$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

1.2 Théorie et calcul des probabilités

1.2.1 Introduction

Dans ce qui suit , nous allons présenter les notions de base des probabilités, les ensembles finis et équiprobables, les probabilités conditionelles, les evènements indépendants, les probabilités totales et la formule de Bayes.

1.2.2 Notions de base

1.2.2.1 L'expérience aléatoire

On dit qu'une expérience est aléatoire si on ne peut pas prévoir son résultat même si on répète l'experience plusieurs fois.

Exemple 1.8 *On jete un dé ou une pièce de monnaie et on observe la face supérieure.*

1.2.2.2 L'événement

Soit une expérience aléatoire qulconque.
- On note les différents résultats par $\{w_1, w_2 \dots w_n\}$.
- On apppelle les singletons $\{w_1\}, \{w_2\}$ des événements élémentaires.
- L'union de deux ou plusieurs événements élémentaires $\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_2, w_3\}, \dots$Sont des événements composés.
- On note l'ensemnle de tous les résultats possibles par Ω.
- On appelle Ω l'événement certain ou aussi l'ensemble fondamontale.
- On note $\overline{\Omega}$ (le compémentaire) par ϕ et l'on appelle événement impossible.

Exemple 1.9 ** On considère l'expérience aléatoire de dé.*
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
A : $\ll$ Obtenir la face 2$\gg$, $A = \{2\}$ (événement élémentaire).
B : $\ll$ Obtenir un chiffre pair$\gg$, $B = \{2, 4, 6\}$ (événement composé).
** L'expérience de La monnaie*
$\Omega = \{F, P\}$.

1.2.2.3 Réalisation d'un événement

Soit une expérience aléatoire, Ω son ensemble fondamentale et A un événement dépendant de cette expérience.

- Si le résultat obtenu noté par w appartient à A ($w \in A$), on dit que A est réalisé (à travers w).

- Dans le cas contraire ($w \notin A$), alors n'est pas réalisé.

A chaque éxpérience aléatoire, on associé le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tels que :

Ω : l'ensemble fondamental et $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les événements dépendants de cette expérience.

1.2.2.4 Opérations sur les événements

Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements et A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$:

Symbole	Terminologie d'ensembles	Terminologie d'événements
Ω	L'ensemble total	L'ensemble fondamental (événement certain)
w	Elément	Résultat
A	Un sous-ensemble	Un événement
$\overline{A}$	Complémentaire de A	Négation de A (A non réalisé)
ϕ	L'ensemble vide	L'événement impossible
$A \cap B = \phi$	L'intersection de A et B est vide (disjoints)	A et B sont incompatibles

Notions mathématiques des probabilités (Kolmogrov 1933)
Soit Ω l'ensemble fondamental associé à une éxpérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.
On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow \Omega \\ A &\longrightarrow P(A) \end{aligned}$$

On dit que P est une probabilité et $P(A)$ est la probabilité de l'événement A si :

1- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : 0 \leq P(A) \leq 1.$

2- $P(\Omega) = 1.$

3- Si $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \phi$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4- Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ un ensemble d'événements dénombrables et disjoints deux à deux, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Définition 1.6 *On appelle le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilités.*

Considéront dans toutes les propositions suivantes que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace de probabilités.

Proposition 1.1 *Si $\overline{A}$ est le complémentaire de l'événement A, alors*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Cas particulier :

$$\phi = \overline{\Omega} \Rightarrow P(\phi) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

Proposition 1.2 *Soient* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, *alors*

$$P(A|B) = P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B),$$

où

$$A|B = \{x \in \Omega \,|x \in A \wedge x \notin B\}$$

Cas particulier :
Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tels que :* $B \subset A$, *alors* $P(B) \leq P(A)$.

Proposition 1.3 *Soient* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, *alors*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Corollaire 1.1 *Soient* A, B, C *trois événements de* $\mathcal{P}(\Omega)$, *alors*

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ & - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

1.2.3 Les ensembles finis et équiprobables

Souvent, dans des éxperiences aléatoires pratiques ça demande qu'on associé des probabilités égales à tous les éléments de l'ensemble Ω.
Dans ce cas, on appelle $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espase uniforme.
Soit $\Omega = \{a_1, a_2 \ldots a_n\}$, tels que : $\forall i = 1, \ldots n$, $\forall j = 1, \ldots n$, $P(a_i) = P(a_j)$.
On a :

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} \\ &\Rightarrow 1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i\right) \\ &\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = nP(a_i) \\ &\Rightarrow P(a_i) = \frac{1}{n}, \ \forall i = 1, \ldots n \end{aligned}$$

Donc : Si A est un événement composé de k éléments (élémentaires), alors :

$$P(A) = k.\frac{1}{n} = \frac{k}{n} \text{ ou on écrit aussi :}$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nbr de cas favorables}}{\text{Nbr de cas possibles}}.$$

Exemple 1.10 *On lance un dé équilibré :*
A : $\ll$ *Obtenir un chiffre impair* $\gg$.
B : $\ll$ *Obtenir un chiffre supérieur à* $2 \gg$.
On a chaque face des 6 *faces a la même chance d'apparaitre (la même probabilité).*
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Card(\Omega) = 6 = n$.
$\forall 1 \leq i, j \geq 2$, $P(a_i) = P(a_j) = \frac{1}{6}$.
$A = \{1, 3, 5\}$, $P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{5}{6}$.