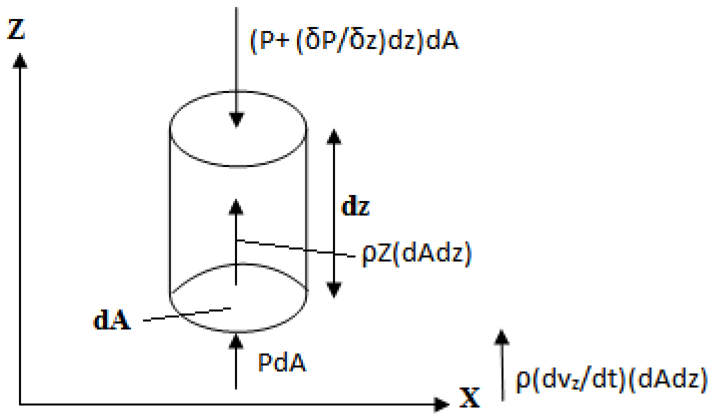
Hydrodynamique : Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

Branche de l'hydraulique qui étudie les liquides et leur mouvement (v≠0) (F d'inértie ≠ 0).



- **Cas des fluides parfaits :**

Les forces agissant sur un element de volume (dAdz) dans la direction z sont :

- Les forces de volume (force de pesenteur) : $\rho Z(dAdz)$
- Les forces de surface (force de pression) : PdA et $\left(P+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dA$
- Les forces d'inertie (accélération) : $\rho\frac{dv_z}{dt}(dAdz)$ / v_z : composante de v dans la direction z

$\vec{V}$ (v_x , v_y, v_z)

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ => $PdA-\left(P+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)dA+\rho Z(dAdz) = \rho\frac{dv_z}{dt}(dAdz)$

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho Z=\rho\frac{dv_z}{dt}$$

En faisant la meme operation selon l'axe x et y on aura :

$$\left\{\begin{array}{lll}\rho X-\frac{\partial P}{\partial x}=\rho\frac{dv_x}{dt} & & X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{dv_x}{dt}\\ \rho Y-\frac{\partial P}{\partial y}=\rho\frac{dv_y}{dt} & => & Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{dv_y}{dt}\\ \rho Z-\frac{\partial P}{\partial z}=\rho\frac{dv_z}{dt} & & Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{dv_z}{dt}\end{array}\right.$$

$$\vec{F}-\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad\,P}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}$$

Ceci est l'équation de la dynamique des fluides parfaits

(Equation d'Euler)

F de volume F de pression F d'inertie

En introduisant les composants de l'accélération pour écoulement 3 dimensionnel les équations deviennent :

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}$$ F = $\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-g\end{bmatrix}$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{F}-\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\,P=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\,\overrightarrow{grad}\vec{v}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si l'écoulement est stationnaire (permanent) => $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$

Si l'écoulement est uniforme $\vec{v}\,\overrightarrow{grad}v=0$ (accélération convective)

Si l'écoulement est uniforme et permanent l'accélération totale $\frac{d\vec{v}}{dt}=0$

$\frac{1}{\rho}\left(dP-\frac{\partial P}{\partial t}dt\right)=Xdx+Ydy+Zdz-vdv$ Équation de mouvement le long d'une trajectoire

Pour écoulement permanent : $\frac{1}{\rho}dP=Xdx+Ydy+Zdz-vdv$ en remplacant X,Y,Z par leur valeur on aura : $\frac{1}{\rho}dP=-gdz-vdv$

Par integration le long de la trajéctoire d'une particule liquide :

$$\frac{1}{\rho}\int dP=-g\int dz-\int v\,dv <=> \frac{P}{\rho}+gz+\frac{v^2}{2}=cte$$

On divise par g on aura : $z+\frac{P}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=cte$

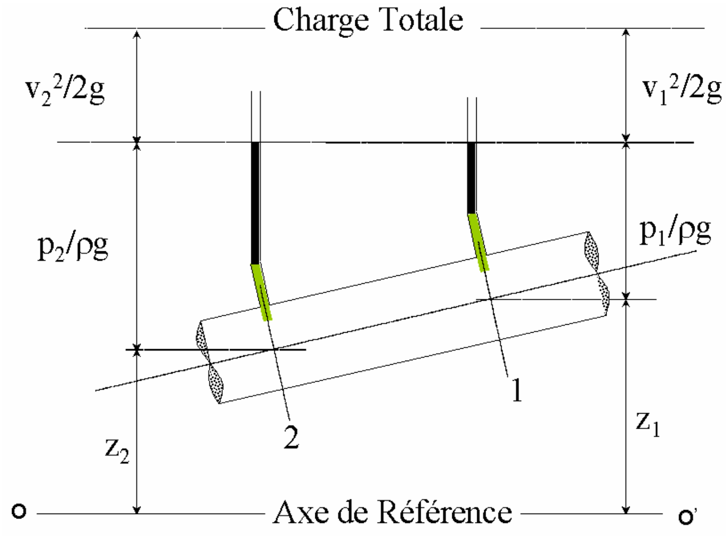
- **Equation de Bernoulli appliquée entre 2 points dans un fluide parfait :**

$$z_1+\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}=\ H=cte$$

C'est l'équation de Bernoulli pour un écoulement parfait permanent non visqueux

Interpretation de l'équation de Bernoulli :

Interpretation géométrique :



Z	Hauteur de position
$\frac{P}{\gamma}$	Hauteur piezometrique
$z+\frac{P}{\gamma}$	Charge piezométrique
$\frac{v^2}{2g}$	Hauteur due a la vitesse
H	hauteur hydrodynamique

Interpretation énérgétique :

Z	Energie de position
$\frac{P}{\gamma}$	Energie de pression
$z+\frac{P}{\gamma}$	Energie potentielle
$\frac{v^2}{2g}$	Energie cinétique
$z+\frac{P}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}$	Energie mécanique totale

On peut dire que l'équation de Bernoulli traduit la conservation de l'énérgie mécanique totale $\left(\frac{dH}{dx}=0\right)$ par unité de poids au cours d'un mouvement permanent ($\frac{\partial}{\partial t}=0$) d'un fluide parfait (la viscosité ν = 0) incompressible (ρ =cte)

En tout point d'un filet liquide pris dans un liquide incompressible de fluide parfait en mouvement permanent et soumis a la seule action de la pesenteur la cote géométrique z , la hauteur representative de la pression P/γ et la hauteur representative de la vitesse $v^2/2g$ sont dans une somme constante H.