1) Forme de représentation d'un programme linéaire.

Un programme linéaire et présenter sous quatre formes algébrique ou matricielle:

- **la forme primal.**

a) La forme algébrique

$x_1,x_2,\ldots\ldots.,x_n$ réelles

MAX(z)= $c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots+c_nx_n$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ a_{13}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+a_{1n}x_n \quad \leq \quad \mathbf{d_1}$

$a_{21}x_1+2_{22}x_2+\ a_{23}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+a_{2n}x_n \quad \leq \quad \mathbf{d_2}$

………………………………………………………………………………………

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\quad a_{i3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+a_{in}x_n \quad \leq \quad \mathbf{d_i}$

………………………………………………………………………………………

$a_{m1}x_1+2_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.+a_{mn}x_n \quad \leq \quad \mathbf{d_m}$

b) La forme matricielle

X(n) réeelles, A (m,n) réelles, d(m) réelles, C(n) réelles ;

MAX(Z) = CX ;

AX $\leq$ d**;**

- **la forme Dual.**

a) La forme algébrique

$y_1,y_2,\ldots\ldots.,y_m$ réelles

MIN(w)= $d_1y_1+d_2y_2+\ldots\ldots+d_my_m$

$a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ a_{13}y_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1m}y_m \quad \geq \quad \mathbf{c_1}$

$a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ a_{23}y_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{2m}y_m \quad \geq \quad \mathbf{c_2}$

……………………………………………………………………………………………

$A_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\ \ a_{i3}y_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{im}y_m \quad \geq \quad \mathbf{c_i}$

……………………………………………………………………………………………

$A_{n1}y_1+a_{n2}y_2+a_{n3}y_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_ny_m \quad \geq \quad \mathbf{c_n}$

b) La forme matricielle

Y(m) réeelles, A (n,m) réelles, d(m) réelles, C(n) réelles ;

MIN(Z) = Yd ;

YA $\geq$ C**;**

- <u>**la forme standard**</u>**.**

c) La forme algébrique

$x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ réelles

OPTIMUM (z)= $c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots+c_nx_n$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ a_{13}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1n}x_n \quad = \quad d_1$

$a_{21}x_1+2_{22}x_2+\ \ a_{23}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{2n}x_n \quad = \quad d_2$

……………………………………………………………………………………………

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ \ \ a_{i3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{in}x_n \quad = \quad d_i$

……………………………………………………………………………………………

$a_{m1}x_1+2_{m2}x_2+\ a_{m3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{mn}x_n \quad = \quad d_m$

a) **La forme matricielle**

X(n) réeelles, A (m,n) réelles, d(m) réelles, C(n) réelles ;

OPTIMUM(Z) = CX ;

AX **=** d**;**

❑ **<u>la forme mixte</u>.**

d) **La forme algébrique**

$x_1, x_2, \ldots\ldots., x_n$ réelles

OPTIMUM (z)= $c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots+c_nx_n$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \quad a_{13}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1n}x_n \quad \geq \quad d_1$

$a_{21}x_1+2_{22}x_2+ \quad a_{23}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{2n}x_n \quad \leq \quad d_2$

....

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ \quad a_{i3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{in}x_n \quad \geq \quad d_i$

....

$a_{m1}x_1+2_{m2}x_2+ \quad a_{m3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{mn}x_n \quad = \quad d_m$

b) **La forme matricielle**

X(n) réeelles, A (m,n) réelles, d(m) réelles, C(n) réelles ;

OPTIMUM(Z) = CX ;

AX (≤ ,**=** , **≥)** d**;**

2) Rappel de quelques notions utiles de mathématiques.

- **Combainaison convexe**

  $V_1, V_2, \ldots\ldots, V_m$ Ɛ V et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_m$ réelles

  Le vecteur U= $\sum_{i=1}^{m} \alpha i V i$ forme une combinaison comvexe.

- **Espace convexe**

  x, x' Ɛ V x''= α x +(1- α)x' avec α Ɛ [0,1] si x'' Ɛ V => V est un espace convexe.

- **fonction convexe**

  x, x' Ɛ V V est convexe

  f(αx + (1- α)x') ≤ αf(x)+(1- α)f(x') sens large

  f(αx + (1- α)x') < αf(x)+(1- α)f(x') sens strict

  f(αx + (1- α)x') = αf(x)+(1- α)f(x')

- **points extremum**

  V est convexe, un point est dit extremum s'il ne peut pas s'exprimer en fonction d'autres points.

- **Simplexe**

  C'est un espace vectoriel convexe qui dans un espace à *n* dimensions à exactement (*n+1*) points extremum.

- **Base et solution de base**

  Une base est formé par l'ensemble de colonnes linéairement indépendante d'un système d'équations représenter comme suit : Ax = d avec = $A^I + A^J$ I Ɛ {*1,2,…….,n*}

$A^I x + A^J x = d$ la solution de base est $x_i = (A^I)^{-1}d$ variable de base et $x_j = 0$ variable hors base

S'il existe une variable de base nulle alors la solution est dite dégénérée.

- ✓ **Méthode d'élimination de GAUSS :**

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\quad a_{13}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1n}x_n \quad = \quad d_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\quad a_{23}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{2n}x_n \quad = \quad d_2$$

....

$$A_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\quad a_{lk}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{ln}x_n \quad = \quad d_l$$

....

$$a_{m1}x_1+2_{m2}x_2+\quad a_{m3}x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{mn}x_n \quad = \quad d_m$$

$a_{lk \neq 0}$ dit le pivot.

- On divise la ligne *l* par $\boldsymbol{a_{lk}}$
- ***formule de GAUSS :***

  $a_{ij}' = a_{ij} - \frac{alj}{alk} a_{ik}$ **(i= 1,n ; i≠ l)**

  $d_i' = d_i - \frac{dl}{alk} a_{ik}$ **(i= 1,n ; i≠ l)**

  $a_{lj}' = \frac{alj}{alk}$ **(i= 1,n ; j≠ k)**

3) Méthode de résolution géométrique

L'idée de cette méthode est de représenter les contraintes d'une façon sagittale sur du papier millimétré et visualiser l'ensemble des solutions pour identifier la solution optimale.

Algorithme de la méthode de résolution géométrique

début :

Pas 1 : tracer les droites limites (contraintes technologiques).

Pas 2 : extraire les valeurs des variables principales du graphe au niveau des points extremum.

Pas 3 : substituer les valeurs des variables principales extraites dans la fonction objective et imprimer les valeurs des variables qui réalise l'optimum demandé.

Fin.

Exemple :

Appliquer la méthode de résolution géométrique au modèle suivant :

$x_1, x_2 \in \quad R$

$5x_1+3x_2 \leq$ **30**

$2x_1+3x_2+ \quad \leq$ **24**

$x_1+3x_2+\leq$ **18**

MAX(Z) = $8x_1+6x_2$

Les valeurs extraites du graphe sont

$x_1 = 0$; $x_2 = 0$ $\quad Z = 0$

$x_1 = 6$; $x_2 = 0$ $\quad Z = 48$

$\underline{x_1 = 3; x_2 = 5}$ $\quad Z = 54$ MAX (0,48,**$\underline{54}$**)

la solution est **$\underline{x_1 = 3; x_2 = 5}$** MAX (Z) = 54