المحاضرة 2: حل نماذج البرمجة الخطية

حل نماذج البرمجة الخطية: يعني إيجاد قيم المتغيرات (X_i) التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أوفي حالة تدنية. و عليه فإن الحل يمثل كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية.

و يمكن التمييز بين ثلاثة أنواع من الحلول:

- ✓ **الحل المقبول (*Solution réalisable*):** هو كل قيم متغيرات القرار (X_i) التي تحقق القيود الوظيفية وقيد عدم سلبية المتغيرات؛
- ✓ **الحل غير المقبول (*Solution non réalisable*):** هو كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية و **لا** تحقق قيد عدم سلبية المتغيرات.
- ✓ **الحل الأمثل (*Solution Optimale*):** نسمي حلاً أمثلاً كل حل مقبول والذي يعطي لدالة الهدف أمثل قيم، أي أعظم قيمة في حالة *Max*، و أدنى قيمة في حالة *Min*.

أولا- حل البرامج الخطية باستخدام الطريقة البيانية:

تستخدم طريقة الرسم البياني لإيجاد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية في معلم متعامد ومتجانس ، و تعتبر من أسهل الطرق و التي تُستعمل فقط في حالة وجود متغيرين ولا تصح في حالة وجود أكثر من متغيرين.

1-1- **خطوات الحل باستعمال الطريقة البيانية:** تتمثل خطوات الحل وفق الطريقة البيانية فيما يلي:

- ❖ **الخطوة الأولى:** يتم رسم القيود على أنها معادلات مستقيمات، و ذلك كما يلي:

بالنسبة للقيد الأول يتم افتراض أن أحد المتغيرين معدوم و بالتالي يمكن حساب المتغير الآخر، و نفس الشيء يتم افتراض أن المتغير الثاني معدوم ليتم حساب المتغير الأول، و بهذا تكون لدينا نقطتان يتم من خلالهما رسم مستقيم القيد الأول. و بنفس الطريقة يتم رسم مستقيمات باقي القيود.

- ❖ **الخطوة الثانية: يتم إسقاط القيود على الرسم البياني، حسب اتجاه المتراجحات، وذلك بشطب المناطق التي لا تحقق كل الشروط (القيود) وقيد عدم سلبية المتغيرات.** حيث أنه:

- ✓ إذا كانت العلاقة في القيد أقل أو يساوي $\leq$ فإن اتجاه الحل سوف يكون أسفل المستقيم؛ أي يتم شطب المناطق التي تكون في أعلى المستقيم.
- ✓ إذا كانت العلاقة في القيد أكبر أو يساوي $\geq$ فإن اتجاه الحل سوف يكون أعلى المستقيم؛ أي يتم شطب المناطق التي تكون في أسفل المستقيم.
- ✓ إذا كانت العلاقة في القيد مساواة = فإن اتجاه الحل سوف يقع على الخط؛ وبالتالي كل النقاط التي على المستقيم تحقق القيد.

- ❖ **الخطوة الثالثة:** تحديد منطقة الحلول الممكنة (المقبولة)

وهي المنطقة غير المشطبة في الرسم البياني.

❖ الخطوة الرابعة: ايجاد الحل الأمثل

وذلك بتعويض حدود منطقة الحلول في دالة الهدف، و إيجاد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة زاوية و نختار أفضلها في كلتا الحالتين، فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (*Max*) يتم اختيار أكبر قيمة، و في حالة كون دالة الهدف تخفيض (*Min*) يتم اختيار أصغر قيمة و من ثم تحديد الحل الأمثل.

مثال: حل بيانيا النموذج التالي:

$$Max\ Z = 1000x_1 + 1200x_2$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ x_1 \leq 34 \\ x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول: $10x_1 + 5x_2 \leq 200$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10x_1 + 5x_2 = 200$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow 5x_2 = 200 \Rightarrow x_2 = 40$ A (0 , 40)

نضع:

$x_2 = 0 \Rightarrow 10x_1 = 200 \Rightarrow x_1 = 20$ B (20 , 0)

1-2- القيد الثاني: $2x_1 + 3x_2 \leq 60$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2x_1 + 3x_2 = 60$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 20$ C (0 , 20)

نضع:

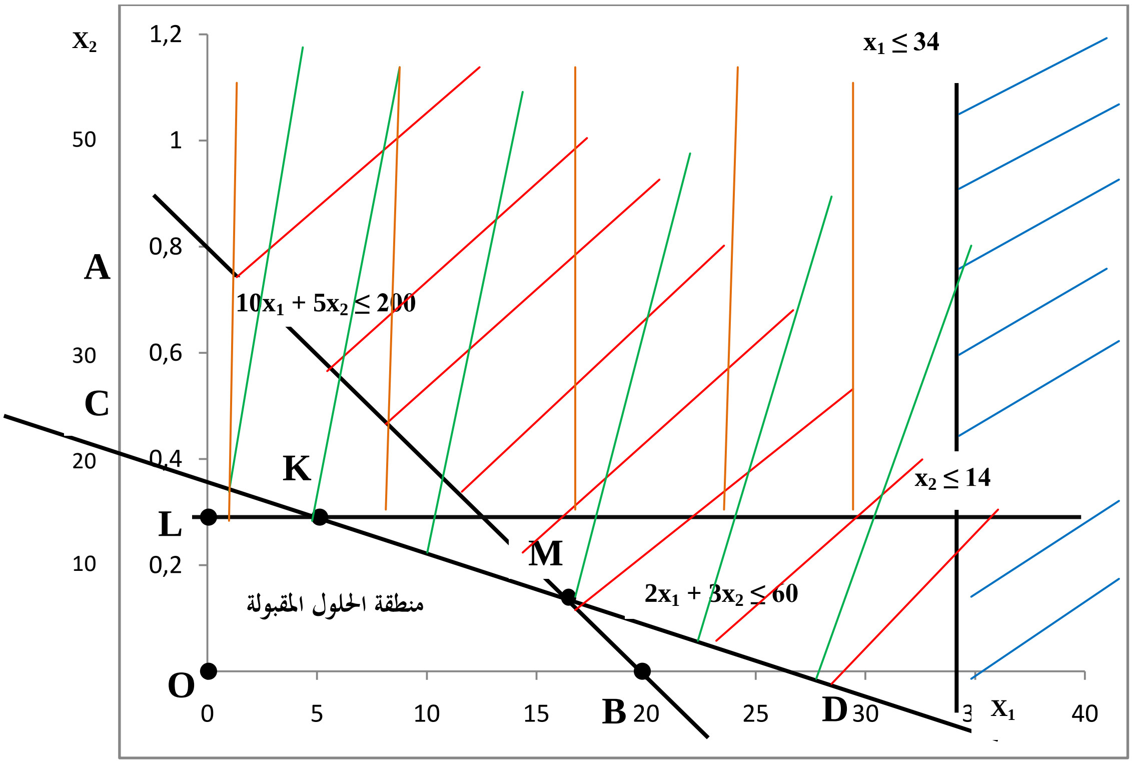
$x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 60 \Rightarrow x_1 = 30$ D (30 , 0)

هذا إضافة إلى تحويل القيدين الأخيرين إلى معادلات: $x_1 = 34$ و $x_2 = 14$، ثم تمثيلها جميعا على معلم متعامد و متجانس.

1-3- القيد الثالث: المستقيم يمر من نقطة واحدة هي: $x_1 = 34$.

1-4- القيد الرابع: المستقيم يمر من نقطة واحدة هي: $x_2 = 14$.

التمثيل البياني لقيود المثال



عند رسم القيود نلاحظ أنها تقسم المستوي إلى قسمين: قسم يقع على يمين المستقيم و آخر يقع على يساره.

فلو أخذنا على سبيل المثال القيد الأول $10x_1+5x_2 \leq 200$ نلاحظ أنه يقسم المستوي إلى قسمين، أحدهما على يمين المستقيم والآخر على يساره، و كلاهما يحتوي على عدد لانهائي من النقاط، فلو أخذنا أي نقطة من النقاط الواقعة على **اليمين** و عوضنا إحداثياتها في المتراجحة فإننا نلاحظ أنها لا تحقق القيد.

مثل: النقطة $G(50,30)$ عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على: $10(50) + 5(30) > 200$ فهي لا تحقق القيد، و عليه فإن جميع النقاط الواقعة يمين (أعلى) المستقيم لا تحقق القيد و بالتالي فهي **ليست حلا** للمتراجحة.

أما لو أخذت النقاط الواقعة على يسار المستقيم و تم تعويضها في القيد فنلاحظ أنها تحقق القيد أعلاه.

مثل: النقطة $N(10,10)$ (و التي تقع تحت المستقيم)، عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على $10(10) + 5(10) < 200$، و النقطة $P(12,16)$ (و التي تقع على المستقيم) عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على $10(12) + 5(16) = 200$ فكلاهما يحقق القيد، و عليه فإن جميع النقاط الواقعة يسار (تحت) القيد تحقق القيد، و بالتالي فهي **حل** للمتراجحة.

- وبما أن القيود من نوع أصغر أو يساوي فيتم التشطيب(لاحظ التشطيب على الرسم بالألوان) أعلى المستقيمات، لأن المناطق في أسفل المستقيمات تحقق الشروط.
- وشرط عدم سلبية المتغيرات يشطب ألرباع الثلاثة أيخرى، لأنها مناطق سالبة، لذلك يتم الحل في الربع الموجب فقط.

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نسمي المنطقة OLKMB **منطقة الحلول المقبولة**، و هي تحتوي عدد لانهائي من النقاط، و التي تتوزع داخل المنطقة أو على حدودها، أو على النقاط الرأسية: O, L, K, M, B.

من أجل أي نقطة من منطقة الحلول المقبولة هناك قيمة لدالة الهدف Z، و ما يهمنا هو إيجاد النقطة التي تعطي لـ Z أعظم (أمثل) قيمة، وه ذه النقطة تتواجد على أحد رؤوس منطقة الحلول المقبولة، لذلك نضطر إلى إيجاد وحساب إحداثيات النقط الرأسية، ليتم تعويضها في دالة الهدف و من ثَم اختيار النقطة الرأسية التي تعطي لـ Z القيمة الأمثل.

3- تحديد إحداثيات النقاط الرأسية و تقييم Z:

من الشكل أعلاه تتضح لنا إحداثيات النقاط:

$\boldsymbol{L}\ (0, 14) \Rightarrow Z = 1000\,(\mathbf{0}) + 1200\,(\mathbf{14}) \Rightarrow \mathbf{Z = 16800}$

$\boldsymbol{B}\ (20, 0) \Rightarrow Z = 1000\,(\mathbf{20}) + 1200\,(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{Z = 20000}$

أما النقاط M و K فيتم حساب إحداثياتها جبريا.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $2x_1 + 3x_2 = 60$ و $10x_1 + 5x_2 = 200$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \ldots\ldots\ldots \times (-5) \end{cases}$$

بضرب المعادلة الثانية في (-5)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$10x_1 + 5x_2 + (-10x_1 - 5x_2) = 200 - 300$

$-10x_2 = 100 \Rightarrow \mathbf{x_2 = 10}$

بتعويض قيمة x_2 في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الثانية)، نحصل على:

$2x_1 + 3(10) = 60 \Rightarrow 2x_1 = 60 - 30 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 15}$

و منه:

$\boldsymbol{M}\ (15, 10) \Rightarrow Z = 1000\,(\mathbf{15}) + 1200\,(\mathbf{10}) \Rightarrow \mathbf{Z = 27000}$

أما بالنسبة للنقطة K فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $x_2 = 14$ و $2x_1 + 3x_2 = 60$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} x_2 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \end{cases}$$

بتعويض قيمة x_2 في المعادلة الثانية نحصل على:

$$2x_1 + 3(14) = 60 \Rightarrow 2x_1 = 60 - 42 = 42 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 9}$$

و منه:

$$K(9, 14) \Rightarrow Z = 1000\,(\mathbf{9}) + 1200\,(\mathbf{14}) \Rightarrow \boldsymbol{Z = 25800}$$

و عليه فإن الحل الأمثل هو النقطة: **M** *(15 , 10)* *. لأنها تعطي أكبر قيمة لـ* ***Z .***

و بعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج، يمكن أن نخلُص إلى أن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمؤسسة هو كالتالي:

x_1= 15 أي على المؤسسة إنتاج 15 وحدة من المنتج الأول؛

x_2= 10 أي على المؤسسة إنتاج 10 وحدات من المنتج الثاني.

لتحقيق أعظم ربح ممكن وهو : $\boldsymbol{Z = 27000}$

<u>*التأكد من تحقيق قيود النموذج:</u>

يتم التأكد من ما إذا كان الحل الأمثل يحقق قيود النموذج من عدمه، و عليه يتم تعويض قيم الحل الأمثل في القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات:

$$\begin{cases} 10\,(15) + 5\,(10) = 200 \text{..............} & \text{قيد محقق} \\ 2\,(15) + 3\,(10) = 60 \text{..............} & \text{قيد محقق} \\ 15 < 34 \text{..............} & \text{قيد محقق} \\ 10 < 14 \text{..............} & \text{قيد محقق} \\ 15 > 0 \text{..............} & \text{قيد محقق} \\ 10 > 0 \text{..............} & \text{قيد محقق} \end{cases}$$

و عليه يتضح أن جميع قيود النموذج محققة (بإشارات: تساوي، أقل تماما، أكبر تماما)، أي أن الحل الأمثل يحقق كل القيود.