دراسة الحركة النقطة المادية والمستوي

علم الكينماتيكا : يدرس حركة الأجسام دون اعتبار كتلة الجسم أو القوي المؤثرة عليها .
نعرف الحركة في الميكانيك بأنها تغير موضع الجسم في الفراغ بمرور الزمن بالنسبة للأجسام الاخري.
ولتعين موضع الجسم المتحرك (أو النقطة المادية) ، نثبت مجموعة ما من محاور الإحداثيات تثبتا صلب بالجسم الذي ندرس الحركة بالنسبة له، ونسمي فيما بعد مجموعةالاحداثيات هذه بمجموعة القياس.
ولحل مسائل الحركة كينماتيكيا أو إعطاء قانون الجسم أو النقطة يعني إعطاء موضع هذا الجسم في كل لحظة زمنية بالنسبة لمجموعة القياس المعطاة.
ويعتبر تحديد الطرق الرياضية لإعطاء وصف حركة النقط احدي مسائل الكنيماتيكا الهامة.
ولذا فسنبدأ بدراسة حركة آي جسم بتحديد طرق إعطاء هذه الحركة .
وتنحصر المسالة الكينماتيكية الأساسية في تعين جميع الكميات الكينماتيكية ، التي تميز حركة كل نقطة من الجسم ، السرعة و التسارع ،.........الخ. بمعرفة قانون حركة الجسم
وينبغي لحل هذه المسالة إما إعطاء قانون حركة هذا الجسم مباشرة وإما قانون حركة أي نقطة تمنني لهذا **الجسم.**

طرق إعطاء حركة النقطة:

المسار

لإعطاء حركة نقطة ،يجب إعطاء موضعها في كل لحضه زمنية بالنسبة لمجموعة القياس المختارة .لإعطاء حركة النقطة علي منحنى يمكن تطبيق احدي الطرق الثلاث الآتية .

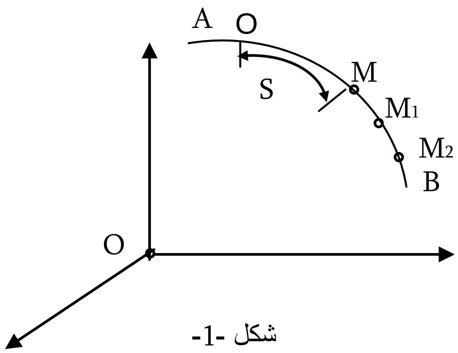
1- الطرقة الطبيعية لإعطاء حركة النقطة:

إن الخط المتصل الذي ترسمه النقطة أثناء حركتها بالنسبة لمجموعة القياس المقترضة يسمي بمسار النقطة.
إذا كان المسار خطا مستقيما فان الحركة تسمي بالحركة المستقيمة
إذا كان المسار خطا منحنيا فان الحركة تسمي بالحركة المنحنية.

لنفرض إن النقطة M تتحرك بالنسبة لمجموعة القياس ZYXO في مسار BA (شكل-1-)
انطلقا من النقطة ثابتة O في الاتجاه الموجب أثناء تنقل النقطة إلي المواضع التالية M ، M_1،

M_2....... فان المسافة المقطوعة مع مرور الزمن تسمي بمعادلة المسار أو قانون الحركة تعطي بالشكل التالي .

$$S = f\,(t) \qquad -1-$$



شكل -1-

وهكذا فلإعطاء حركة النقطة بالطريقة الطبيعية يجب إعطاء :

أ- مسار النقطة

ب- نقطة بداية القياس علي المسار.

ج- قانون الحركة

الحركة في خط مستقيم

إذا كانت حركة النقطة علي خط مستقيم فان المسار عبارة عن خط مستقيم و يكن لدينا $S = X$ (شكل-2-) و يصبح قانون الحركة كالأتي

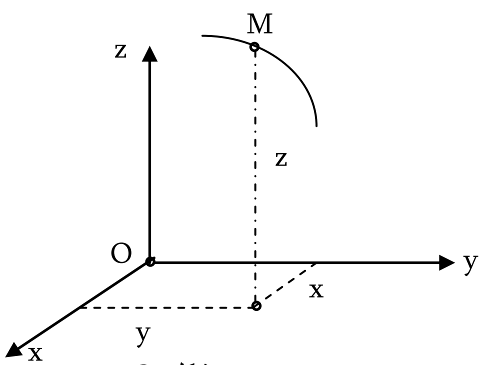
شكل -2-

$$X = f\,(t) \qquad -2-$$

2- طريقة الإحداثيات لإعطاء الحركة:

يمكن تحديد موضع النقطة بالنسبة لمجموعة القياس ZYXO بإحداثياتها الكارتيزية (شكل-3-).

لمعرفة قيمة كل إحداثي من إحداثيات النقطة في كل لحظة زمنية لا بد معرفة العلاقات التالية.



شكل -3-

$$x = f_1\,(t) \;،\; y = f_2\,(t)،\; z = f_3\,(t) \qquad -3-$$

المعادلات (3) هي معادلات حركة النقطة في محاور الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة.

إذا كانت حركة النقطة في مستوي واحد فإننا نحصل علي المعادلتين للحركة.

$$x = f_1\,(t) \;،\; y = f_2\,(t) \qquad -4-$$

مثال :

نفرض أن حركة نقطة مادية تعطي بالعلاقة التالية:

$$x = 2t \;،\; y = 12\,t^2$$

جد معادلة المسار

$x= t/2$ بالتعويض في المعادلة نحصل علي $y =3x^2$ إذا المسار عبارة عن قطع مكافئ

ونقطة أخري B من الجسم، بحيث ينتقل الجسم من موضع I إلي الموضع II تحتل النقطة A موضع النقطة B. إذا:

في اللحظة t_1 لدينا Aو B

وفي اللحظة t_2 A تحتل الموضع A_1 الذي ينطبق مع B
و B تحتل الموضع B_1.

نمد المستوي المار بالنقط A،A_1وB_1، ثم نسقط من النقطة O عمودا OD علي هذا المستوي عندها يمكن ملاحظة مايلي :

أولا $OA=OA_1=OB_1$ لأن الجسم جاسئ
و $AB=A_1B1$

ثانيا $AD=A_1D=B_1D$
للأنها تمثل إسقاطاتOB_1,OA_1,OA علي المستوى AA_1B_1.
ومنه نحصل علي تماثل المثلثات :

$$\Delta ADA_1=\Delta A_1DB_1$$

ومنه نحصل علي تساوي الزوايا أي:

$$\angle ADA_1=\angle A_1DB_1=\Delta\theta$$

فإذا دار الجسم حول ODبزاوية $\Delta\theta$ فان المثلثADA_1 ينتقل في مستواه وينطبق علي المثلث A_1DB_1 ، أي أن حركة الجسم ذي النقطة الثابتة من الموضع I إلي الموضع II تمت بحركة دوارنية واحدة حول المحور OD بزاوية $\Delta\theta$.

رغم آن البرهنة تمت باشتراط موضع معين للنقطة B الأ أنه كلما صغرت الفترة الزمنية Δt كلما كانت الإزاحة$\Delta\theta$ اقرب إلي إزاحة الجسم الحقيقية.

عندما $\Delta t\to 0$ يسمي DO بالمحور اللحظي لدوران الجسم ، عندها يدور الجسم بزاوية أولية $d\theta$.

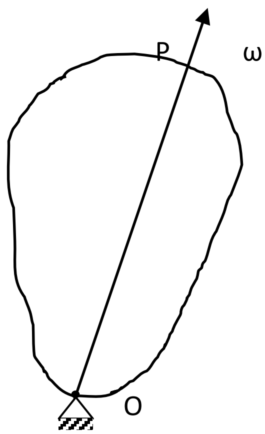
السرعة الزاوية:

Vitesse angulaire:

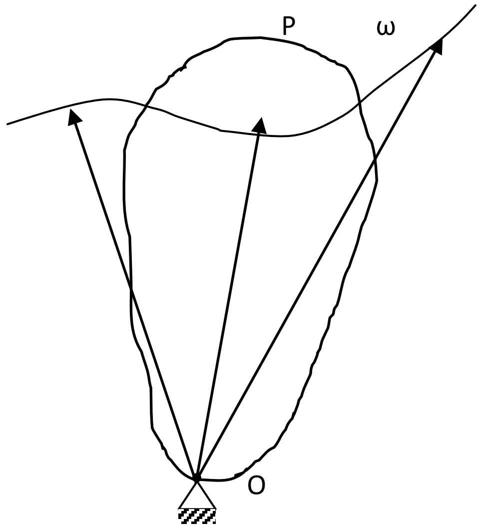
تعطي عبارة السرعة الزاوية للجسم ذي النقطة الثابتة في اللحظة الزمنية المعطاة :

$$\omega = \lim_{n\to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt}$$

تمثل السرعة الزاوية بمتجه$\vec{\omega}$ علي المحور op المار بالنقطة الثابتة O.



شكل -2-



شكل -3-

المحور اللحظي للدوران للجسم ذي النقطة الثابتة متغير الاتجاه فراغيا بدلالة الزمن.
فأي إزاحة منتهية للجسم تحصل من سلسلة من دورانات أولية متتالية بسرعات زاوية $\vec{\omega} = \vec{\omega}\,(t)$ حول مجموعة من المحاور اللحظية للدوران بتلك النقطة الثابتة O.
تشكل الأوضاع المتتالية ل ϖ سطحا مخروطيا ، ترسم A نهاية المتجهة $\vec{\omega}$ منحنيا ما علي هذا السطح (شكل 3).
تصاغ نظرية أيلوى -دالمبار كالأتي:
يمكن إزاحة جسم جاسئ ذي النقطة الثابتة O أي إزاحة بواسطة إدارته فقط حول المحور معين يمر بالنقطة O.

التسارع الزاوي للجسم الجاسئ ذي النقطة الثابتة:

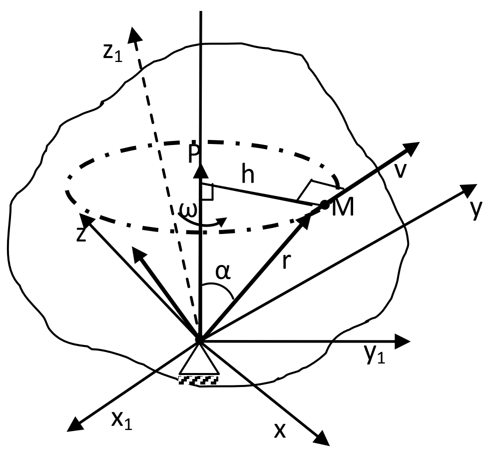
accélération angulaire d'un corps solide auteur d'un point fixe

التسارع الزاوي الذي يميز التغير في مقدار واتجاه السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ بالنسبة للزمن يعطي بالعلاقة . $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

بالاستناد إلي علاقة السرع $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ، يستنتج أن المتجه ϖ يتجه موازيا لمماس منحني نهاية المتجه $\vec{\omega}$ و$\vec{\varepsilon}$ خلافا لحالة الدوران حول المحور ثابت.

سرعات و تسارعات نقط الجسم ذي النقطة الثابتة:

بما أن للجسم في كل لحظة زمنية محور لحظي للدوران OP، إذا تحسب سرعة النقطة M من الجسم بالمعادلة(شكل-4-) :



شكل -4-

$$v = \omega h$$

حيث :

ω السرعة الزاوية للجسم

h بعد النقطة M عن المحور.

تتجه السرعة v عموديا علي المستوي MOP إلي ناحية دوران الجسم.

علميا يصعب استعمال عبارة السرعة الخطية هذه لأن البعد h متغير مع الزمن و يصعب تعيينه.

من اجل اجتياز هذه الإشكالية نستعين بالمعادلة :

$$|\vec{\omega} \wedge \vec{r}| = \omega . r\sin(\alpha)$$

كما هو واضح: ينطبق $\vec{v}$و$|\vec{\omega} \wedge \vec{r}|$ في الاتجاه و الوحدات القياس بالتالي فان.

$$\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{r}$$

إي أن متجهة سرعة أية نقطة M من نقط الجسم يساوي حاصل الضرب ألاتجاهي لمتجه السرعة الزاوية للجسم و متجه موضع النقطة.

تحليليا تعطي سرعة النقطة بــ:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

أي

$$\begin{cases} v_x = \omega_y . z - \omega_z . y \\ \\ \end{cases}$$

$$v_y = \omega_z . x - \omega_x . z$$
$$v_z = \omega_x . y - \omega_y . x$$

ملاحظة : شعاع السرعة لجسم جاسئ في حركة دورا نية حول نقطة ثابتة ، يساوي الجداء الشعاعي للسرعة الجسم في شعاع الموضع للجسم.

تسارع النقطة :

لتعين تسارع النقطة M نشتق علاقة السرعة :

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ومنه نجد أن :

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

حيث أن :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{و} \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

ومنه :

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

يسمي التسارع w_1 بالتسارع الدوراني للنقطة M ، يتجه عموديا علي المستوي المار بالنقطة M و المتجه ε ،(شكل-5-)

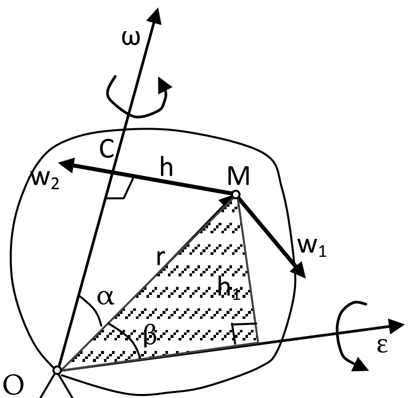
$$|\vec{w_1}| = \vec{\varepsilon} . \vec{r} \sin\beta = \varepsilon h_1$$

و يسمي التسارع w_2بالتسارع المتجه إلي المحور. w_2 علي ωو v و يتحه علي امتداد MC.

لأن($w = v.h$ $\qquad |\overrightarrow{w_2}| = \omega.v.\sin 90° = \omega^2.h$)

مع العلم أن :

$$\overrightarrow{w_1} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$$



شكل-5-

<u>نتيجة رياضية علمية</u> : اشتقاق متجه ثابت في المقدار

ليكن u(t) متجه ثابت في المقدار، لكنه متغير الاتجاه نتيجة دورانه بسرعة زاوية ω.

ليكن بداية و نهاية هذا المتجه تعرف بالنقطتين علي جسم A،B. من نقاط الجسم الجاسئ و الذي يدور بدوره بنفس السرعة الزاوية .

نكتب :

$$\vec{u} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

و باشتقاق طرفي المعادلة .

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

لان Bو A ينتميان إلي جسم جاسئ ذي النقطة الثابتة إذا.

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_B$$

عندها :

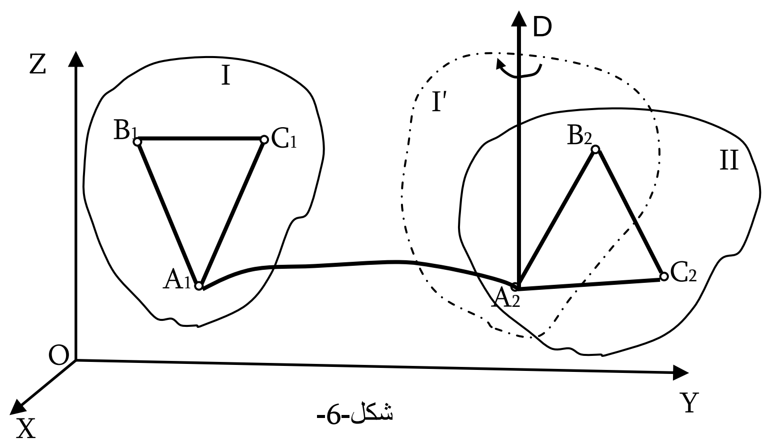
$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{\omega} \wedge \vec{u}(t)$$

إذا:

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}(t)$$

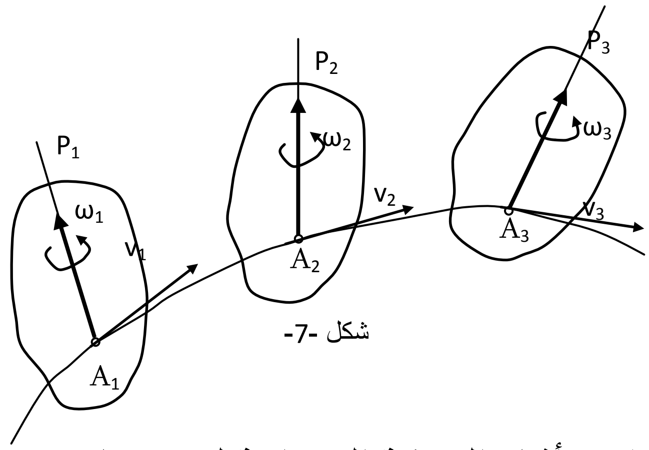
الحالة العامة لحركة الجسم الجاسئ الحر:

ليكن جسم جاسئ حر يتحرك كيفما اتفق في الفراغ.
بتحدد موضع هذا الجسم في الفراغ بالنسبة للمجوعة محاور ZYXO، بموضع ثلاثة نقط من نقطه لا تقع علي استقامة واحده.
نفرض أن الجسم في اللحظة t_1 يكون في الموضع I،وفي اللحظة t_2 ينتقل إلي الموضع II.



شكل-6-

تمثل هذه الإزاحة بـ : إزاحة انتقالية للجسم مع نقطة من نقطه (A_1مثلا) إلي الموضع I. و من اجل انتقال الجسم إلي الموضع II يجب إدارته حول محور يمر بالقطب A_2 نقطة ثابتة أي حول محور لحظي A_2D.(وكما تم إثباته)
و كنتيجة لذلك
تحصل حركة جسم جاسئ حر في الحالة العامة من حركة انتقالية خلالها كل نقط الجسم مع احد نقطه A و من سلسلة دورانات أولية حول محاور لحظية للدوران المار بالقطب A بسرعة زاوية ω.



شكل -7-

<u>**المحور اللحظي للدوران**</u> : أثناء الحركة الدورانية لجسم جاسئ حول نقطة ثابتة ، يوجد محور دوران لحظي حيث أن سرعته تساوي صفر.ولهذا نستنتج ان سرعة كل النقاط الواقع علي المحور فهي معدومة.

<u>**تعين سرعات وتسارعات نقط الجسم:**</u>

<u>السرعة :</u> تجمع سرعة أي نقطة M من نقط الجسم الجاسئ هندسيا :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} = \vec{v}_A + (\vec{w} \wedge \overrightarrow{AM})$$

أما التسارع يعين بطريقة متشابهة

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA}$$