le point 1 :

$$S' = 0; \quad b(y) = b = 3t; \quad \tau_1 = 0.$$

Pour le point 2 :

$$S' = bh_s(h_c - h_s/2) = 3t^2(2,375t - 0,5t) = 5,625t^3; \quad b(y) = b = 3t;$$

$$\tau_2 = \frac{0,29 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{5,625t^3}{3t} = \frac{0,54 \cdot 10^{-3}}{t^2} MPa.$$

Pour le point 3 :

$$S' = bh_s(h_c - h_s/2) = 3t^2(2,375t - 0,5t) = 5,625t^3; \quad b(y) = t;$$

$$\tau_3 = \frac{1,63 \cdot 10^{-3}}{t^2} MPa.$$

Pour le point 4 :

$$S' = bh_s(h_c - h_s/2) + (h_c - h_s)t(h_c - h_s)/2 = \\ 3t^2(2,375t - 0,5t) + (2,375t - t)t(2,375t - t)/2 = 6,57t^3; \quad b(y) = t;$$

$$\tau_4 = \frac{0,29 \cdot 10^{-3}}{t^4} \cdot \frac{6,57t^3}{t} = \frac{1,9 \cdot 10^{-3}}{t^2} MPa.$$

Pour le point 5 :

$$S' = 0; \quad b(y) = t; \quad \tau_5 = 0.$$

L'épure des contraintes τ est présentée à la figure 1.27, c.