المحورالأول: البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي تقنية رياضية تبحث عن حل أو حلول لمشكلة اقتصادية سواء كانت إنتاجية، مالية....الخ، وتمكن مستعملها من تخصيص موارد المؤسسة المحدودة على الاستعمالات المختلفة واختيار أفضل حل من بين الحلول الممكنة والذي يمثل الحل الأمثل.

1- <u>صياغة نماذج البرمجة الخطية</u>

لقد أصبح تبني الإدارة العلمية أو ما يسمى بالتحليل الكمي ضرورة حتمية لأي مؤسسة مهما كان شكلها وطابعها، خصوصا في ظل المنافسة الشرسة، محدودية الموارد و تعدد البدائل، و هذا ما استحدث وظيفة بحوث العمليات بالمؤسسات في الدول المتقدمة على غرار الوظائف الأخرى. فعملية اتخاذ القرار تكون منصبة على اختيار حل أمثل لمشكلة ما، يكون أساسها التفسير العلمي للمشكلة بدءً بتحديد المسألة وجمع المعلومات اللازمة عنها، تحديد البدائل، تقييمها و من ثم اختيار أمثلها، و أخيرا اتخاذ القرارات الرشيدة بأقل تكلفة و أكبر ربح ممكن.

قبل الخوض في الحديث عن الكيفية التي تتم بها صياغة و معالجة مثل هذه المسائل، تجدر بنا الإشارة إلى بعض المفاهيم المستعملة في ذلك:

أ - النموذج (*Le modèle*):

يُعرف النموذج على أنه الطبيعة الرياضية لمشكل ما.

ب - النمذجة (*La modélisation*):

و يقصد بعملية النمذجة صياغة و كتابة مشكل ما في شكل رياضي.

ت - البرمجة (*La programmation*):

و نعني بها التخطيط لتحقيق هدف معين، يتمثل في **الحل الأمثل**.

ث - الخطية (*Linéaire*):

نعني بها أن العلاقة بين متغيرات النموذج هي علاقة خطية، أي ان متغيرات النموذج من الدرجة الأولى.

ج - البرمجة الخطية (*La programmation Linéaire*):

اصطلاحا فإن كلمة **البرمجة** تعني سلسلة من الخطوات المنظمة يدويا أو آليا للوصول إلى الحل الذي يعظم أو يدني دالة النموذج في ظل مجموعة من القيود خلال فترة زمنية، و كلمة **خطية** تعني وجود علاقة خطية

بين متغيرات دالة الهدف أي تتغير قيم المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة أو في نفس الاتجاه زيادة أو نقصاً.

تعرف البرمجة الخطية على أنها أسلوب رياضي يهتم بتخصيص الموارد المتاحة بشكل أمثل على الاستخدامات المختلفة، بهدف تعظيم الأرباح أو تدنية التكاليف.

كما تُعرف على أنها أسلوب رياضي يساعد على اتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع أو التخصيص الأمثل لمجموعة من الموارد المحدودة على مجموعة من الاستخدامات المتعددة.

2- <u>شروط استخدام البرمجة الخطية</u>:

لاستخدام البرمجة الخطية ينبغي توفر شروط معين، من أهمها:

- تحديد المشكلة تحديدا رياضيا دقيقا بمتغيرات القرار، التي تكون معاملاتها على شكل ثوابت و معلومة مسبقاً، هذا كله لإيجاد دالة الهدف التي يمكنها قياس فعالية المؤسسة من خلال دراسة (الربح، كمية الإنتاج، التكاليف ... إلخ)، و الهدف من البرمجة الخطية هو تعظيم أو تقليل دالة الهدف حسب حاجة النموذج.
- لتحقيق غرض أو هدف البرمجة الخطية في دالة الهدف، يجب مراعاة الموارد المتاحة للمؤسسة أي عدم تجاوزها، و تظهر هذه الخاصية على شكل مجموعة قيود في صورة علاقات رياضية خطية بمتغيرات القرار (معاملاتها عبارة عن ثوابت محددة مسبقا)، و علاقة كل منها على شكل متباينة غالبا (أو مساواة) للتأكيد على عدم تجاوز الكميات المتاحة من الموارد.
- تتعلق كل من العلاقات الرياضية الخطية و متغيرات القرار في المسألة المدروسة ببعضها البعض بشكل وثيق، حيث أن أي تغيير من زيادة أو نقصان لأحد هذه المتغيرات يؤثر على مجموع المتغيرات من خلال تغيير بعضها أو كلها.
- إتباع شرط عدم سلبية المتغيرات القرار، أي كميات الإنتاج المنقولة من مركز لآخر التي تكبر أو تصغر دالة الهدف يجب أن لا تكون سالبة، و يساعد هذا الشرط على تحديد منطقة الحلول المقبولة ثم إيجاد الحل الأمثل.
- أن يكون لدينا عدد من المتغيرات التي تؤثر في تغيرها على القرارات المتخذة سواءٌ بالزيادة أو النقصان حسب البرنامج المقترح، و تؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه.

- يخضع تغير متغيرات القرار لحدود أو قيود تفرضها المواد المتاحة لدينا، و التي يمكن استخدامها في إنتاج كل أو بعض المنتجات، إلا أن طاقات الآلات محدودة و معروفة و الوقت المستغرق للإنتاج يكون أيضا معروفاً و محدوداً.

3- <u>فرضيات البرمجة الخطية</u>:

تستند البرمجة الخطية في أساسها النظري إلى مجموعة من الافتراضات الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها، و التي يمكن إجمالها فيما يلي:

أ/ الخطية: أي أن تكون العلاقة بين متغيرات المشكلة علاقة خطية، و هذا يعني أن تكون دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة على هيئة معادلات و متباينات من الدرجة الأولى.

ب/- عدم السلبية: و تعني أن كل المتغيرات التي تدخل ضمن دالة الهدف و معادلات و متباينات نموذج البرمجة الخطية يجب أن تكون غير سالبة (أي أكبر أو تساوي الصفر)، إذ لا يمكن أن يكون حجم الإنتاج على سبيل المثال سالباً بأي حال من الأحوال.

ج/- التأكد التام: أي أن جميع عناصر المشكلة محدودة و مؤكدة، فتقنية البرمجة الخطية تقتصر في تطبيقها على تلك المشاكل التي تتضمن اتخاذ القرار في ظل التأكد التام، فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التنبؤ أو التخمين، حيث أنه يُفترض العلم التام بالظروف و العلاقات التي سوف تسود في المستقبل، لذلك يجب أن تكون جميع معاملات المتغيرات في المسألة مؤكدة و ثابتة.

د/- قابلية التجزئة: أي أن حل مشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، و هذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار، و إذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة بالأعداد الصحيحة أو الرقمية.

هـ/- التناسبية: و تعني أن كل وحدة من وحدات الإنتاج المتماثل تستخدم الكمية نفسها من الموارد المتاحة، فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين، فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا الإنتاج.

4- مراحل صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

إن بناء النموذج الرياضي لأي مشكلة لابد أن يمر بخطوات تتمثل فيما يلي:

❖ **صياغة دالة الهدف (الدالة الاقتصادية):** يسعى متخذ القرار إلى تحقيق هدف معين، و تأخذ شكلين فقط إما التعظيم وإما التخفيض، وتكون دالة الهدف قد اتخذت الشكل العام التالي:

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \quad \text{أو} \quad Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

حيث أن: كلمة *Max* هي اختصار لكلمة *Maximisation* أي التعظيم،

وكلمة Min هي اختصار لكلمة : Minimisation أي التخفيض.

C_j : معاملات دالة الهدف، أي إما العائد الوحدوي أو التكلفة الوحدوية لكل منتج؛

x_j : رموز للكميات (عدد الوحدات) المنتجة لكل منتج، و هي المجاهيل التي نبحث عنها؛

j : مؤشر لعدد متغيرات (مجاهيل) النموذج و المقدرة بـ(n).

مثلا : في تعظيم الأرباح تكون دالة الهدف كالتالي:

$$Max\ Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

وترمز كل من x_1 ، x_2 ... x_n إلى عدد الوحدات المنتجة من المنتجات 1، 2، ... n على التوالي، أو إلى ما يجب أن تقتنيه المؤسسة من آلات أو وسائل نقل أو غير ذلك من متغيرات المشكلة، أما كل من c_1، c_2، ... c_n فهي ترمز إلى الربح المحقق بالوحدة الواحدة من المنتجات 1، 2، ... n على التوالي، و يرمز Z إلى الربح الكلي.

❖ **صياغة القيود:** هي محددات المشكلة التي لا يمكن تجاوزها و التي تؤدي إلى تحقيق الهدف، فقد تكون القيود ممثلة بالمواد الأولية أو العدد المطلوب من القوى العاملة أو ساعات العمل أو غيرها. كما تفرض هذه القيود قيوداً على ما يمكن تخصيصه من الموارد المتاحة لتحقيق هدف معين

مثل: ما يمكن إنتاجه من المنتوج أو ما يمكن بيعه أو ما يمكن نقله من مصنع معين أو الكميات الدنيا والقصوى الواجب تسليمها إلى مستودع معين أو إلى غير ذلك.

وتأخذ الشكل التالي:

$$\sum a_{ij} x_j \ (\geq , = , \leq)\ b_i$$

حيث أن:

a_{ij} : المعاملات الفنية، أي الكميات المستهلكة من الموارد (الطاقات الإنتاجية) للإنتاج الوحدوي من المنتجات؛

b_i : الكميات المتاحة من الموارد؛

i : عدد الأسطر، و هي بعدد القيود (m)؛

j : عدد الأعمدة، و هي بعدد المتغيرات أي المجاهيل (n).

❖ **شرط عدم سلبية المتغيرات:** أي أن الكميات المستهدفة لمتغيرات القرار لا يمكن أن تكون سالبة، لأن ذلك ليس له معنى في الواقع، و بتعبير آخر لا يمكن للمؤسسة أن لا تنتج منتوجاً معينا و لكن لا يمكن أن تستهدف إنتاج كمية سالبة، و بالتالي يمكن التعبير عن شرط عدم السلبية كما يلي:

$$0 \leq x_n \dots ، x_2 ، x_1$$

- **وللإشارة فإن مسائل البرمجة الخطية يمكن تمثيلها وفق ثلاث صيغ هي:**

1 - **الصيغة العامة (المختلطة) (*Forme mixte*):** عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات (≤ ، = ، ≥).

2 - **الصيغة القانونية (*Forme canonique*):** هي الصيغة التي تحتوي على إشارتي ≤ أو ≥ فقط.

✓ فإذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو تساوي فإننا نبحث عن التعظيم(Max)؛

✓ أما إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي، فإننا نبحث عن التخفيض(Min).

3 - **الصيغة المعيارية (*Forme standard*):** هي الصيغة التي تحتوي على إشارة = فقط.

مثال :

تقوم مؤسسة ما بإنتاج الكراسي و الطاولات و بيعها للمدارس، حيث أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 صفائح خشبية و 4 قطع من الحديد، و بعد بيعه يحقق ربحا قدره 250 دج، أما إنتاج الطاولة الواحدة فيتطلب 6 صفائح خشبية و 7 قطع من الحديد، و بعد بيعها تحقق ربحا قدره430 دج، حيث أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 180 قطعة خشبية و 320 قطعة من الحديد.

فما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كلا المنتجين، و التي تحقق لمؤسسة أكبر ربح ممكن؟

الحل:

تمثيل معطيات المثال :

	الخشب	الحديد	الربح
الكراسي	3	4	250
الطاولات	6	7	430
الكمية المتاحة	180	320	

1- تحديد متغيرات القرار:

x_1: تمثل كمية الكراسي التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أكبر ربح؛

x_2: تمثل كمية الطاولات التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أعظم ربح.

2- صياغة دالة الهدف: إن ربح المؤسسة ناتج عن إنتاج و بيع كل من الكراسي و الطاولات و عليه:

2-1- إنتاج الكراسي:

إنتاج 1 كرسي يحقق ربحا قدره (1×250)

إنتاج 2 كرسي يحقق ربحا قدره (2×250)

إنتاج x_1 كرسي يحقق ربحا قدره $(x_1 \times 250)$

2-2- إنتاج الطاولات:

إنتاج 1 طاولة يحقق ربحا قدره (1×430)

إنتاج 2 طاولة يحقق ربحا قدره (2×430)

إنتاج x_1 طاولة يحقق ربحا قدره $(x_2 \times 430)$

و عليه و بما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$Max\ Z = 250\,x_1 + 430\,x_2$$

3- صياغة القيود الوظيفية: فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها.

3-1- المادة الأولية الأولى (الخشب): تمثل كمية الخشب الكلية مجموع الخشب المستخدم في إنتاج الكراسي $(x_1 \times 3)$ و الخشب المستخدم لإنتاج الطاولات $(x_2 \times 6)$ و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـ 180 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 180$$

2-3- المادة الأولية الثانية (الحديد): تمثل كمية الحديد الكلية مجموع الحديد المستخدم في إنتاج الكراسي (x_1 × 4) و الحديد المستخدم لإنتاج الطاولات (x_2 × 7) و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـ 320 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4x_1 + 7x_2 \leq 320$$

4- قيود عدم سلبية المتغيرات: حيث أن إنتاج كل من الكراسي و الطاولات لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما يكون موجبا أو معدوما، و هو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

و عليه و بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف $Max\ Z = 250x_1 + 430x_2$

تحت القيود $Soumise\ aux\ contraintes$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 180 & \text{قيد الخشب} \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 320 & \text{قيد الحديد} \\ x_1 \geq 0 & \text{قيد عدم سلبية المتغيرة الأولى} \\ x_2 \geq 0 & \text{قيد عدم سلبية المتغيرة الثانية} \end{cases}$$