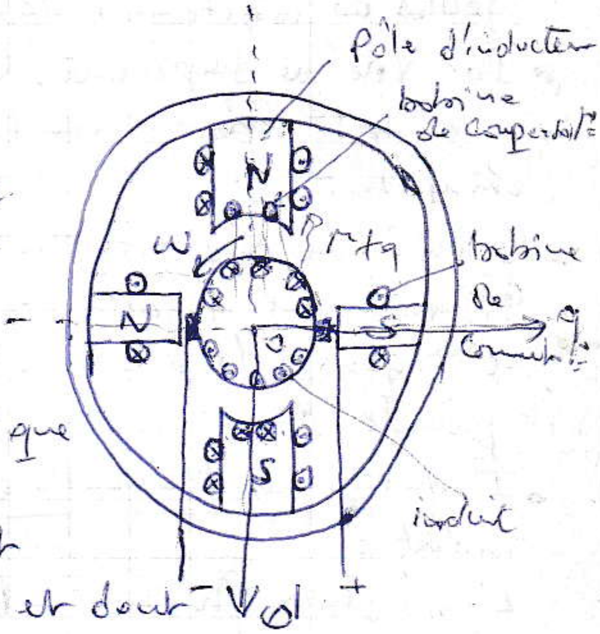
Machines à Courant Continu

1°/ Descript° de la Machine :-

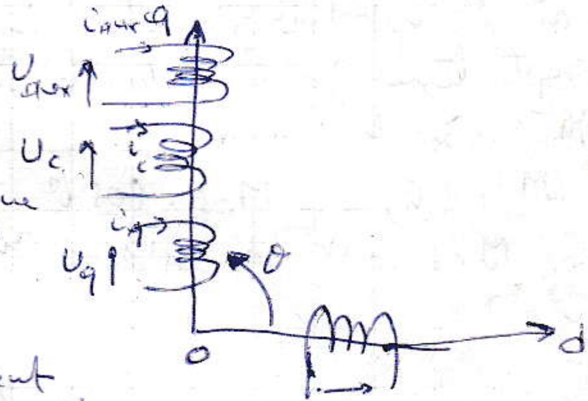
Une machine bipolaire comporte :

1- Une paire de pôles inducteurs "f" générant ds l'entrefer une induction fixe dans l'espace et dont l'axe magnétique est suivant l'axe directe "od".



2 - l'induit contient un enroulement Pseudo-stationnaire et dont l'axe magnétique est suivant l'axe en quadrature oq.

3 - un enroulement de compensat° "C" et de commutat° "aux" placés sur le stator et dont l'axe magnétique est suivant oq.



2°/ Hypothèses Simplificatrices :-

1°/ La saturation du circuit magnétique est négligée ce qui permet l'additivité des flux

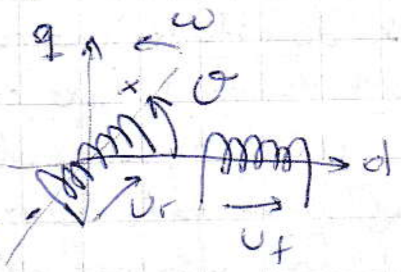
2°/ le circuit magnétique est parfaitement feuilleté, d'où on néglige les pertes par hysterésis et courants de Foucault.

3°/ Les résistances ne varient pas avec la température et l'effet de Peau est négligé (densité du courant est C^{te}).

4°/ les inductances propres sont C^{stes} et les inductances mutuelles entre stator et rotor varient suivant une loi sinusoïdale en fonction de l'angle électrique de leurs axes magnétiques.

5°/ On considère le cas moteur.

- L'étude des régimes transitoires implique la connaissance des inductances de la machine, alors qu'en régime permanent seules les résistances jouent un rôle.
- Par voie de simplicité, considérons le cas d'une machine bipolaire à excitation séparée non compensée et sans enroulements de commutation.
- Considérons provisoirement que les balais tournent avec le rotor, ce qui revient à faire tourner l'axe magnétique de l'enroulement rotorique à la vitesse $\omega = p\Omega$, bien qu'en réalité, l'enroulement est pseudo-stationnaire.



- Inductance mutuelle entre inducteur et induit :

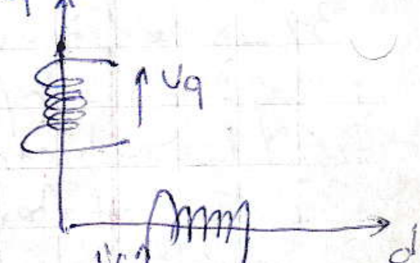
L'inductance mutuelle $M_{rf}(\theta)$ varie avec θ, où θ est l'angle électrique.

Compte tenu de la polarité des balais, l'inductance mutuelle se met sous la forme :

$$M_{rf}(\theta) = -M_{rf} \cdot \cos\theta.$$

où M_{rf} est la valeur maximale de l'inductance mutuelle pour $\theta = \pi$.

Considérons le cas de la machine réelle, et où les balais sont calés sur l'axe interpolaire.



- L'inducteur "f" créant un flux totalisé :

$\phi_f = \phi_{\sigma f} + \phi_d$ où

ϕ_d : flux mutuel créé par l'inducteur dans l'induit au mvt et dont l'axe est en quadrature.

- Mise en équations :- (Lois de Kirchoff)

$$\begin{cases} U_f = R_f\, i_f + \dfrac{d\phi_f}{dt} \\ U_q = R_q\, i_q + \dfrac{d\phi_q}{dt} \end{cases} \quad \text{------ (1)}$$

où :-

$$\phi_f = L_f \cdot i_f + M_{fq} \cdot i_q$$

$$\phi_{qf} = L_q \, i_q + M_{qf} \cdot i_f$$

L_f et L_q inductances propres. R_f et R_q : résistances d'inducteur et d'induit

M_{fq} et M_{qf} : inductances mutuelles entre induit et inducteur.

on démontre que :

$$M_{fq} = 0.$$

d'où le système sera :-

$$\begin{cases} U_f = R_f \, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ U_q = R_q \, i_q + \dfrac{d}{dt}\left[L_q \, i_q + M_{qf}(\theta) \cdot i_f\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_f = R_f \, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ U_q = R_q \, i_q + L_q \dfrac{di_q}{dt} + i_f \cdot \dfrac{dM_{qf}(\theta)}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

on obtient alors :

$$U_q = R_q \cdot U_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega \, i_f \, \frac{dM_{qf}(\theta)}{d\theta}$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \frac{d\,M_{qf}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta = \pi/2} = M_{qf}$$

$\Rightarrow$

$$U_q = R_q \, i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + M_{qf} \cdot i_f \cdot \omega$$

où :

$$M_{qf} \cdot i_f = \phi_d$$

on aura finalement :-

$$\begin{cases} U_f(t) = R_f \, i_f(t) + L_f \dfrac{di_f}{dt}(t) \\ U_q(t) = R_q \, U_q(t) + L_q \dfrac{di_q(t)}{dt} + M_{qf} \cdot i_f(t) \cdot \omega(t) \end{cases}$$

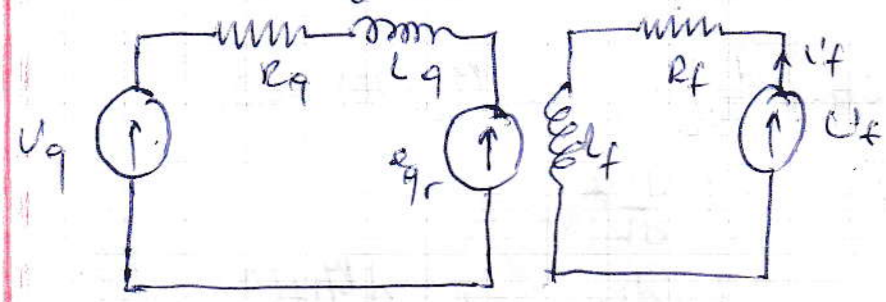
qui correspond au modèle de la machine à courant continu.

$e_{ft} = L_f \frac{di_f}{dt}$: tension de transformation aux bornes de l'inducteur "f".

$e_{qt} = L_q \frac{di_q}{dt}$: tension de transformation aux bornes de l'induit "q".

$e_{qr} = \omega_m \phi_d$: tension de rotation aux bornes de l'induit "q" en mvt (fem de la machine).

- On tire le schéma équivalent :-



- Equation du mouvement :-

$C_e - C_r = J \frac{d\Omega}{dt} + f\omega$

J : moment d'inertie du groupe (moteur + charge)

C_e : Couple électromagnétique

C_r : Couple résistant.

- Couple électromagnétique :-

La électrique instantannée absorbée est :-

$P(t) = U_q i_q + U_f i_f$.

l'énergie absorbée par le moteur pendant un intervale de temps dt est :-

$dW = P(t)\, dt$

$= \underbrace{(R_q i_q^2 + R_f i_f^2)dt}_{①} + \underbrace{\left(L_q \frac{di_q}{dt} \cdot i_q + L_f \frac{di_f}{dt} \cdot i_f\right)dt}_{②} + \underbrace{\omega_m \phi_d \cdot i_q\, dt}_{③}$

1 : l'énergie perdue par effet Joule.
2 : variat° de l'énergie magnétique emmagasinée.
3°/ L'énergie électromagnétique.

_ Le Couple électromagnétique est par définitions :-

$$C_e = \frac{dW_e}{d\theta} = \frac{P_e}{\Omega} = \frac{\omega \cdot M_{qf} \cdot i_f \cdot i_q}{\omega} = M_{qf} \cdot i_f \cdot i_q$$

Donc, le modèle de la machine à Courant Continu sera finalement

$$\begin{cases} u_f = R_f \cdot i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ u_q = R_q\, i_q + L_q \dfrac{di_q}{dt} + M_{qf} \cdot i_f \cdot \omega \quad \text{--- (2)} \\ M_{qf} \cdot i_f\, i_q - C_r = J \dfrac{d\omega}{dt} + f\omega . \end{cases}$$

• Régimes transitoires des ~~m~~ machines à Courant Continu :-

~~[illegible]~~ Le Comportement d'une machine à Courant Continu ~~est entièrement~~ en régime transitoire est entièrement déterminé par le système (2).

Les équations électriques et mécaniques forment un système d'équat° différentielle non linéaire.

_ Le Système sera linéaire si on suppose le flux inducteur Constant ($i_f = C^{ste}$) ~~ou~~ si la vitesse est Constante.

* ~~[illegible]~~ à vide

_ Exemple : Démarrage d'un Moteur à Courant Continu à excitat° indépendante Constante ($i_f = C^{te}$), quelles sont les lois de variations de $i_q(t)$ et $\omega(t)$.

AN :

$R_q = 1\,\Omega$, L_q négligeable, $K_{qf} = M_{qf} \cdot i_f = 1\,V \cdot rd^{-1} s^{-1}$

$J = 1\,Kg\,m^2$, $f = 0.02\,N.m \cdot rd^{-1} s^{-1}$, $U_q = 50\,V$

Solut°.

Le système (2) s'écrit alors

$$\begin{cases} R_q \cdot i_q + K_{qf} \cdot \omega = U_q \\ K_{qf}\, i_q = J \dfrac{d\omega}{dt} + f\omega \end{cases}$$

En appliquant la Transformée de Laplace.

$$R_q I_q(p) + k_{qf} W(p) = \frac{U_q}{p}$$

$$-k_{qf} I_q(p) + (Jp + f) W(p) = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_q & k_{qf} \\ -k_{qf} & Jp+f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q(p) \\ W(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_q}{p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I_q(p) = \frac{\begin{vmatrix} U_q/p & k_{qf} \\ 0 & Jp+f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_q & k_{qf} \\ -k_{qf} & Jp+f \end{vmatrix}} = \frac{U_q(Jp+f)}{p\left[R_q J p + R_q f + k_{qf}^2 f\right]}$$

$$I_q(p) = \frac{\frac{U_q}{R}\left(p + \frac{f}{J}\right)}{p\left(p + \frac{f}{J} + \frac{k_{qf}^2 f}{R_q . J}\right)}$$

A.N

$$I_q(p) = \frac{50(p + 0.02)}{p(p + 1.02)}$$

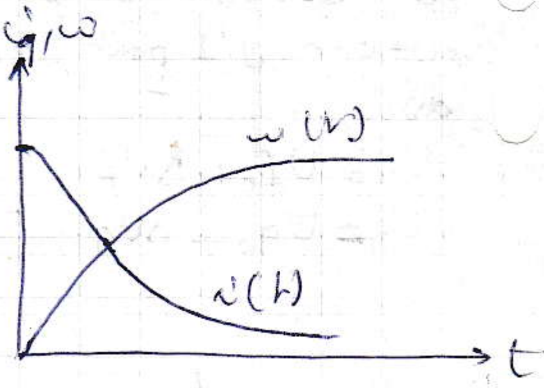
$$W(p) = \frac{\begin{vmatrix} R_q & U_q/p \\ -k_{qf} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_q & k_{qf} \\ -k_{qf} & Jp+f \end{vmatrix}} = \frac{U_q . k_{qf}}{p\left[R_q J p + R_q J + k_{qf}^2 f\right]}$$

$$W(p) = \frac{(U_q . k_{qf}) / R_q J}{p\left(p + \frac{f}{J} + \frac{k_{qf}^2}{R_q J}\right)}$$

A.N:

$$W(p) = \frac{50}{p(p + 1.02)}$$

$$TL^{-1}\begin{cases} i(t) = 1 + 49e^{-1.02t} \\ \omega(t) = 49(1 - e^{-1.02t}) \end{cases}$$



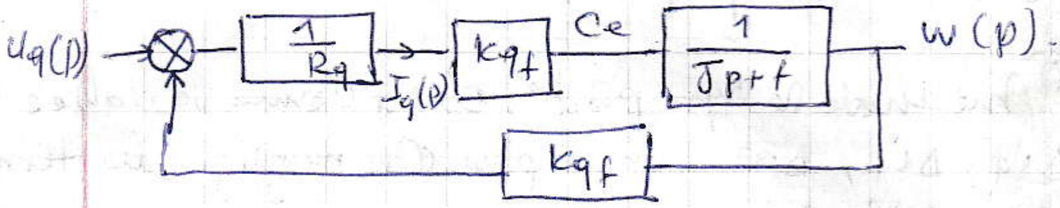
- la vitesse $\omega(t)$ croit avec la C^{ste} de temps mécanique:

$$\tau m = \frac{1}{\frac{f}{J} + \frac{Kqf^2}{RqJ}}$$

et la fonction de transfert sera alors:

$$\frac{W(p)}{Vq(p)} = \frac{K}{1 + \tau mp}$$

La C^{ste} de temps électrique est négligé.
on aura alors le schéma bloc:



* Résolut° du système non linéaire:
- quand le Courant d'excitation i_f ou la vitesse $\omega(t)$ n'est pas Constante, le système devient non linéaire (exp: démarrage d'un moteur shunt). Parmi les méthodes de résolut°, On cite:

1°/ Linéarisation du système

- Méthode de petites perturbations:

① Dans cette méthode, On ne Considère que les variations des différents grandeurs à partir d'1 régime initial établi.

$$\begin{cases} u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \\ U_q = R_q i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + M_{qf} i_f \omega \quad \text{---} \quad (3) \\ M_{qf} \cdot i_f \cdot i_q = J\frac{d\omega}{dt} + C_r \end{cases}$$

On Considère des petites variations ~~autr~~ $\Delta(u_f, u_q, i_f, i_q, \omega, C_r)$ autour d'1 point d'équilibre $(U_{f0}, U_{q0}, i_{f0}, i_{q0}, \omega_0, C_{r0})$.
avec :

$$U_f = U_{f0} + \Delta U_f$$
$$U_q = U_{q0} + \Delta U_q \quad \ldots\ldots (4)$$
$$\vdots$$

Remplaçons les expressions (4) ds (3), On Obtient :-

$$\begin{cases} U_{f0} + \Delta U_f = R_f(i_{f0} + \Delta i_f) + L_f \frac{d}{dt}(i_{f0} + \Delta i_f) \\ U_{q0} + \Delta U_q = R_q(i_{q0} + \Delta i_q) + L_q \frac{d}{dt}(i_{q0} + \Delta i_q) + M_{qf}(i_{f0} + \Delta i_f)(\omega_0 + \Delta\omega) \\ M_{qf}(i_{f0} + \Delta i_f)(i_{q0} + \Delta i_q) = J\frac{d}{dt}(\omega_0 + \Delta\omega) + C_{r0} + \Delta C_r. \end{cases}$$

~~Par la méthode de superposit~~

~~On néglige~~

Par la méthode de superposit°, on a comme variables les variat° Δi_q, Δi_f, $\Delta\omega$, et en plus On néglige les termes $\Delta i_f \times \Delta\omega$, $\Delta i_f \times \Delta i_q$.

le système sera alors :

$$\begin{cases} \Delta U_f = R_f . \Delta i_f + L_f \frac{d \Delta i_f}{dt} \\ \Delta U_q = R_q \Delta i_q + L_q \frac{d}{dt}\Delta U_q + M_{qf}(i_{f0}\Delta\omega + \omega_0 \Delta i_f) \\ M_{qf}(i_{f0} . \Delta i_q + i_{q0} . \Delta i_f) = J\frac{d}{dt}(\Delta\omega) + \Delta C_r \end{cases} \quad \ldots (5)$$

Le système (5) est alors linéaire et les variables finales seront

$$i_f = i_{f0} + \Delta i_f$$
$$i_q = i_{q0} + \Delta i_q$$
$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega .$$

2°/ UTilisation de la Méthode de Runge Kutta.

3°/ utilisation du Calculateur analogique Par l'intermédiaire du schéma bloc :-

- Considérons le cas où le flux d'inducteur varie suivant une courbe d'aimantation :-

$\phi_f = f(i_f)$.

$$\begin{cases} u_f = R_f\, i_f + L_f \dfrac{di_f}{dt} \\ U_q = R_q\, i_q + L_q \dfrac{di_q}{dt} + e \\ C_e - C_r = J \dfrac{d\omega}{dt} + C_r \end{cases} \quad \text{--- (6)}$$

où,

$$e = M_{qf} \cdot i_f \cdot \omega = k\, \phi_f \cdot \omega \quad \text{--- (7)}$$
$$C_e = M_{qf} \cdot i_f \cdot i_q = k\, \phi_f \cdot i_q$$

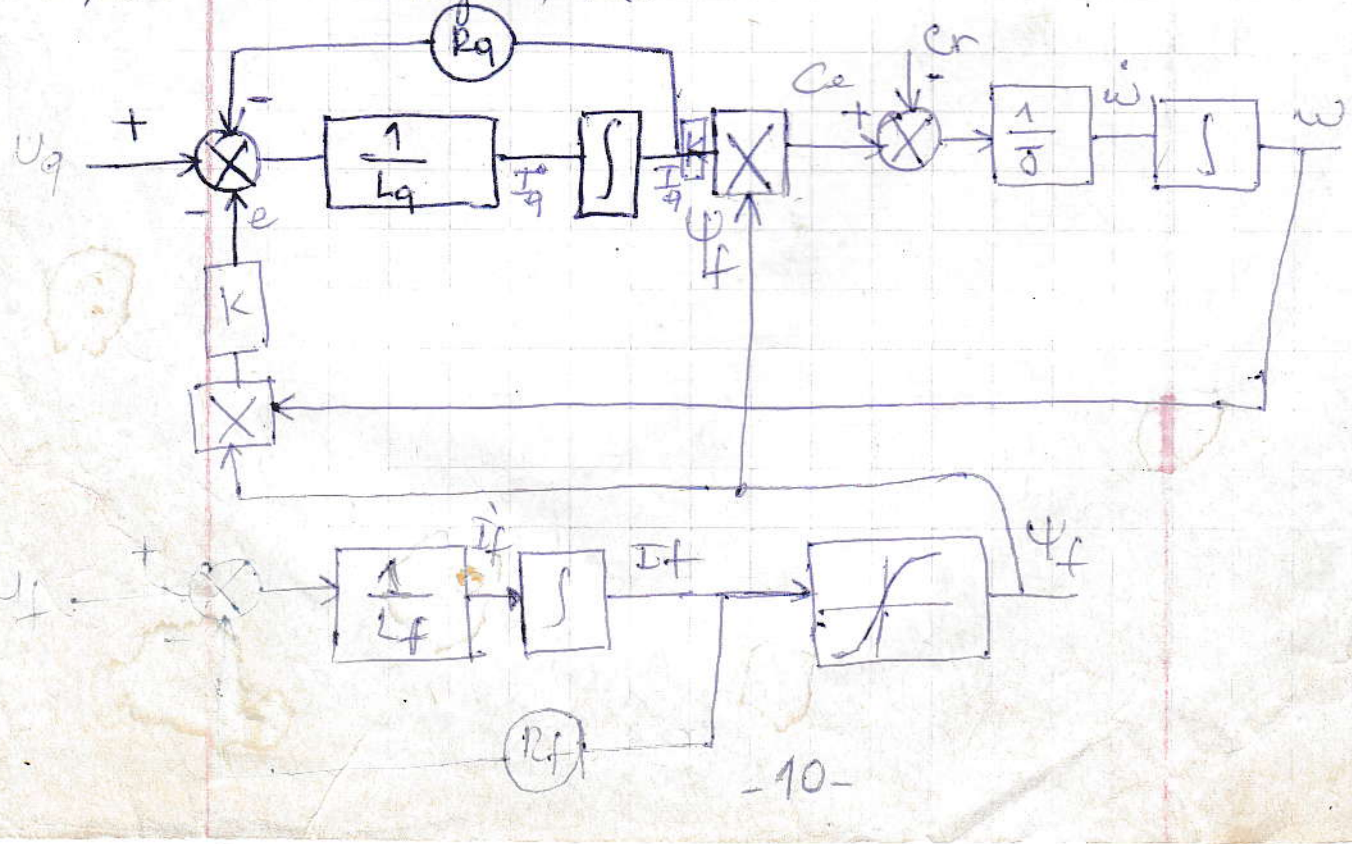
- ~~Par~~ de (6) et (7), on aura :-

$$\frac{di_q}{dt} = \frac{U_q - e - R_q i_q}{L_q}$$

$$\frac{d\phi_f}{dt} = \frac{u_f - R_f \cdot i_f}{L_f}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k\, \phi_f\, i_q - C_r}{J}$$

d'où, On tire le diagramme Structurel.



En utilisant et avec le diagramme structurel ci-dessus, on peut étudier les régimes transitoires malgré que le système est non linéaire.