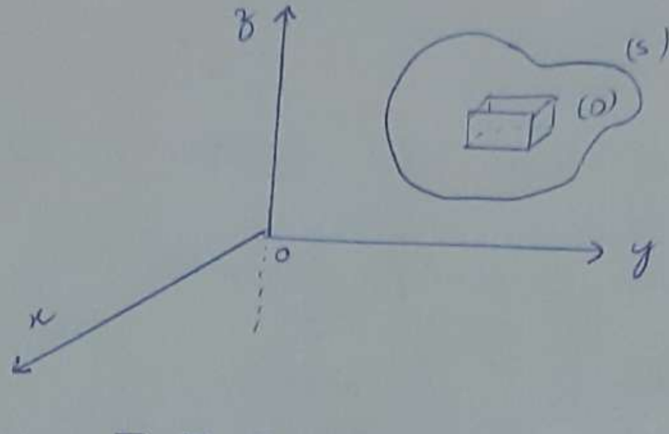
Intégrale triple

① Définition :

Soit $f(x,y,z)$ une fct continue sur $D \subset \mathbb{R}^2$, On peut envisager le partage du domaine D parallélipipèd élémentaires $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$ (متوازي المستطيلات)
posant $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $\quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$



on a : $S = \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

On admet que si f est continue sur $\mathcal{D}$, (S) admet une limite quand le nombre de parallélipipèdes augmente indéfiniment c'est ce qu'on note par $\iiint_D$. notation similaire à celle $\iint$ on note

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Cas particulier

* si $f(x,y,z) = 1$, L'intégrale devient le volume du domaine $D \subset \mathbb{R}^2$,

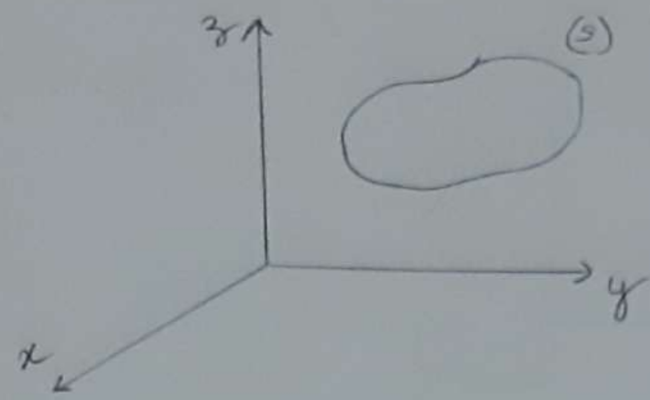
Propriétés

Les propriétés de $\iiint$ sont similaires à celle de $\iint$, soient f et g deux fcts continues sur D et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

* $\iiint f + g = \iiint f + \iiint g$
* $\iiint f \cdot g = \iiint f \cdot \iiint g$
* $\iiint \lambda f = \lambda \iiint f$
* si D_1 et D_2 deux domaines disjoints

$\iiint_{D_1 \cup D_2} f = \iiint_{D_1} f + \iiint_{D_2} f$ $\quad$ * si $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$

Calcule des Intégrales triples



Soit (S) la surface limitant un domaine D

Définition:

$$I(f) = \iiint_{(D)} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \lim_{\substack{n \to +\infty \\ p \to +\infty \\ k \to +\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Considérons la somme

$$\begin{cases} S_{ij} = \sum_{k=1}^{q} f(x_i, y_j, z_k)(z_{k+1} - z_k) \\ x_i, y_j \text{ fixé} \end{cases}$$

Soient P_1, P_2 deux points de la surfase(S) projeter sur le plan xoy $M_{ij} = (x_i, y_j)$

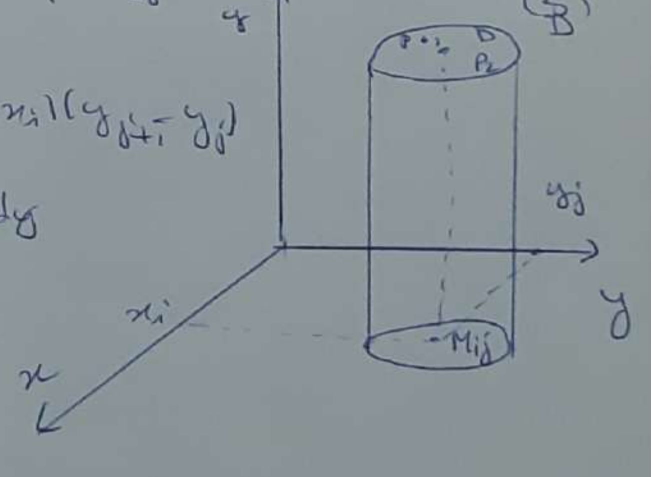
quand $q \to +\infty$

$$S_{ij} \to J(x_i, y_j) = \int_{z_1(x_i,y_j)}^{z_2(x_i,y_j)} f(x_i, y_j, z)\, dz$$

quand: $q \to +\infty$

$$I = \lim_{n,p \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} J(x_i, y_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

$$= \iint_d J(x,y)\, dx\, dy$$



d projection de D sur xoy

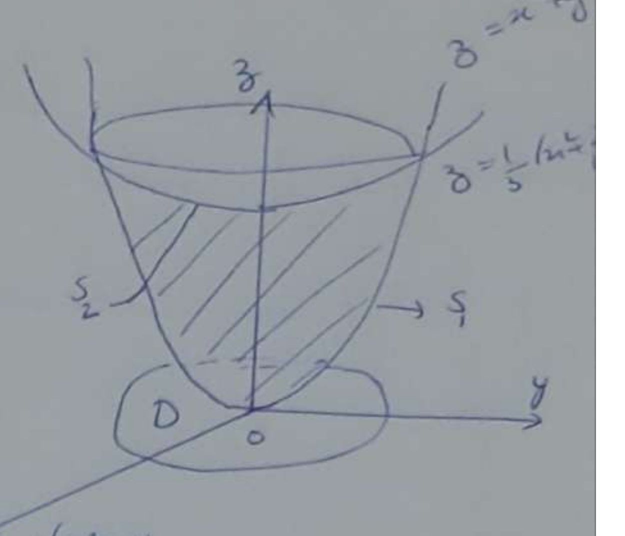
on a donc

$$I = \iint_d \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)\, dx\, dy\, dz \right.$$

$$= \iint_d dx\, dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

exemple : $\iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /$
$x^2+y^2 \leq z \leq \frac{1}{3}(x^2+y^2)+2 \}$



$x^2+y^2 = \frac{1}{3}(x^2+y^2)+2$
$\Rightarrow x^2+y^2 = 3$
$z = 3$

$$\iiint_{\Omega} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz = \iint_{D(0,\sqrt{3})} \int_{x^2+y^2}^{\frac{1}{3}(x^2+y^2)} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \iint_{D(0,\sqrt{3})} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(z^2\right) \Big|_{x^2+y^2}^{\frac{1}{3}(x^2+y^2)+2} dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{D(0,\sqrt{3})} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{1}{3}(x^2+y^2)+2 \right)^2 - (x^2+y^2)^2\, dx\, dy$$

$x = r\cos\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$
$y = r\sin\theta \qquad r \in [0, \sqrt{3}]$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\left(\frac{1}{3} r^2+2\right)^2 - r^4 \right) dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(\left(\frac{1}{3} r^2+2\right)^2 - r^4 \right) dr$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}\ 56}{15}$$

Remarque :

si $f(x,y,z)$ est à variable séparé alors L'intégrale triple $\iiint_D$ se résume à un produit de L'intégrale simple

si non $\iiint_D$ est une succession de $\iint$ et $\int$ ou une succession de trois intégs $\int$.

changement de variable :

soient h, g, k des fcts de C^1 et soit T bijection

$$T : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

$$(u,v,w) \longrightarrow (k(u,v,w),\ g(u,v,w),\ h(u,v,w))$$

$$x = k(u,v,w),\ y = g(u,v,w),\ z = h(u,v,w)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega'} f(k(u,v,w)), g(u,v,w), h(u,v,w))\ |J|\, du\, dv\, dw$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Exemple :

Calculer $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz$

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^{3+} \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega'} |J|\, dX\, dY\, dZ$$

$$\Omega' = \{ (X,Y,Z) \,/\, X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1 \}$$

$$\begin{cases} x = aX \\ y = bY \\ z = cZ \end{cases} \qquad J = abc$$

$$\iiint_{\Omega'} |J|\, dX\, dY\, dZ = abc \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{1-X^2-Y^2}} dZ \right) dX\, dY = \frac{1}{2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

Coordonnées Cylindrique :

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta \qquad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]$
$z = z$

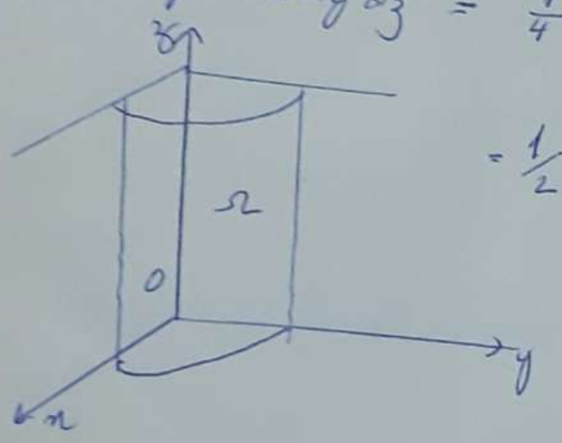
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

Exemple 01 :

Calculer $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz.$

$\Omega = \{(x,y,z) / \; x^2+y^2 \leq 1, \; 0 \leq z \leq 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0\}$

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{4}\iint_{D(0,1)} \left(\int_0^1 z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right) dx\,dy$$



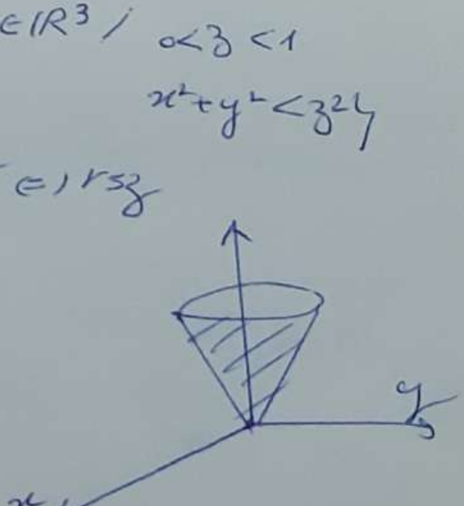
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{12}$$

Exemple 02 :

$\iiint_{(V)} xyz\,dx\,dy\,dz \qquad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; 0 < z < 1, \; x^2+y^2 < z^2\}$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta \qquad x^2+y^2 = z^2 \Leftrightarrow r^2 = z^2 \Leftrightarrow r \leq z$
$z = z$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{z}\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta\,dz = 0$$



Coordonnées : sphériques

$x = r\cos\theta \sin\varphi$

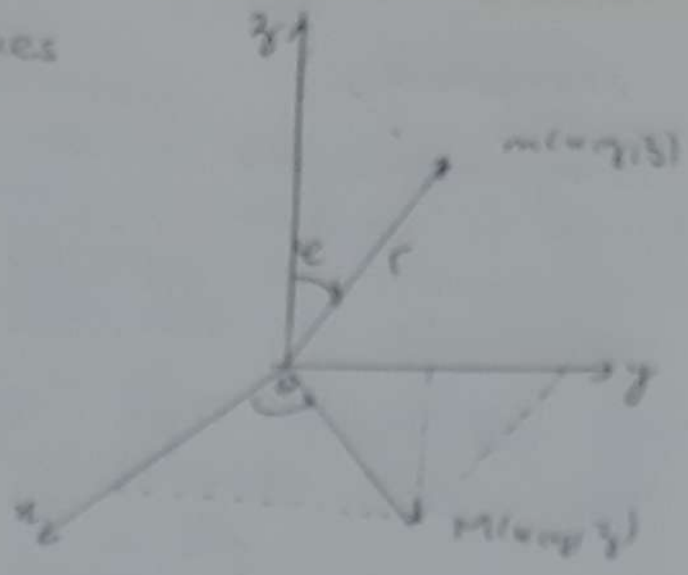
$y = r\sin\theta \sin\varphi$

$z = r\cos\varphi$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$\varphi \in [0, \pi]$

$r \in [0, +\infty]$



$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta \sin\varphi & -r\sin\theta \sin\varphi & r\cos\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & r\cos\theta \sin\varphi & r\sin\theta \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin\varphi$$

$$\iiint_{(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D} f(r\cos\theta \sin\varphi, r\sin\theta \sin\varphi, r\cos\varphi)\, r^2 \sin\varphi \,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Exemple : Calculer

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{z}\right) dx\,dy\,dz$$

$V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad 0 < x^2+y^2+z^2 < 1 , 0 < x^2+y^2 < z^2, z > 0 \}$

$x = r\cos\theta \sin\varphi$ $\quad x^2+y^2 = r^2\sin^2\varphi$

$y = r\sin\theta \sin\varphi$

$z = r\cos\varphi$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{1} \left(\frac{1}{r\sin\varphi} + \frac{1}{r\cos\varphi}\right) r^2 \sin\varphi \,d\varphi\,d\theta\,dr$$

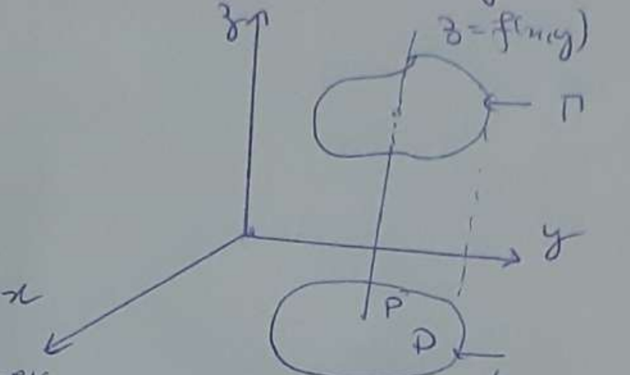
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} (r\sin\varphi + r\,tg\varphi)\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

$$= \pi/4 - \pi \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Calcul des aires de surface

Soit a calculer l'aire limitée par une courb Γ tracée sur une surface, la surface est donnée par une équation $z = f(x,y)$ où $f(x,y)$ est continue et possède des dérivées partielles continues

Soit "L" la bijection de Γ sur le plan Oxy désignons le domaine du plan Oxy limité par L par D



La formule permettant de calculer l'aire de la surface $z=f(x,y)$ est donnée par

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

Exemple:

Calculer l'aire σ de la sphère $x^2+y^2+z^2=4$

$$z = \pm \sqrt{4-x^2-y^2}$$

Calculons l'aire de la demi-sphère supérieur

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

alors $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2-y^2} + \frac{y^2}{4-x^2-y^2}}$

$$= \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$ définie pour $x^2+y^2 \leq 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

pour le calculer on prend $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$