Chapitre I / Intégrales simples et l'Intégrale Impropre

I-1 Rappel sur l'Intégrale simple

soient deux nombres réels a, b, avec $a < b$ et une fonction $f(x)$ réelle définie et bornée sur l'Intervalle fermé $[a,b]$ alors l'Intégrale définie de f sur $[a,b]$, que l'on note

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta_i$$

pour laquelle nous considérons toutes les subdivision de l'intervalle $[a,b]$ en n sous-Intervalles $[a_{i-1}, a_i]$, dont la longueur de chacun de ceux-ci est notée $\delta_i = (a_i - a_{i-1})$, en y laissant n, le nombre de ces sous-Intervervalles, devenir de plus prés de zéro, et x_i peut être n'importe quel point de l'intervalle $[a_{i-1}, a_i]$

* (il faut) fonction à Intégrer $f(x)$. est continue sur $[a,b]$ alors l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ éxiste.

Ce que nous avons définie est l'intégrale de Riemann et la somme $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ si est une somme de Riemann.

① Définition 2 :

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ on dit que f est Intégrable sur $[a,b]$ si il existe F tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

tel que $F'(x) = f(x)$

F : Primitive de f

* si f est continue sur $]a,b[$ alors f est Intégrable

Exemple :

si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, alors $[a,b] = [1,2]$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = x^3 - x^2 + x \Big|_1^2 = 5$$

Car $F(x) = x^3 - x^2 + x$ est une primitive pour $f(x)$. En effet

$$[x^3 - x^2 + x]' = 3x^2 - 2x + 1$$

Intégrale double

Intégrale double

Généralités : rappellons que l'Intégrale I d'une fonction f sur $[a,b]$ est définie par

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)\,(f(c_i))$$

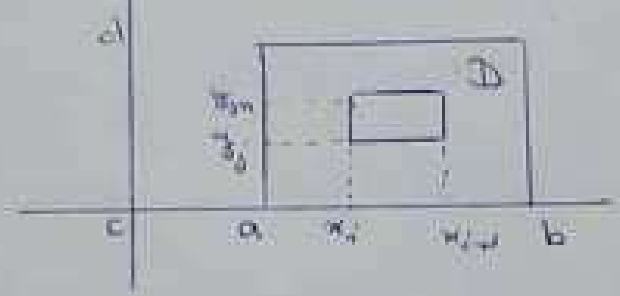
avec $x_i \leq c_i \leq x_{i+1}$

* Soit $f(x,y)$ une fct supposée continue sur un domaine $D = [a,b]\times[c,d]$ (rectangle)

Soit δ_1 et δ_2 deux subdivison associé à $[a,b]\times[c,d]$ respectivement tel que:

$$\delta_1 = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, x_{n+1} = b\}$$
$$\delta_2 = \{c = y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p, y_{p+1} = d\}$$

donc on peut associé un partage du Domaine en rectangles élémentaires $[x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$



on considère la somme S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} f(x_i, y_j)\,\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x_i}\,\underbrace{(y_{j+1} - y_j)}_{\Delta y_j}$$

Définition

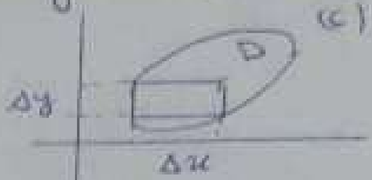
Si f est continue sur D alors la somme S admet une limite quand n et p tend vers l'infinie, et elle limite s'appelle Intégrale double de f sur le domaine d'intégration D i.e

$$I(f) = \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \lim_{\substack{n \to +\infty \\ p \to +\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} f(x_i, y_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j$$

Remarque :/

La définition s'applique aussi ds le cas ou le domaine D n'est pas rectangulaire et limité par une courbe C



Propriétés/

$$\iint_{(D)} [f(x,y) + g(x,y)]\,dx\,dy = \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D} g(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_{(D)} \lambda f(x,y)\,dx\,dy = \lambda \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy$$

* $\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$ si f est intégrable sur D_1 et D_2

* si $f(x,y) \geq 0$ sur $D \Rightarrow \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$

* $\left| \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_{D} |f(x,y)|\,dx\,dy$

* si $f = 1$ on a $\iint_{D} dx\,dy = m(D)$

* si $f \geq 0$ ($\iint_{D} f \geq 0$ Le volume (D de xoy et $f(x,y)$)

Calcul des Intégrales doubles en Coordonnées Cartésiennes

Soit D un domaine d'intégration de $\mathbb{R}^2$ Limité par une courbe (c)

$$I(f) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ p \to +\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} f(x_i,y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

Soit La somme $S_i = \sum_{j=1}^{p} f(x_i,y_j)(y_{j+1}-y_j)$

(le cas où x_i fixe)

par définition L'intégrale simple

$$S_i \longrightarrow J(x_i) = \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x_i,y)\,dy$$

de $(c) \cap (x = x_i)$

courbe droite

Alors $I(f) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} J(x_i)\,\Delta x_i =$

$$= \int_a^b \left[\int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Rem : La notation

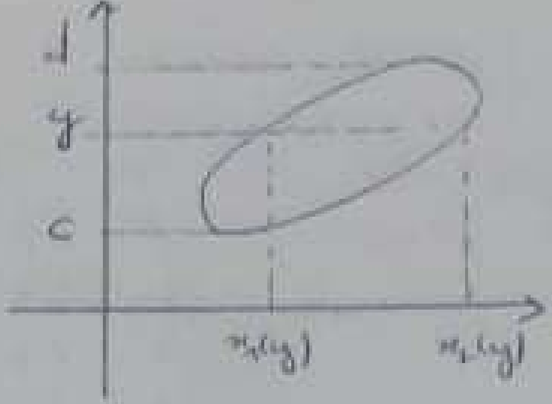
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

est une succession d'intégrale simples et non une produit

Remarque/

si on échange les rôles de x et y on obtient la même valeur de l'intégrale

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$



Si le domaine $D = [a,b] \times [c,d]$ rectangulaire

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$
$$= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

- Si la fonction $f(x,y)$ est à variable séparées

$$f(x,y) = F(x)\,G(y) \quad \text{alors}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx \int_c^d G(y)\,dy$$

c-à-d :

L'intégrale double devient un produit d'intégrales simples

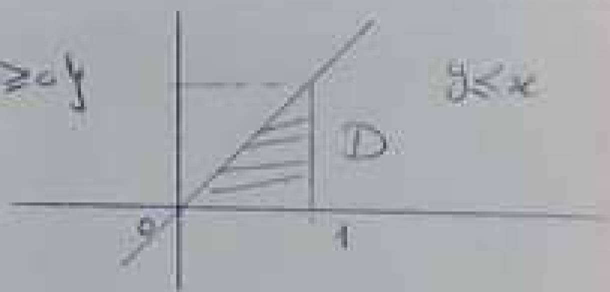
<u>Exemple</u> /

* Calculer l'intégrale double de la fct $f(x,y) = x \cdot y$ sur D tel-que

$D = [0,1] \times [0,1]$

$D = \{ (x,y) / 0 < x < 1 \ , \ x - y \geq 0 \}$

$y < x$

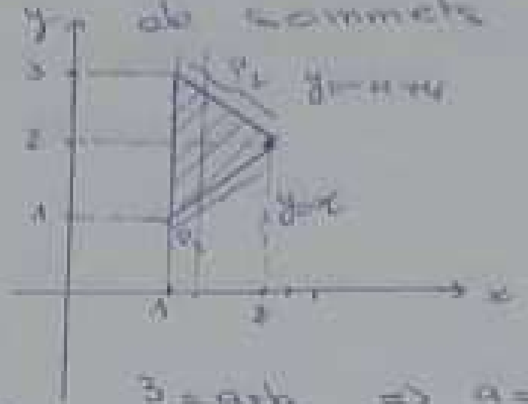


* $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ , \ f(x,y) = x^3 e^y , \ D = [-1,1] \times [-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} x^3 e^y \,dx\,dy = \int_{-1}^{1} x^3\,dx \int_{-1}^{1} e^y\,dy = 0$$

Exemple 02

$\iint_{D} xy\,dx\,dy$ où (D) est le triangle de sommets $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$



$y = ax+b$, $\quad 3 = a+b$, $\quad 2 = 2a+b \Rightarrow a=-1,\ b=4$

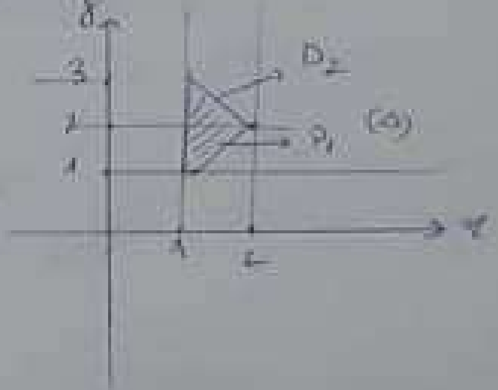
$$\iint_{(D)} xy\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_x^{-x+4} xy\,dy\right)dx = \int_1^2 x\left(\tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_x^{-x+4} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 x\left((4-x)^2 - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (16x - 8x^2)\,dx$$

$$I = \frac{8}{3}$$

$2^{ème}$ méthode :

$D = D_1 \cup D_2$



$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^y xy\,dx\right)dy + \int_2^3 \left(\int_1^{4-y} xy\,dx\right)dy$$

$$= \int_1^2 \frac{y}{2}(x^2)\Big|_1^y dy + \int_2^3 \frac{y}{2}(x^2)\Big|_1^{4-y} dy = \frac{8}{3}$$

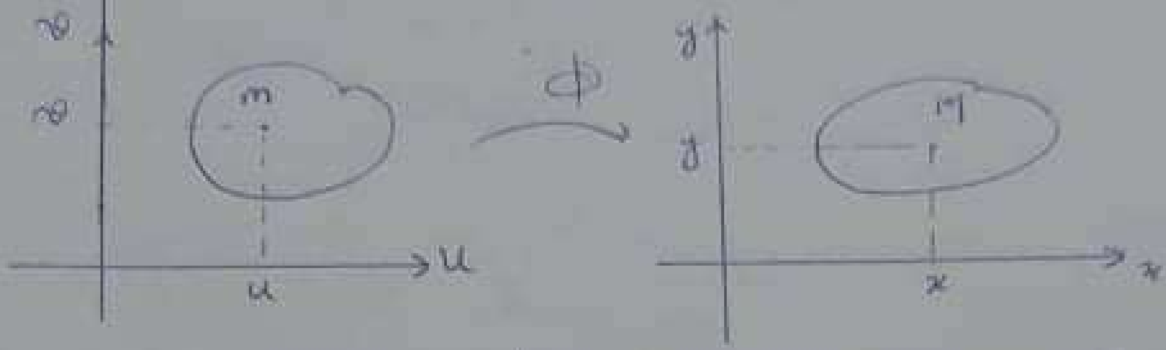
...hangement de variable

- Jacobien d'une transformation ponctuelle

Soit D et Δ deux sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

Soit ϕ une application bijective de Δ sur D

$$\phi : \Delta \longrightarrow D$$
$$(u,v) \longrightarrow (x(u,v), y(u,v))$$



On considère qu'à tout point $m(u,v)$ on associe par ϕ le point $M(x,y)$, Les fcts $x(u,v)$ et $y(u,v)$ admettant des dérivées partielles premières continues sur Δ

On appelle Jacobien de ϕ le déterminant noté

$$J(\phi) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Exemple/

- Soit $x = u+v$, $y = u-v$ $\Rightarrow J(\phi) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

- Calculer $\iint_{(D)} xy \, dx\, dy$

$(D) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ ax^2 \leq y \leq bx^2, \ \frac{c}{x} \leq y \leq \frac{d}{x} \right\}$

on pose: $u = \frac{y}{x^2}$, $v = x \cdot y$

$(x,y) \in (D) \Leftrightarrow (u,v) \in [a,b] \times [c,d]$

$$u = \frac{y}{x^2} \qquad x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}$$

$$v = xy \quad \Rightarrow \quad y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}$$

$$\phi : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow D$$

$$(u,v) \longrightarrow \phi(u,v) = (x,y)$$

$$= (u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}})$$

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3u}$$

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \frac{1}{3\cancel{u}} \int_a^b \left(\int_c^d \frac{v}{u} \, dv \right) du$$